Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(1), 109-116
Published Online January 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.121015

形式三角矩阵环上的Gorenstein AC-投射维数

李帮禹，杨晓燕

西北师范大学，数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2021年12月8日；录用日期：2022年1月14日；发布日期：2022年1月21日

摘 要

本文研究了形式三角矩阵环上Gorenstein AC-投射维数的问题。令$T=\begin{pmatrix} A & 0 \\ U & B \end{pmatrix}$为一个形式三角矩阵环，其中$A$和$B$为环, U为一个(B,A)-双模，$M=\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi^M}$为左$T$- 模。我们利用左$A$-模$M_1$和左$B$-模$M_2$的Gorenstein AC-投射维数，通过构造左T-模正合序列的方法给出了${}_TM$的Gorenstein AC-投射维数的刻画，进而建立了环A，环B和环T的左整体Gorenstein AC-投射维数之间的关系。作为这些结论的应用，我们刻画了环 $T(R)=\begin{pmatrix} R & 0 \\ R & R \end{pmatrix}$的左整体Gorenstein AC- 投射维数及该环上左模的Gorenstein AC-投射维数。

关键词

形式三角矩阵环，Gorenstein AC-投射模，Level模，Gorenstein AC-投射维数，左整体Gorenstein AC-投射维数

Gorenstein AC-Projective Dimensions over Formal Triangular Matrix Rings

Bangyu Li, Xiaoyan Yang

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

文章引用: 李帮禹, 杨晓燕. 形式三角矩阵环上的Gorenstein AC-投射维数[J]. 理论数学, 2022, 12(1): 109-116.
DOI: 10.12677/pm.2022.121015

Received: Dec. 8th, 2021; accepted: Jan. 14th, 2022; published: Jan. 21st, 2022

Abstract

This paper considers Gorenstein AC-projective dimensions over formal triangular matrix rings. Let $T = \begin{pmatrix} A & 0 \\ U & B \end{pmatrix}$ be a formal triangular matrix ring, where A and B are rings and U is a (B, A)-bimodule, and let $M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi^M}$ be a left T-module. By constructing exact sequences, we characterize Gorenstein AC-projective dimensions of a left T-module ${}_TM$ with Gorenstein AC-projective dimensions of left A-module M_1 and left B-module M_2. Moreover, we establish a relationship of left global Gorenstein AC-projective dimensions of ring T and A, B. As an application of above conclusions, left global Gorenstein AC-projective dimension of the ring $T(R) = \begin{pmatrix} R & 0 \\ R & R \end{pmatrix}$ and Gorenstein AC-projective dimension of the left $T(R)$-module are described.

Keywords

Formal Triangular Matrix Ring, Gorenstein AC Projective Module, Level Module, Gorenstein AC-Projective Dimension, Left Global Gorenstein AC-Projective Dimension

1. 引言

Gorenstein同调理论的研究内容近些年来一直受到相对同调代数领域学者们的广泛关注. 它起源于1969年Auslander和Brigder为双边Noetherian环上的有限生成模引入的G-维数的概念(见 [1]). Enochs和Jenda沿着Auslander和Brigder的思路引入了Gorenstein投射和内射模的概念(见 [2]). 在 [3] [4]中, Ding等分别研究了Gorenstein投射和内射模的特殊情况: Gorenstein平坦和Gorenstein FP-内射模. 类似于Noetherian环上的Gorenstein投射和内射模, 这两种模在凝聚环上有很多优美的性质(见 [3–7]). 因Ding和Chen的杰出工作, Gillespie 分别将它们命名为Ding 投射和Ding内射模(见 [5]). 而后, Bravo 等为了进一步研究一般环上的Gorenstein同调代数, 引入并研究了Gorenstein AC-投射和Gorenstein AC-内射模(见 [8]).

