Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(12), 2003-2011
Published Online December 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.1112223

单边 Gorenstein 复形

李彦洁

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2021年11月6日；录用日期：2021年12月7日；发布日期：2021年12月14日

摘 要

设 $\mathcal{W}$ 是一个关于扩张封闭的自正交左 R-模类。引入了右 (左) $\mathcal{W}$-**Gorenstein** 复形的概念，证明了复形 $\boldsymbol{M}$ 是右 (左) $\mathcal{W}$-**Gorenstein**复形当且仅当对任意的 $n \in \mathbb{Z}$，$\boldsymbol{M}_n$ 是右 (左) $\mathcal{W}$-**Gorenstein** 模。作为应用，由右 (左) $\mathcal{W}$-**Gorenstein** 模的性质推得了右 (左) $\mathcal{W}$-**Gorenstein**复形的一些性质。

关键词

自正交类，右 (左) $\mathcal{W}$-**Gorenstein** 模，右 (左) $\mathcal{W}$-**Gorenstein** 复形

One-Sided Gorenstein Complexes

Yanjie Li

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Nov. 6^{th}, 2021; accepted: Dec. 7^{th}, 2021; published: Dec. 14^{th}, 2021

Abstract

Let $\mathcal{W}$ be a self-orthogonal class of left R-modules which is closed under extensions. In this article, the notion of right (left) $\mathcal{W}$-Gorenstein complexes is introduced, and

文章引用: 李彦洁. 单边Gorenstein复形[J]. 理论数学, 2021, 11(12): 2003-2011.
DOI: 10.12677/pm.2021.1112223

we show that a complex M is right (left) $\mathcal{W}$-Gorenstein if and only if each M_n is right (left) $\mathcal{W}$-Gorenstein module for any $n \in \mathbb{Z}$. As applications, some properties of right (left) $\mathcal{W}$-Gorenstein complexes are deduced from those of right (left) $\mathcal{W}$-Gorenstein modules.

Keywords

Self-Orthogonal Class, Right (Left) $\mathcal{W}$-Gorenstein Modules, Right (Left) $\mathcal{W}$-Gorenstein Complexes

1. 引言

Gorenstein 同调代数源于 Auslander 和 Bridge 关于双边 Notherian 环上 G-维数为 0 的有限生成模的研究 [1]. 1995 年, Enochs 和 Jenda 在一般环上引入了 Gorenstein 投射模和 Gorenstein 内射模的概念 [2]. 近年来, 以 Gorenstein 投射、内射模为主要研究对象的 Gorenstein 同调代数受到了诸多学者的关注. 作为 Gorenstein 投射模和 Gorenstein 内射模的统一推广, Sather-Wagstaff, Sharif 和 White [3], Geng 和 Ding [4] 分别引入并研究了 $\mathcal{W}$-Gorenstein 模, 其中 $\mathcal{W}$ 是一个自正交左 R-模类. 2020 年, 作为 $\mathcal{W}$-Gorenstein 模的推广, Song 等 [5]研究了右 (左) $\mathcal{W}$-Gorenstein 模.

复形范畴是一个有足够投射对象和足够内射对象的 Abel 范畴, 且模范畴可看成复形范畴的全子范畴. 因此在复形范畴中也可开展同调代数和 Gorenstein 同调代数理论. 1998 年, Enochs 和 Garcia-Rozas 把 Gorenstein 投射、内射模的概念拓展到了复形范畴中, 在文献 [6]中引入了 Gorenstein 投射复形和 Gorenstein 内射复形的概念, 证明了在 Gorenstein 环上复形 $\boldsymbol{M}$ 是 Gorenstein 投射 (Gorenstein 内射) 的当且仅当 $\boldsymbol{M}$ 的所有层次上的模是 Gorenstein 投射 (Gorenstein 内射) 的. Yang 在文献 [7]中证明了这一结论在任意环上都是成立的. Xin, Chen 和 Zhang 在文献 [8]中将 $\mathcal{W}$-Gorenstein 模的概念拓展到了复形范畴中, 引入了 $\mathcal{W}$-Gorenstein复形的概念, 证明了 $\mathcal{W}$-Gorenstein 复形就是 $\mathcal{W}$-Gorenstein 模的复形.

