Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(1), 117-124
Published Online January 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.121016

Hans汉斯

Markov分支过程的调和矩

王雪珂，王　娟*

上海理工大学理学院，上海

收稿日期：2021年12月10日；录用日期：2022年1月14日；发布日期：2022年1月21日

摘　要

假设$\{Z(t);t\ge 0\}$是上临界的Markov分支过程，本文主要研究了该过程调和矩的收敛速率，研究发现，该收敛速度存在相变，并且该相变取决于$mr+b_1>0$，$mr+b_1=0$或$mr+b_1<0$；作为应用，本文还进一步讨论了$Z(t+s)/Z(t)$的大偏差速率。

关键词

Markov分支过程，上临界，调和矩，大偏差

Harmonic Moments for the Supercritical Markov Branching Processes

Xueke Wang, Juan Wang*

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Dec. 10th, 2021; accepted: Jan. 14th, 2022; published: Jan. 21st, 2022

Abstract

Suppose that $\{Z(t);t\ge 0\}$ be a supercritical Markov branching process. The paper mainly studies the convergence rate of the harmonic moment of the process. We find that there is a phase transition for convergence rates, which depends on $mr+b_1>0$, $=0$ or <0. As an application, the large deviation rate $Z(t+s)/Z(t)$ is discussed in this paper.

*通讯作者。

文章引用: 王雪珂, 王娟. Markov 分支过程的调和矩[J]. 理论数学, 2022, 12(1): 117-124.
DOI: 10.12677/pm.2022.121016

Keywords

Markov Branching Process, Supercritical, Harmonic Moment, Large Deviation

1. 引言

假设 $\{Z(t);t\geq 0\}$ 是上临界的连续时间 Markov 过程，其分支速率为 $\{b_k;k\geq 0\}$，即系统中每个粒子的寿命均服从均值为 $\sum_{k\neq 1} b_k$ 的指数分布，并且以 $-b_k/b_1\,(k\neq 1)$ 的概率产生 k 个后代。定义该过程相应的 Q-矩阵，$Q=\left(q_{jk};j,k\in \mathrm{Z}_+\right)$，其中

$$q_{jk}=\begin{cases} jb_{k-j+1}, & j\geq 1, k\geq j-1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 b_k 满足 $b_k\geq 0\,(k\neq 1)$，$0<-b_1=\sum_{k\neq 1} b_k<\infty$。$Z(t)$ 的转移概率函数为

$$P(t)=\left(p_{ij}(t);i,j\in \mathrm{Z}_+\right),$$

若初始状态 $Z(0)=1$，其概率母函数可以表示为 $F(u,t)=\sum_{j=0}^{\infty} p_{1j}(t)u^j$，并且母函数 $F(u,t)$ 满足如下的泛函方程：

$$F(u,t+\tau)=F(F(u,t),\tau),\ F(u,0)=u \tag{1.2}$$

和基本分支性

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}(t)u^j=\left(F(u,t)\right)^i, \tag{1.3}$$

简单起见，总是记 $\left(F(u,t)\right)^i=F_i(u,t)$。

本文总是假设 $m:=\sum_{k=1}^{\infty} kb_k<\infty$，$b_0=0$，这一假设表明该 Markov 过程是上临界的。对于这样一个过程，存在正则化序列 $\{C(t);t\geq 0\}$ 满足 $\lim_{t\to\infty} C(t+s)/C(t)=\mathrm{e}^{ms}$ 使得

$$W(t):=\frac{Z(t)}{C(t)}\xrightarrow{a.s.}W,\ \ t\to\infty, \tag{1.4}$$

其中 W 为非退化的随机变量。在某种意义上，正则函数 $C(t)$ 描述了 $Z(t)$ 的平均增长速度。并且可以取 $C(t)=E(Z(t))=\mathrm{e}^{mt}$，当且仅当 $L\log L$-矩条件成立。对于上临界的 Markov 分支过程，在非爆炸的条件下，当 $t\to\infty$ 时，系统的粒子数目 $Z(t)$ 总是会趋于无穷，而总粒子数目的调和矩 $\tau(t,r):=E(Z(t))^{-r}$ (其中 $r>0$)都将趋于零。而本文试图在 $L\log L$-矩条件假设下，借助正则函数 $C(t)$，研究 $\tau(t,r)$ 的衰退速率。

在分支过程中心极限定理以及大偏差的研究中，调和矩扮演着重要角色。此前对调和矩的研究主要集中在离散时间的分支过程。Heyde 和 Brown [1]得到了 $\tau_n\left(2^{-1}\right)$ 的收敛速度；Nagaev [2]证明了 $\tau_n(1)=O\left(q^n\right)$。之后 Pakes [3]详细阐述了 $p_1 m \neq 1$ 时，$\tau_n(1)$ 的渐近行为。Ney 和 Vidyashanka [4]展示了 $\tau_n(r)$ 完整的收敛过程，并且指出在收敛过程存在着相变，该相变取决于 $p_1 m^r > 1$，$p_1 m^r = 1$ 和 $p_1 m^r < 1$。Sun 和 Zhang [5]将 Ney 和 Vidyashankar [4]的结论推广到带移民的 Galton-Waston 过程。此外，文献[6]，[7]，[8]给出了大偏差的与局部极限理论的相关研究。