设A, B为环, U为(B,A)-双模, $T=\begin{pmatrix} A & 0\\ U & B\end{pmatrix}$. 取$T$上的加法和乘法为一般的矩阵加法和乘法, 这时$T$形成一个环, 我们称之为*形式三角矩阵环*. 作为一种非交换环, 形式三角矩阵环在代数表示论和环理论中起重要作用. 近些年来, 众多专家学者对形式三角矩阵环上模的同调性质进行了研究, 并取得了许多成果：如Zhang描述了Artin三角矩阵环上的Gorenstein投射模(见 [9]), Li 等在 [10]中刻画了形式三角矩阵环的Gorenstein投射模, 2019年, Mao 研究了形式三角矩阵环上的Ding模 [11], 而后Mou等给出了一定条件下形式三角矩阵环上Gorenstein AC-投射模的等价刻画(见 [12]).2016年, Zhu等描述了三角矩阵环上模的Gorenstein同调维数(见 [13]), 在 [11]中, Mao给出了三角矩阵环和其上模的Ding投射维数的如下刻画:

$$max\{\mathrm{Dpd}({}_AM_1),\mathrm{Dpd}({}_BM_2)\}\le \mathrm{Dpd}({}_TM)\le max\{\mathrm{Dpd}({}_AM_1)+1,\mathrm{Dpd}({}_BM_2)\}.$$

以及与之对偶的Ding内射维数的刻画.

受上述研究的启发, 本文提出了构造Gorenstein AC-投射模和Gorenstein AC-投射正合序列的新方法, 并针对形式三角矩阵环上的Gorenstein AC- 投射维数这一未被解决的问题做出了创新性研究. 证明了若B的整体Gorenstein AC-投射维数有限, U_A为有限生成投射模, ${}_BU$ 为投射模, 对于左T-模 $M=\begin{pmatrix} M_1\\ M_2\end{pmatrix}_{\varphi^M}$, 我们有Gorenstein AC-投射维数的如下关系:

$$max\{\mathrm{G_{AC}pd}({}_AM_1),\mathrm{G_{AC}pd}({}_BM_2)\}\le \mathrm{G_{AC}pd}({}_TM)\le max\{\mathrm{G_{AC}pd}({}_AM_1)+1,\mathrm{G_{AC}pd}({}_BM_2)\}.$$

进而, 若$B\neq 0$, 则环T,A,B的左整体Gorenstein AC-投射维数间有如下关系:

$$max\{\mathrm{lG_{AC}PD}(A),\mathrm{lG_{AC}PD}(B),1\}\le \mathrm{lG_{AC}PD}(T)\le max\{\mathrm{lG_{AC}PD}(A)+1,\mathrm{lG_{AC}PD}(B)\}.$$

2. 预备知识

本文中所有环均为有单位元的非零结合环, 所有模均为酉模. 对于环R, 我们用R-Mod (Mod-R)表示左(右) R-模范畴, 用${}_RM$ (M_R) 表示一个左(右)R-模.我们用$pd(M)$, $id(M)$ 和$fd(M)$分别表示模M 的投射, 内射和平坦维数, 用$\mathrm{G_{AC}pd}({}_RM)$表示左R-模M的Gorenstein AC-投射维数.并用$\mathrm{lG_{AC}PD}(R)$和$\mathrm{lLID}(R)$分别表示环R的左整体Gorenstein AC-投射维数和左整体Level内射维数.

若左R-模F有投射分解$\cdots\to P_2\to P_1\to P_0\to F\to 0$使得其中所有投射左$R$-模$P_i$均为有限生成模, 则称$F$为*超有限表示模*. 若左$R$-模$L$对任意超有限表示右$R$-模$F$均有$\mathrm{Tor}_1^R(F,L)=0$, 则称$L$为*Level*模. 对于环$R$和所有左$R$-模${}_RX$,我们定义$\mathrm{lLID}(R)=\sup\{id({}_RX)\mid_R X$为任意Level左$R$-模$\}$为环$R$的*左整体Level 内射维数*.

考虑投射左R-模的正合列$\mathbb{P}:\cdots\to P_1\to P_0\to P^0\to P^1\to\cdots$, 其中$M\cong \mathrm{Ker}(P^0\to P^1)$, 若对于任意Level左$R$-模$L$, 均有$\mathrm{Hom}_R(\mathbb{P},L)$正合, 我们称$M$为*Gorenstein AC-投射模*. 对于左R-模X,定义$\mathrm{G_{AC}pd}({}_RX)=\inf\{n|$ 存在左R-模正合列$0\to G_n\to\cdots\to G_1\to G_0\to X\to 0$, 其中所有$G_i$均为Gorenstein AC-投射模$\}$为X的*Gorenstein AC-投射维数*. 若满足条件的n不存在, 则令$\mathrm{G_{AC}pd}({}_RX)=\infty$; 定义$\mathrm{lG_{AC}PD}(R)=\sup\{\mathrm{G_{AC}pd}({}_RX)\mid X$ 为任意左R-模$\}$为环R的左整体Gorenstein AC-投射维数.