受以上研究的启发, 本文将右 (左) $\mathcal{W}$-Gorenstein 模的概念拓展到复形范畴中, 引入右 (左) $\mathcal{W}$-Gorenstein 复形的概念, 研究右 (左) $\mathcal{W}$-Gorenstein 复形与其各个层次上模的右 (左) $\mathcal{W}$-Gorenstein 性之间的联系, 并借助于所得结论由右 (左) $\mathcal{W}$-Gorenstein 模的性质去研究右 (左) $\mathcal{W}$-Gorenstein 复形的性质.

2. 预备知识

本文中, R 和 S 是有单位元的结合环, 所涉及的模是左 R- 或 S-模, 右 R- 或 S-模看作反环 R^{op} 或 S^{op} 上的模. 用 $\mathcal{P}(R)$, $\mathcal{I}(S)$, $\mathcal{P}_C(R)$ 和 $\mathcal{I}_C(S)$ 分别表示投射左 R-模, 内射左 S-模, C-投射左 R-模和 C-内射左 S-模的类, 详见 [9].

复形

$$\cdots \longrightarrow \boldsymbol{M}_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} \boldsymbol{M}_n \xrightarrow{d_n} \boldsymbol{M}_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots$$

记为 $(\boldsymbol{M}, d)$ 或 $\boldsymbol{M}$. 复形 $\boldsymbol{M}$ 第 n 个层次上的循环 (边界, 同调) 记为 $Z_n(\boldsymbol{M})$ ($B_n(\boldsymbol{M}), \mathrm{H}_n(\boldsymbol{M})$). 用 $\mathcal{C}$ 表示模的复形范畴. 设 M 是一个模, 用 $\overline{M}$ 表示复形:

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow M \xrightarrow{id} M \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

其中 M 在第 1 和第 0 层次. 设 $\boldsymbol{M} \in \mathcal{C}$ 且对任意整数 m, $\boldsymbol{M}$ 的平移定义为复形 $\boldsymbol{M}[m]$, 其中 $(\boldsymbol{M}[m])_n = \boldsymbol{M}_{n-m}$ 且 $d_n^{\boldsymbol{M}[m]} = (-1)^m d^{n-m}$. 设 $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N} \in \mathcal{C}$, Hom 复形 $\mathrm{Hom}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N})$ 定义为

$$\mathrm{Hom}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N})_n = \prod_{k \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}(\boldsymbol{M}_k, \boldsymbol{N}_{n+k}),$$

边缘算子为

$$d_n^{\mathrm{Hom}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{N})}((f^k)_{k\in\mathbb{Z}}) = (d_{n+1}^{\boldsymbol{N}} f^k - (-1)^n f^{k-1} d_k^{\boldsymbol{M}})_{k\in\mathbb{Z}}.$$

用 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N})$ 表示 $\boldsymbol{M}$ 到 $\boldsymbol{N}$ 的所有复形态射作成的 Abel 群, 右导出函子 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,-)$ 确定的第 i 个同调群记为 $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N})$. 用 $\mathrm{Ext}^1_{dw}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N})$ 表示 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N})$ 的由所有层次可裂的短正合列 $0 \longrightarrow \boldsymbol{L} \longrightarrow \boldsymbol{M} \longrightarrow \boldsymbol{N} \longrightarrow 0$ 作成的子群.

设 $\mathcal{X}$ 是一个模类, $\boldsymbol{M}$ 是一个复形. 如果 $\boldsymbol{M}$ 正合, 并且对任意的 $n \in \mathbb{Z}$, $Z_n(\boldsymbol{M}) \in \mathcal{X}$, 则称 $\boldsymbol{M}$ 是 $\mathcal{X}$- 复形 [3], 记为 $\widetilde{\mathcal{X}}$; 如果对任意的 $n \in \mathbb{Z}$, $M_n \in \mathcal{X}$, 则称复形 $\boldsymbol{M}$ 是 $\sharp$-$\mathcal{X}$ 复形 [4], 记为 $\widetilde{\sharp\mathcal{X}}$.

设 $\mathcal{A}$ 是一个 Abel 范畴, $\mathcal{X}$ 是 $\mathcal{A}$ 的全子范畴, $\mathbb{U}$ 是 $\mathcal{A}$ 中的一个序列. 如果对任意的 $X \in \mathcal{X}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, \mathbb{U})$ 正合($\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathbb{U}, X)$ 正合), 则称 $\mathbb{U}$ 是 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$-正合的 ($\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{X})$-正合的).