$T=\begin{pmatrix}A & 0\\ U & B\end{pmatrix}$表示一个形式三角矩阵环, 其中$A$和$B$为环, U为一个(B,A)- 双模. 由 [14][定理1.5]可知, 范畴T-Mod等价于范畴Ω, 其对象为三元组 $M=\begin{pmatrix}M_1\\ M_2\end{pmatrix}_{\varphi^M}$, 其中$M_1\in A$-Mod, $M_2\in B$-Mod, $\varphi^M: U\otimes_A M_1\to M_2$为一个$B$-同态; Ω中态射为由$\begin{pmatrix}M_1\\ M_2\end{pmatrix}_{\varphi^M}$到$\begin{pmatrix}N_1\\ N_2\end{pmatrix}_{\varphi^N}$的$\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\end{pmatrix}$, 其中$f_1\in \mathrm{Hom}_A(M_1,N_1)$, $f_2\in\mathrm{Hom}_B(M_2,N_2)$, 且满足下图交换.

$$\begin{tikzcd}
U\otimes_A M_1 \arrow[r, "1\otimes f_1"] \arrow[d, "\varphi^M"'] & U\otimes_A N_1 \arrow[d, "\varphi^N"] \\
M_2 \arrow[r, "f_2"] & N_2.
\end{tikzcd}$$

可以发现, 左T-模序列 $0\to\begin{pmatrix}M_1'\\ M_2'\end{pmatrix}_{\varphi^{M'}}\to\begin{pmatrix}M_1\\ M_2\end{pmatrix}_{\varphi^M}\to\begin{pmatrix}M_1''\\ M_2''\end{pmatrix}_{\varphi^{M''}}\to 0$正合当且仅当左$A$-模序列$0\to M_1'\to M_1\to M_1''\to 0$和左$B$-模序列$0\to M_2'\to M_2\to M_2''\to 0$ 均正合.

3. 主要结果

我们先给出以下引理, 为主要结果的证明做好铺垫.

引理3.1. [12] [定理1] *若 $T=\begin{pmatrix}A & 0\\ U & B\end{pmatrix}$为形式三角矩阵环, 其中$A$和$B$为环, ${}_BU$平坦, U_A为有限生成投射模, 则有下述命题等价:*

(1) 左T-模 $M=\begin{pmatrix}M_1\\ M_2\end{pmatrix}_{\varphi^M}$ 为Gorenstein AC- 投射模.

(2) M_1为Gorenstein AC-投射左A-模, $M_2/\mathrm{im}(\varphi^M)$为Gorenstein AC-投射左B-模, B同态$\varphi^M: U\otimes_A M_1\to M_2$为单同态.

进一步, $U\otimes_A M_1$为Gorenstein AC-投射左B-模当且仅当M_2为Gorenstein AC-投射左B-模.

引理3.2. [15] [引理2.2.1] *对于左R-模, 下述命题等价:*

(1) $\mathrm{G_{AC}pd}({}_RM)\le n$.

(2) 如果对任意左R-模正合序列$0\to K_n\to P_{n-1}\to\cdots\to P_1\to P_0\to M\to 0$, 其中每个$P_i$均为Gorenstein AC-投射左R-模, 那么K_n为Gorenstein AC-投射左R-模.

下述两条引理分别给出了环R的左整体Level内射维数和左整体Gorenstein AC-投射维数间的大小关系, 以及左B-模$U\otimes_A P$是投射左B-模的一个充分条件.