设 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 是两个模类. 如果对任意的 $X \in \mathcal{X}$, $Y \in \mathcal{Y}$, 都有$\mathrm{Ext}^{\geqslant 1}(X, Y) = 0$, 则称 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 正交, 记为$\mathcal{X} \perp \mathcal{Y}$. 特别地, 如果 $\mathcal{X} \perp \mathcal{X}$ ， 那么称 $\mathcal{X}$ 是自正交的. .

下文中, 总假定 $\mathcal{W}$ 是一个自正交的模类, 且 $\mathcal{W}$ 关于扩张封闭.

定义 1.1 [**3, 4**] 设 M 是一个模. 称 M 是 $\mathcal{W}$-Gorenstein 模, 如果存在 $\mathrm{Hom}(\mathcal{W}, -)$-正合和 $\mathrm{Hom}(-, \mathcal{W})$-正合的正合序列:

$$\cdots \longrightarrow W_1 \longrightarrow W_0 \longrightarrow W^0 \longrightarrow W^1 \longrightarrow \cdots,$$

其中 $W_i, W^i \in \mathcal{W}$, 使得 $M \cong \mathrm{Im}(W_0 \longrightarrow W^0)$.

$\mathcal{W}$-Gorenstein 模的类记为 $\mathcal{G}(\mathcal{W})$.

定义 1.2 [5] 称模 M 是右 $\mathcal{W}$-Gorenstein 模, 如果存在 $\mathrm{Hom}(-,\mathcal{W})$-正合的正合序列:

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow W^0 \longrightarrow W^1 \longrightarrow \cdots$$

其中 $W^i \in \mathcal{W}$. 对偶地, 称模 M 是左 $\mathcal{W}$-Gorenstein 模, 如果存在 $\mathrm{Hom}(\mathcal{W},-)$-正合的正合序列:

$$\cdots \longrightarrow W_1 \longrightarrow W_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

其中 $W_i \in \mathcal{W}$.

右 $\mathcal{W}$-Gorenstein 模的类记为 $r\mathcal{G}(\mathcal{W})$, 左 $\mathcal{W}$-Gorenstein 模的类记为 $l\mathcal{G}(\mathcal{W})$. 右 $\mathcal{W}$-Gorenstein 模和左 $\mathcal{W}$-Gorenstein 模统称为单边 Gorenstein 模. 由 ([4],命题 2.4) 知 $\mathcal{G}(\mathcal{W})$=$r\mathcal{G}(\mathcal{W}) \cap l\mathcal{G}(\mathcal{W})$.

定义 1.3 [8] 称复形 $\boldsymbol{M}$ 是 $\mathcal{W}$-Gorenstein 的, 如果存在 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\widetilde{\mathcal{W}},-)$-正合和 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,\widetilde{\mathcal{W}})$-正合的正合序列:

$$\cdots \longrightarrow \boldsymbol{W}_1 \longrightarrow \boldsymbol{W}_0 \longrightarrow \boldsymbol{W}^0 \longrightarrow \boldsymbol{W}^1 \longrightarrow \cdots,$$

其中 $\boldsymbol{W}^i \in \widetilde{\mathcal{W}}$, 使得 $\boldsymbol{M} \cong \mathrm{Im}(\boldsymbol{W}_0 \longrightarrow \boldsymbol{W}^0)$.

$\mathcal{W}$-Gorenstein 复形的类记为 $\mathcal{G}(\widetilde{\mathcal{W}})$.

3. 单边 Gorenstein 复形范畴

定义 2.1 设 $\boldsymbol{M}$ 是一个复形. 称 $\boldsymbol{M}$ 是右 $\mathcal{W}$-Gorenstein 复形, 如果存在 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,\widetilde{\mathcal{W}})$-正合的复形的正合序列:

$$0 \longrightarrow \boldsymbol{M} \longrightarrow \boldsymbol{W}^0 \longrightarrow \boldsymbol{W}^1 \longrightarrow \cdots$$

其中 $\boldsymbol{W}^i \in \widetilde{\mathcal{W}}$.

定义 2.2 设 $\boldsymbol{M}$ 是一个复形. 称 $\boldsymbol{M}$ 是左 $\mathcal{W}$-Gorenstein 复形, 如果存在 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\widetilde{\mathcal{W}},-)$-正合的复形的正合序列:

$$\cdots \longrightarrow \boldsymbol{W}_1 \longrightarrow \boldsymbol{W}_0 \longrightarrow \boldsymbol{M} \longrightarrow 0$$

其中 $\boldsymbol{W}_i \in \widetilde{\mathcal{W}}$.

右 $\mathcal{W}$-Gorenstein 复形的类记为 $r\mathcal{G}(\widetilde{\mathcal{W}})$, 左 $\mathcal{W}$-Gorenstein 复形的类记为 $l\mathcal{G}(\widetilde{\mathcal{W}})$. 右 $\mathcal{W}$-Gorenstein 复形和左 $\mathcal{W}$-Gorenstein 复形统称为单边 Gorenstein 复形.

注 2.3 (1) $\mathcal{W}$-复形是左 $\mathcal{W}$-Gorenstein 复形也是右 $\mathcal{W}$-Gorenstein 复形.
(2) $\mathcal{G}(\widetilde{\mathcal{W}})$=$r\mathcal{G}(\widetilde{\mathcal{W}}) \cap l\mathcal{G}(\widetilde{\mathcal{W}})$.
(3) 当 $\mathcal{W}$ 取投射模的类时, $r\mathcal{G}$ $(\widetilde{\mathcal{W}})$ 为 Gorenstein 投射复形的类 [6], $l\mathcal{G}(\widetilde{\mathcal{W}}) = \mathcal{C}$.
(4) 当 $\mathcal{W}$ 取内射模的类时, $l\mathcal{G}$ $(\widetilde{\mathcal{W}})$ 为 Gorenstein 内射复形的类 [6], $r\mathcal{G}(\widetilde{\mathcal{W}}) = \mathcal{C}$.

(5) 设 ${}_SC_R$ 是左 S-右 R 的半对偶化双模. 当 $\mathcal{W}=\mathcal{P}_C(S)$ 时, $r\mathcal{G}(\widetilde{\mathcal{W}})$ 为 G_C-投射复形的类 [10]; 当 $\mathcal{W}=\mathcal{I}_C(R)$ 时, $l\mathcal{G}(\widetilde{\mathcal{W}})$ 为 G_C-内射复形的类 [10].

以下, 我们只研究右 $\mathcal{W}$-Gorenstein 复形, 对左 $\mathcal{W}$-Gorenstein 复形有完全对偶的结果.

下面的引理给出了 $\mathrm{Ext}^1_{dw}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{N})$ 与 Hom 复形 $\mathrm{Hom}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{N})$ 之间的联系.

引理 2.4 ([11], 引理 2.1)　设 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 是复形, 则有

$$\mathrm{Ext}^1_{dw}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{N}[-n-1])\cong \mathrm{H}_n(\mathrm{Hom}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{N}))=\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{N}[-n])/\sim,$$

其中 $\sim$ 是链同伦. 特别地, $\mathrm{Hom}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{N})$ 是正合的当且仅当对任意的 $n\in\mathbb{Z}$, 态射 $f:\boldsymbol{M}[n]\longrightarrow\boldsymbol{N}$ 同伦于 0.

引理 2.5 ([11], 引理 3.1)　设 $\boldsymbol{M}$ 是一个复形, N 是一个模, 则有以下自然同构:
(1) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\overline{N}[n],\boldsymbol{M})\cong\mathrm{Hom}(N,\boldsymbol{M}_{n+1})$.
(2) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{M},\overline{N}[n])\cong\mathrm{Hom}(\boldsymbol{M}_n,N)$.
(3) $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}}(\overline{N}[n],\boldsymbol{M})\cong\mathrm{Ext}^1(N,\boldsymbol{M}_{n+1})$.
(4) $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{M},\overline{N}[n])\cong\mathrm{Ext}^1(\boldsymbol{M}_n,N)$.