引理3.3. *若R为环, 则有$\mathrm{lLID}(R)\le \mathrm{lG_{AC}PD}(R)$.*

Proof. 设$\mathrm{lG_{AC}PD}(R)=n<\infty$.则对任意左$R$-模$M$, 存在左$R$-模正合列$0\to G_n\to G_{n-1}\to\cdots\to G_1\to G_0\to M\to 0$, 其中所有$G_i$均为Gorenstein AC-投射左R-模. 任取Level左R-

模L. 因为G_n为Gorenstein AC-投射左R模, 所以必存在$\mathrm{Hom}_R(-,L)$-正合的投射左R-模正合列$\cdots \to P^2 \to P^1 \to P^0 \to G_n \to 0$. 故对任意$i \geq 1$,有$\mathrm{Ext}_R^{n+i}(M,L) \cong \mathrm{Ext}_R^i(G_n,L) = 0$,由此可得$id({}_RL) \leq n$, 即有$\mathrm{lLID}(R) \leq \mathrm{lG_{AC}PD}(R) = n$. □

引理3.4. *若U为投射左B-模, P为投射左A-模, 则$U \otimes_A P$为投射左B-模.*

Proof. 因为U为投射左B-模, P为投射左A-模, 所以$\mathrm{Hom}_A(P,-)$, $\mathrm{Hom}_B(U,-)$均为正合函子, 故而它们的复合函子$\mathrm{Hom}_A(P, \mathrm{Hom}_B(U,-))$亦正合. 由伴随同构定理, 有函子$\mathrm{Hom}_B(U \otimes_A P,-)$正合, 故$U \otimes_A P$为投射左$B$-模. □

引理3.5. *设$\mathrm{lG_{AC}PD}(B) < \infty$, U_A的平坦维数有限, ${}_BU$为投射模. 若X为Gorenstein AC-投射左A-模, 则$U \otimes_A X$为Gorenstein AC-投射左B-模.*

Proof. 因为X为Gorenstein AC-投射左A-模,所以存在投射左A模的正合列

$$\Lambda : \cdots \to P^{-1} \to P^0 \to P^1 \to P^2 \to \cdots$$

使得${}_AX = \ker(P^0 \to P^1)$. 因为${}_BU$投射, 由引理3.4, 可得到$U \otimes_A P^i$均为投射左$B$-模. 又因为$fd(U_A) < \infty$, 所以可由 [16] [引理2.3]得到投射左$B$-模的正合列

$$U \otimes_A \Lambda : \cdots \to U \otimes_A P^{-1} \to U \otimes_A P^0 \to U \otimes_A P^1 \to U \otimes_A P^2 \to \cdots$$

使得左B-模$U \otimes_A X \cong \ker(U \otimes_A P^0 \to U \otimes_A P^1)$. 由引理3.3, 对所有Level左$B$-模$L$, 有$id({}_BL) < \infty$. 故由 [16] [引理2.4]有$\mathrm{Hom}_B(U \otimes_A \Lambda, L)$正合. 即有$U \otimes_A X$为Gorenstein AC-投射左B-模. □

下面给出本文的主要结果.

定理3.6. 设$\mathrm{lG_{AC}PD}(B) < \infty$, *$U_A$为有限生成投射模, ${}_BU$为投射模. 则对于左T-模 $M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi^M}$, 有*

$$max\{\mathrm{G_{AC}pd}({}_AM_1), \mathrm{G_{AC}pd}({}_BM_2)\} \leq \mathrm{G_{AC}pd}({}_TM) \leq max\{\mathrm{G_{AC}pd}({}_AM_1)+1, \mathrm{G_{AC}pd}({}_BM_2)\}.$$

Proof. 首先证明$max\{\mathrm{G_{AC}pd}({}_AM_1), \mathrm{G_{AC}pd}({}_BM_2)\} \leq \mathrm{G_{AC}pd}({}_TM)$. 设$\mathrm{G_{AC}pd}({}_TM) = m < \infty$. 则有左$T$-模正合列

$$0 \to \begin{pmatrix} N_1^m \\ N_2^m \end{pmatrix}_{\varphi^m} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \partial_1^m \\ \partial_2^m \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} N_1^{m-1} \\ N_2^{m-1} \end{pmatrix}_{\varphi^{m-1}} \to \cdots \to \begin{pmatrix} N_1^0 \\ N_2^0 \end{pmatrix}_{\varphi^0} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \partial_1^0 \\ \partial_2^0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi^M} \to 0,$$