引理 2.6 ([12], 引理 4.4)　设 $\mathcal{X},\mathcal{Y}$ 是两个模类. 如果 $\mathcal{Y}\perp\mathcal{Y}$, 则下面的结论成立:
(1) $\mathcal{X}\perp\mathcal{Y}$ 当且仅当 $\sharp\widetilde{\mathcal{X}}\perp\widetilde{\mathcal{Y}}$.
(2) $\mathcal{Y}\perp\mathcal{X}$ 当且仅当 $\widetilde{\mathcal{Y}}\perp\sharp\widetilde{\mathcal{X}}$.

由引理 2.6, 2.4 和 ([5], 定义 3.1), 有如下结论.

推论 2.7　设 $\boldsymbol{M}$ 是一个复形. 如果 $\forall n\in\mathbb{Z}$, $\boldsymbol{M}_n\in r\mathcal{G}(\mathcal{W})$, 则 $\mathrm{Hom}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{W})$ 正合, 其中 $\boldsymbol{W}\in\widetilde{\mathcal{W}}$.

引理 2.8　设

$$\cdots\longrightarrow\boldsymbol{M}_{-1}\longrightarrow\boldsymbol{M}_0\longrightarrow\boldsymbol{M}_1\longrightarrow\cdots$$

是一个 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,\widetilde{\mathcal{W}})$-正合的复形的正合序列. 则对任意的 $n\in\mathbb{Z}$, 序列

$$\cdots\longrightarrow(\boldsymbol{M}_{-1})_n\longrightarrow(\boldsymbol{M}_0)_n\longrightarrow(\boldsymbol{M}_1)_n\longrightarrow\cdots$$

是 $\mathrm{Hom}(-,\mathcal{W})$-正合的.

证明　设 $W\in\mathcal{W}$, $n\in\mathbb{Z}$. 则 $\overline{W}[n]\in\widetilde{\mathcal{W}}$. 从而有正合列

$$\cdots\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{M}_1,\overline{W}[n])\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{M}_0,\overline{W}[n])\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{M}_{-1},\overline{W}[n])\longrightarrow\cdots.$$

由引理 2.5 (2) 得正合列

$$\cdots\longrightarrow\mathrm{Hom}((\boldsymbol{M}_1)_n,W)\longrightarrow\mathrm{Hom}((\boldsymbol{M}_0)_n,W)\longrightarrow\mathrm{Hom}((\boldsymbol{M}_{-1})_n,W)\longrightarrow\cdots.$$

结论得证.

下面我们给出本文中的主要结论.

定理 2.9 设 $\boldsymbol{M}$ 是一个复形. 则 $\boldsymbol{M}$ 是右 $\mathcal{W}$-Gorenstein 复形当且仅当对任意的 $n \in \mathbb{Z}$, $\boldsymbol{M}_n$ 是右 $\mathcal{W}$-Gorenstein 模.

证明 $\Longrightarrow$) 设 $\boldsymbol{M} \in r\mathcal{G}(\widetilde{\mathcal{W}})$, 则存在 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, \widetilde{\mathcal{W}})$-正合的复形的正合序列:

$$0 \longrightarrow \boldsymbol{M} \longrightarrow \boldsymbol{W}^0 \longrightarrow \boldsymbol{W}^1 \longrightarrow \cdots$$

其中 $\boldsymbol{W}^i \in \widetilde{\mathcal{W}}$. 由引理 2.8, 我们有 $\mathrm{Hom}(-, \mathcal{W})$-正合的正合序列:

$$0 \longrightarrow \boldsymbol{M}_n \longrightarrow (\boldsymbol{W}^0)_n \longrightarrow (\boldsymbol{W}^1)_n \longrightarrow \cdots$$

其中 $(\boldsymbol{W}^i)_n \in \mathcal{W}$. 于是可得 $\boldsymbol{M}_n \in r\mathcal{G}(\mathcal{W})$.

$\Longleftarrow$) 设对任意的 $n \in \mathbb{Z}$, $\boldsymbol{M}_n \in r\mathcal{G}(\mathcal{W})$. 设 $n \in \mathbb{Z}$, 则由([5],引理3.5)知存在正合列:

$$0 \longrightarrow \boldsymbol{M}_n \xrightarrow{g_n} W_n \longrightarrow G_n \longrightarrow 0$$

其中 $W_n \in \mathcal{W}$, $G_n \in r\mathcal{G}(\mathcal{W})$. 于是有短正合列:

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \overline{\boldsymbol{M}_n}[n-1] \xrightarrow{\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \overline{g_n}[n-1]} \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \overline{W_n}[n-1] \longrightarrow \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \overline{G_n}[n-1] \longrightarrow 0.$$

令 $\boldsymbol{W}^0 = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \overline{W_n}[n-1]$. 显然 $\boldsymbol{W}^0 \in \widetilde{\mathcal{W}}$. 另一方面, 考虑层次可裂的正合列:

$$0 \longrightarrow \boldsymbol{M} \longrightarrow \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \overline{\boldsymbol{M}_n}[n-1] \xrightarrow{(d,1)} \boldsymbol{M}[-1] \longrightarrow 0,$$

其中 d 是 $\boldsymbol{M}$ 的微分. 令 $\beta: \boldsymbol{M} \longrightarrow \boldsymbol{W}^0$为下列两个态射的合成:

$$\boldsymbol{M} \longrightarrow \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \overline{\boldsymbol{M}_n}[n-1] \xrightarrow{\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \overline{g_n}[n-1]} \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \overline{W^n}[n-1].$$

则 β 是单态射. 令 $\boldsymbol{C}^0$=Cokerβ, 则由蛇引理有短正合列:

$$0 \longrightarrow \boldsymbol{M}[-1] \longrightarrow \boldsymbol{C}^0 \longrightarrow \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \overline{G_n}[n-1] \longrightarrow 0.$$

因为 $\boldsymbol{M}[-1]$ 和 $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \overline{G_n}[n-1]$ 每个层次的模是右 $\mathcal{W}$-Gorenstein 模, 所以由([5],命题3.3) 知, $(\boldsymbol{C}^0)_n \in r\mathcal{G}(\mathcal{W})$.

设 $\boldsymbol{W}\in\widetilde{\mathcal{W}}$. 则对任意的 $k\in\mathbb{Z}$ 有正合列

$$0\longrightarrow Z_k(\boldsymbol{W})\longrightarrow \boldsymbol{W}_k\longrightarrow Z_{k-1}(\boldsymbol{W})\longrightarrow 0.$$

于是对任意的 $n\in\mathbb{Z}$ 有

$$0=\mathrm{Ext}^1((\boldsymbol{C}^0)_{n+k},Z_k(\boldsymbol{W}))\longrightarrow \mathrm{Ext}^1((\boldsymbol{C}^0)_{n+k},\boldsymbol{W}_k)\longrightarrow \mathrm{Ext}^1((\boldsymbol{C}^0)_{n+k},Z_{k-1}(\boldsymbol{W}))=0.$$

因此 $\mathrm{Ext}^1((\boldsymbol{C}^0)_{n+k},\boldsymbol{W}_k)=0$. 因此有正合列

$$0\longrightarrow \mathrm{Hom}((\boldsymbol{C}^0)_{n+k},\boldsymbol{W}_k)\longrightarrow \mathrm{Hom}((\boldsymbol{W}^0)_{n+k},\boldsymbol{W}_k)\longrightarrow \mathrm{Hom}(\boldsymbol{M}_{n+k},\boldsymbol{W}_k)\longrightarrow 0.$$

从而有复形的正合列

$$0\longrightarrow \mathrm{Hom}(\boldsymbol{C}^0,\boldsymbol{W})\longrightarrow \mathrm{Hom}(\boldsymbol{W}^0,\boldsymbol{W})\longrightarrow \mathrm{Hom}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{W})\longrightarrow 0.$$

由推论 2.7, $\mathrm{Hom}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{W})$ 正合. 由引理 2.6 和引理 2.4 可知 $\mathrm{Hom}(\boldsymbol{W}^0,\boldsymbol{W})$ 正合. 因此 $\mathrm{Hom}(\boldsymbol{C}^0,\boldsymbol{W})$ 正合. 于是由引理 2.4 知 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{C}^0,\boldsymbol{W})=0$. 故序列

$$0\longrightarrow \boldsymbol{M}\longrightarrow \boldsymbol{W}^0\longrightarrow \boldsymbol{C}^0\longrightarrow 0$$

是 $\mathrm{Hom}(-,\widetilde{\mathcal{W}})$-正合的. 注意到 $\boldsymbol{C}^0$ 与 $\boldsymbol{M}$ 有相同的性质, 所以重复上述过程可得 $\mathrm{Hom}(-,\widetilde{\mathcal{W}})$-正合的复形的正合序列

$$0\longrightarrow \boldsymbol{M}\longrightarrow \boldsymbol{W}^0\longrightarrow \boldsymbol{W}^1\longrightarrow \boldsymbol{W}^2\longrightarrow \dots,$$

其中 $\boldsymbol{W}^i\in\widetilde{\mathcal{W}}$. 故 $\boldsymbol{M}$ 是右 $\mathcal{W}$-Gorenstein 复形.