其中所有 $\begin{pmatrix} N_1^i \\ N_2^i \end{pmatrix}_{\varphi^i}$ 均为Gorenstein AC-投射左T-模. 由引理3.1, 我们得到${}_AN_1^i$和${}_B(N_2^i/\mathrm{im}(\varphi^i))$均为Gorenstein AC- 投射模. 又由引理3.5,可得$U \otimes_A N_1^i$均为Gorenstein AC-投射左B模. 继而由引理3.1,有${}_BN_2^i$均为Gorenstein AC-投射模. 故存在左A-模正合列$0 \to N_1^m \xrightarrow{\partial_1^m} N_1^{m-1} \to \cdots \to$

$N_1^0 \overset{\partial_1^0}{\to} M_1 \to 0$和左$B$模正合列$0 \to N_2^m \overset{\partial_2^m}{\to} N_2^{m-1} \to \cdots \to N_2^0 \overset{\partial_2^0}{\to} M_2 \to 0$, 由此$\mathrm{G}_{\mathrm{AC}}\mathrm{pd}({}_AM_1) \leq m$和$\mathrm{G}_{\mathrm{AC}}\mathrm{pd}({}_BM_2) \leq m$得证.

接下来证明$\mathrm{G}_{\mathrm{AC}}\mathrm{pd}({}_TM) \leq max\{\mathrm{G}_{\mathrm{AC}}\mathrm{pd}({}_AM_1)+1, \mathrm{G}_{\mathrm{AC}}\mathrm{pd}({}_BM_2)\}$.

设$max\{\mathrm{G}_{\mathrm{AC}}\mathrm{pd}({}_AM_1)+1, \mathrm{G}_{\mathrm{AC}}\mathrm{pd}({}_BM_2)\} = n < \infty$. 则存在左$A$-模正合列$0 \to C_{n-1} \overset{f_{n-1}}{\to} C_{n-2} \overset{f_{n-2}}{\to} \cdots \to C_1 \overset{f_1}{\to} C_0 \overset{f_0}{\to} M_1 \to 0$, 其中所有$C_i$均为Gorenstein AC-投射左A-模. 又有左B-模正合列$P_0 \overset{g_0}{\to} M_2 \to 0$, 其中$P_0$为投射左$B$-模. 记左$A$-模$\ker(f_{i-1})$为$K_1^i$. 显然有满同态$\pi_i : C_i \to K_1^i$, $i = 1, 2, \cdots, n-1$. 定义B-同态$h_0 : (U \otimes_A C_0) \oplus P_0 \to M_2$, 对于$u \in U, c_0 \in C_0, x_0 \in P_0$, $h_0(u \otimes c_0, x_0) = \varphi^M(u \otimes f_0(c_0)) + g_0(x_0)$. 显然$h_0$为满同态, 记左$B$-模$\ker(h_{i-1})$为$K_2^i$, 可以得到左$T$-模正合序列

$$0 \to \begin{pmatrix} K_1^1 \\ K_2^1 \end{pmatrix}_{\psi^1} \to \begin{pmatrix} C_0 \\ (U \otimes_A C_0) \oplus P_0 \end{pmatrix} \overset{\begin{pmatrix} f_0 \\ h_0 \end{pmatrix}}{\to} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi^M} \to 0.$$

同理, 存在左B-模正合列$P_1 \overset{g_1}{\to} K_2^1 \to 0$, 其中$P_1$为投射左$B$-模. 定义$B$-同态$h_1 : (U \otimes_A C_1) \oplus P_1 \to K_2^1$, 对于$u \in U, c_1 \in C_1, x_1 \in P_1$, $h_1(u \otimes c_1, x_1) = \psi^1(u \otimes \pi_1(c_1)) + g_1(x_1)$. 因为$h_1$满, 可得左$T$-模正合序列

$$0 \to \begin{pmatrix} K_1^2 \\ K_2^2 \end{pmatrix}_{\psi^2} \to \begin{pmatrix} C_1 \\ (U \otimes_A C_1) \oplus P_1 \end{pmatrix} \overset{\begin{pmatrix} \pi_1 \\ h_1 \end{pmatrix}}{\to} \begin{pmatrix} K_1^1 \\ K_2^1 \end{pmatrix}_{\psi^1} \to 0.$$