下面我们应用定理 2.9 给出右 $\mathcal{W}$-Gorenstein 复形的一些性质.

推论 2.10 设 $0\longrightarrow \boldsymbol{M}_1\longrightarrow \boldsymbol{M}_2\longrightarrow \boldsymbol{M}_3\longrightarrow 0$ 是复形的短正合列.
(1) 如果 $\boldsymbol{M}_1,\boldsymbol{M}_3\in r\mathcal{G}(\widetilde{\mathcal{W}})$, 则 $\boldsymbol{M}_2\in r\mathcal{G}(\widetilde{\mathcal{W}})$;
(2) 如果 $\boldsymbol{M}_1,\boldsymbol{M}_2\in r\mathcal{G}(\widetilde{\mathcal{W}})$, 则 $\boldsymbol{M}_3\in r\mathcal{G}(\widetilde{\mathcal{W}})$ 当且仅当对任意的 $\boldsymbol{W}\in\widetilde{\mathcal{W}}$, $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{M}_3,\boldsymbol{W})=0$.

证明 (1) 设 $\boldsymbol{M}_1,\boldsymbol{M}_3\in r\mathcal{G}(\widetilde{\mathcal{W}})$, 则对任意的 $n\in\mathbb{Z}$, 有正合序列

$$0\longrightarrow (\boldsymbol{M}_1)_n\longrightarrow (\boldsymbol{M}_2)_n\longrightarrow (\boldsymbol{M}_3)_n\longrightarrow 0. \qquad (*)$$

由定理 2.9 知 $(\boldsymbol{M}_1)_n$ 和 $(\boldsymbol{M}_3)_n$ 是右 $\mathcal{W}$-Gorenstein 模, 所以由([5],命题3.3) 知 $(\boldsymbol{M}_2)_n$ 也是右 $\mathcal{W}$-Gorenstein 模. 于是由定理 2.9 知 $\boldsymbol{M}_2$ 是右 $\mathcal{W}$-Gorenstein 复形.

(2) 必要性由引理 2.6 和右 $\mathcal{W}$-Gorenstein 模的定义可得. 下证充分性.

设 $n\in\mathbb{Z}$. 因为 $\boldsymbol{M}_1,\boldsymbol{M}_2\in r\mathcal{G}(\widetilde{\mathcal{W}})$, 所以由定理 2.9 知$(\boldsymbol{M}_1)_n$ 和 $(\boldsymbol{M}_2)_n$ 是右 $\mathcal{W}$-Gorenstein 模. 设 $W\in\mathcal{W}$, 则由条件和引理2.5(4) 知 $\mathrm{Ext}^1((\boldsymbol{M}_3)_n,W)=0$. 于是由([5],命题3.6) 知 $(\boldsymbol{M}_3)_n$ 是右

$\mathcal{W}$-Gorenstein 模. 从而由定理 2.9 可知 $\boldsymbol{M}_3 \in r\mathcal{G}(\widetilde{\mathcal{W}})$.

推论 2.11 $r\mathcal{G}(\widetilde{\mathcal{W}})$ 关于直和项封闭.

证明 由定理 2.9 及 $r\mathcal{G}(\mathcal{W})$ 关于直和项封闭可得, 见([5],命题3.3).

推论 2.12 设 $\boldsymbol{M}$ 是一个复形, 则下列叙述等价:

(1) $\boldsymbol{M} \in r\mathcal{G}(\widetilde{\mathcal{W}})$.

(2) 对任意满足条件 $\widetilde{\mathcal{W}} \subseteq \mathcal{X}$ 的复形类 $\mathcal{X}$, 存在右 $\mathcal{W}$-Gorenstein 复形的 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,\mathcal{X})$-正合的正合序列$0 \longrightarrow \boldsymbol{M} \longrightarrow \boldsymbol{G}^0 \longrightarrow \boldsymbol{G}^1 \longrightarrow \cdots$.

(3) 存在右 $\mathcal{W}$-Gorenstein 复形的 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,\widetilde{\mathcal{W}})$- 正合的正合序列$0 \longrightarrow \boldsymbol{M} \longrightarrow \boldsymbol{G}^0 \longrightarrow \boldsymbol{G}^1 \longrightarrow \cdots$.

证明 (1) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (3) 显然.

(3) $\Rightarrow$ (1) 设存在右 $\mathcal{W}$-Gorenstein 复形的 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,\widetilde{\mathcal{W}})$-正合的正合序列$0 \longrightarrow \boldsymbol{M} \longrightarrow \boldsymbol{G}^0 \longrightarrow \boldsymbol{G}^1 \longrightarrow \cdots$. 则对任意的 $n \in \mathbb{Z}$, 由引理 2.8 和定理 2.9 知存在 $\mathrm{Hom}(-,\mathcal{W})$-正合的正合序列

$$0 \longrightarrow \boldsymbol{M}_n \longrightarrow (\boldsymbol{G}^0)_n \longrightarrow (\boldsymbol{G}^1)_n \longrightarrow \cdots,$$

其中 $(\boldsymbol{G}^i)_n \in r\mathcal{G}(\mathcal{W})$. 由([5], 定理3.7)知每个 $\boldsymbol{M}_n \in r\mathcal{G}(\mathcal{W})$. 因此由定理 2.9 知 $\boldsymbol{M} \in r\mathcal{G}(\widetilde{\mathcal{W}})$.

基金项目

国家自然科学基金资助项目(11861055，12061061)。

参考文献

[1] Auslander, M. and Bridger, M. (1969) Stable Module Theory. Memoirs of the American Mathematical Society, Providence, RI. https://doi.org/10.1090/memo/0094

[2] Enoch, E.E. and Jenda, O.M.G. (1995) Gorenstein Injective and Projective Modules. *Mathematische Zeitschrift*, **220**, 611-633. https://doi.org/10.1007/BF02572634

[3] Sather-Wagstaff, S., Sharif, T. and White, D. (2008) Stability of Gorenstein Categories. *Journal of the London Mathematical Society*, **77**, 481-502. https://doi.org/10.1112/jlms/jdm124

[4] Geng, Y.X. and Ding, N.Q. (2011) $\mathcal{W}$-Gorenstein Modules. *Journal of Algebra*, **325**, 132-146. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2010.09.040

[5] Song, W.L., Zhao, T.W. and Huang, Z.Y. (2020) One-Sided Gorenstein Subcategories. *Czechoslovak Mathematical Journal*, **70**, 483-504. https://doi.org/10.21136/CMJ.2019.0385-18

[6] Enochs, E.E. and GarcÍa Rozas, J.R. (1998) Gorenstein Injective and Projective Complexes. *Communications in Algebra*, **26**, 1657-1674. https://doi.org/10.1080/00927879808826229

[7] Yang, G. (2011) Gorenstein Projective, Injective and Flat Complexes. *Acta Mathematica Sinica (Chinese Series)*, **54**, 451-460.

[8] Xin, D.W., Chen, J.L. and Zhang, X.X. (2013) Completely $\mathscr{W}$-Resolved Complexes. *Communications in Algebra*, **41**, 1094-1106. https://doi.org/10.1080/00927872.2011.630707

[9] Holm, H. and White D. (2007) Foxby Equivalence over Associative Rings. *Journal of Mathematics of Kyoto University*, **47**, 781-808. https://doi.org/10.1215/kjm/1250692289

[10] Yang, C.H. and Liang, L. (2012) Gorenstein Injective and Projective Complexes with Respect to a Semidualizing Module. *Communications in Algebra*, **40**, 3352-3364. https://doi.org/10.1080/00927872.2011.568030

[11] Gillespie, J. (2004) The Flat Model Structure on Ch(R). *Transactions of the American Mathematical Society*, **356**, 3369-3390. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-04-03416-6

[12] Liang, L., Ding, N.Q. and Yang, G. (2014) Some Remarks on Projective Generators and Injective Cogenerators. *Acta Mathematica Sinica (English Series)*, **30**, 2063-2078. https://doi.org/10.1007/s10114-014-3227-z