重复这个过程, 我们可得左T-模正合序列

$$0 \to \begin{pmatrix} 0 \\ K_2^{n-1} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} C_{n-1} \\ (U \otimes_A C_{n-1}) \oplus P_{n-1} \end{pmatrix} \to \cdots$$

$$\to \begin{pmatrix} C_1 \\ (U \otimes_A C_1) \oplus P_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} C_0 \\ (U \otimes_A C_0) \oplus P_0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi^M} \to 0.$$

由引理3.5, 所有$U \otimes_A C_i$均为Gorenstein AC-投射左B-模. 由 [15] [引理2.1.8] 知, Gorenstein AC-投射模类对直和封闭, 而投射左B-模P_i均为Gorenstein AC-投射模, 故所有$(U \otimes_A C_i) \oplus P_i$亦均为Gorenstein AC-投射左B-模. 又因为$\mathrm{G}_{\mathrm{AC}}\mathrm{pd}({}_BM_2) \leq n$, 所以由引理3.2可推出$K_2^{n-1}$为Gorenstein AC-投射左B-模. 故由引理3.1知, $\begin{pmatrix} 0 \\ K_2^{n-1} \end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix} C_i \\ (U \otimes_A C_i) \oplus P_i \end{pmatrix}$均为Gorenstein AC-投射左T-模. 因此$\mathrm{G}_{\mathrm{AC}}\mathrm{pd}({}_TM) \leq n$. □

由定理3.6，我们可得出以下推论.

推论3.7. 设$_BU \neq 0$是投射模，U_A为有限生成投射模．则

$$max\{\mathrm{lG_{AC}PD}(A), \mathrm{lG_{AC}PD}(B), 1\} \leq \mathrm{lG_{AC}PD}(T) \leq max\{\mathrm{lG_{AC}PD}(A)+1, \mathrm{lG_{AC}PD}(B)\}.$$

Proof. 首先我们证明$max\{\mathrm{lG_{AC}PD}(A), \mathrm{lG_{AC}PD}(B), 1\} \leq \mathrm{lG_{AC}PD}(T)$．设$\mathrm{lG_{AC}PD}(T) = m < \infty$．因$B$-同态$U \neq 0$，$\varphi^M : U \otimes A = U \to 0$不为单同态．故由引理3.1知，左$T$-模$X = \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}$不为Gorenstein AC-投射左T-模．故$m \geq \mathrm{G_{AC}pd}(_TX) \geq 1$．

任取左B-模N，由定理3.6知，$\mathrm{G_{AC}pd}(_BN) \leq \mathrm{G_{AC}pd}_T\begin{pmatrix} 0 \\ N \end{pmatrix} \leq \mathrm{lG_{AC}PD}(T) = m$．因此有$\mathrm{lG_{AC}PD}(B) \leq m$．任取左$A$-模$Y$，由定理3.6知，$\mathrm{G_{AC}pd}(_AY) \leq \mathrm{G_{AC}pd}_T\begin{pmatrix} Y \\ 0 \end{pmatrix} \leq \mathrm{lG_{AC}PD}(T) = m$．因此有$\mathrm{lG_{AC}PD}(A) \leq m$．综上，$\{\mathrm{lG_{AC}PD}(A), \mathrm{lG_{AC}PD}(B), 1\} \leq \mathrm{lG_{AC}PD}(T)$．

下面我们来证明$\mathrm{lG_{AC}PD}(T) \leq \max\{\mathrm{lG_{AC}PD}(A)+1, \mathrm{lG_{AC}PD}(B)\}$．

设$\{\mathrm{lG_{AC}PD}(A)+1, \mathrm{lG_{AC}PD}(B)\} = m < \infty$．易见$\mathrm{lG_{AC}PD}(B) < \infty$．故可由定理3.6知，对任意左$T$-模 $M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi^M}$ 有

$$\mathrm{G_{AC}pd}(_TM) \leq max\{\mathrm{G_{AC}pd}(_AM_1)+1, \mathrm{G_{AC}pd}(_BM_2)\} \leq max\{\mathrm{lG_{AC}PD}(A)+1, \mathrm{lG_{AC}PD}(B)\}.$$

因此$\mathrm{lG_{AC}PD}(T) \leq max\{\mathrm{lG_{AC}PD}(A)+1, \mathrm{lG_{AC}PD}(B)\}$． □

本文的研究对象均为环，模等较为抽象的代数结构，很难给出具体的具有数值的仿真的例子。不过作为本文方法有效性的一个说明，我们可以应用定理3.6和推论3.7给出如下推论作为示例．

推论3.8. 设R为环，$T(R) = \begin{pmatrix} R & 0 \\ R & R \end{pmatrix}$．则

(1) 若$\mathrm{lG_{AC}PD}(R) < \infty$，$M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi^M}$为左$T(R)$-模,则

$$max\{\mathrm{G_{AC}pd}(_RM_1), \mathrm{G_{AC}pd}(_RM_2)\} \leq \mathrm{G_{AC}pd}(_{T(R)}M) \leq max\{\mathrm{G_{AC}pd}(_RM_1)+1, \mathrm{G_{AC}pd}(_RM_2)\}.$$

(2) $max\{\mathrm{lG_{AC}PD}(R), 1\} \leq \mathrm{lG_{AC}PD}(T(R)) \leq \mathrm{lG_{AC}PD}(R)+1$.

参考文献

[1] Auslander, M. and Bridge, M. (1969) Stable Module Theory. In: *Memoirs of the American Mathematical Society*, No. 94, American Mathematical Society, Providence, RI.

[2] Enochs, E.E. and Jenda, O.M.G. (1995) Gorenstein Injective and Gorenstein Projective Modules. *Mathematische Zeitschrift*, **220**, 611-633. https://doi.org/10.1007/BF02572634

[3] Ding, N.Q., Li, Y.L. and Mao, L.X. (2009) Strongly Gorenstein Flat Modules. *Journal of the Australian Mathematical Society*, **86**, 323-338. https://doi.org/10.1017/S1446788708000761

[4] Mao, L.X. and Ding, N.Q. (2008) Gorenstein FP-Injective and Gorenstein Flat Modules. *Journal of Algebra and Its Applications*, **7**, 491-506. https://doi.org/10.1142/S0219498808002953

[5] Gillespie, J. (2010) Model Structures on Modules over Ding-Chen Rings. *Homology, Homotopy and Applications*, **12**, 61-73. https://doi.org/10.4310/HHA.2010.v12.n1.a6

[6] Yang, G. (2012) Homological Properties of Modules over Ding-Chen Rings. *Journal of the Korean Mathematical Society*, **49**, 31-47. https://doi.org/10.4134/JKMS.2012.49.1.031

[7] Yang, G., Liu, Z.K. and Liang, L. (2013) Ding Projective and Ding Injective Modules. *Algebra Colloquium*, **20**, 601-612. https://doi.org/10.1142/S1005386713000576

[8] Bravo, D., Gillespie, J. and Hovey, M. (2014) The Stable Module Category of a General Ring. arxiv:1210.0196

[9] Zhang, P. (2013) Gorenstein-Projective Modules and Symmetric Recollements. *Journal of Algebra*, **388**, 65-80. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2013.05.008

[10] Li, H.H., Zheng, Y.F., Hu, J.S., *et al.* (2020) Gorenstein Projective Modules and Recollements over Triangular Matrix Rings. *Communications in Algebra*, **48**, 4932-4947. https://doi.org/10.1080/00927872.2020.1775240

[11] Mao, L.X. (2019) Ding Modules and Dimensions over Formal Triangular Matrix Rings. arxiv:1912.06968

[12] 牟婷, 王淼, 王占平. 三角矩阵环上的GorensteinAC-投射模[J]. 吉林大学学报(理学版), 2021, 59(6): 1361-1367.

[13] Zhu, R.M., Liu, Z.K. and Wang, Z.P. (2016) Gorenstein Homological Dimensions of Modules over Triangular Matrix Rings. *Turkish Journal of Mathematics*, **40**, 146-160. https://doi.org/10.3906/mat-1504-67

[14] Green, E.L. (1982) On the Representation Theory of Rings in Matrix Form. *Pacific Journal of Mathematics*, **100**, 123-138. https://doi.org/10.2140/pjm.1982.100.123

[15] 达选尚. 复形的Gorenstein AC-投射维数[D]: [硕士学位论文]. 兰州: 兰州交通大学, 2019: 1-38.

[16] Enochs, E.E., Izurdiaga, M.C. and Torrecillas, B. (2014) Gorenstein Conditions over Triangular Matrix Rings. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **218**, 1544-1554. https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2013.12.006