本文将 Ney 和 Vidyashankar [4]的结果推广到连续时间情形，主要研究 $\tau(t,r) := E\left(Z(t)\right)^{-r}$ 的渐近行为，结论见定理 3.1。假设 $m := \sum_{k=1}^{\infty} k b_k < \infty$，$b_0 = 0$，$E\left(Z_1 \log Z_1\right) < \infty$，本文详细刻画了 $\tau(t,r) := E\left(Z(t)\right)^{-r}$ 的收敛速度，$mr + b_1 > 0$，$mr + b_1 = 0$ 或 $mr + b_1 < 0$ 的不同条件导致收敛过程存在相变，这一结果与[4]中一致。本文主要定理的证明将 $\tau(t,r)$ 分解为三个部分并分析每个部分的渐近行为，见引理 4.2，4.3 和 4.4。与离散时间不同的是，我们提出了一种新的区间划分方法得到相关结论，同时概率母函数 $F(u,t)$ 的有趣性质为分析提供了有力的帮助。此外，我们还将定理 3.1 应用于大偏差 $Z(t+s)/Z(t)$ 的讨论，并给出了相关的结论。

本文的其余部分结构如下：文章第二节介绍了一些预备知识和引理；第三节阐述了主要定理；最后一节提供了主要定理的详细证明。

2. 预备知识

除了上一节中提到的内容外，还需要更多地讨论非退化随机变量 W。根据 Athreya 和 Ney [9]，当且仅当 $L\log L$-矩条件成立时，$E(W)=1$。如果 $E\left(Z_1 \log Z_1\right) < \infty$，$W$ 存在连续密度函数 $w(x)$，$w(x)$ 在 $(0,\infty)$ 上有定义。因此，下述全局极限定理成立

$$\lim_{t\to\infty} P\left(Z(t) > x\mathrm{e}^{mt}\right) = \int_x^{\infty} w(a)\,\mathrm{d}a\,,\quad x>0\,. \tag{2.1}$$

定义 $W(t)$ 的拉普拉斯变换 $\phi_t(u) = E\left(\mathrm{e}^{-uW(t)}\right)$，则 $\phi_t(u)$ 满足泛函方程

$$\phi\left(\mathrm{e}^{mt}u\right) = F\left(\phi(u),t\right). \tag{2.2}$$

为了便于讨论，我们给出了本文开头提到的分支速率函数 b_j 的初步结果，这在后续的讨论具有重要意义。将 $\{b_j; j\geq 0\}$ 的概率母函数记为 $B(v) := \sum_{j=1}^{\infty} b_j v^j$。

命题 2.1 对任意 $j\geq 1$，极限 $\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{b_1 t} p_{1j}(t) = q_j$ 存在且 $q_j \leq q_1 = 1$。此外，若 $Q(0)=0$，$Q'(0)=1$，$Q(1)=\infty$，$B(v)$ 满足如下的泛函方程

$$B(v)Q'(v) = b_1 Q(v),\quad 0\leq v<1\,, \tag{2.3}$$

且 $Q(v)$ 有如下的幂级数展开式 $Q(v) = \sum_{j=1}^{\infty} q_j v^j$，$0\leq v<1$。

3. 主要结果

为了便于后续分析，我们首先分析调和矩函数 $\tau(t,r)$。对于任意非负随机变量 Y，均有下式成立

$$Y^{-r} = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-vY} v^{r-1}\,\mathrm{d}v\,,$$

其中$\Gamma(r)$表示伽马函数。由假设知，$Z(t)>0$，因此，令$Y=Z(t)$，等号左右两边同时取期望，根据 Tonelli 定理，可得

$$\begin{aligned}\tau(t,r)&=E\left(Z(t)\right)^{-r}\\&=\frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^{\infty}E\left(\mathrm{e}^{-vZ(t)}\right)v^{r-1}\mathrm{d}v\\&=\frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^{\infty}F\left(t,\mathrm{e}^{-v}\right)v^{r-1}\mathrm{d}v\\&:=\frac{1}{\Gamma(r)}I(t,r).\end{aligned}$$

下面是本文的主要定理。

定理 3.1 定义$q:=mr+b_1$，记

$$H(t,r)=\begin{cases}\mathrm{e}^{b_1t}, & q>0,\\ \mathrm{e}^{b_1t}\left(\mathrm{e}^{b_1\tau}C_{\tau}^{-r}\mathrm{d}\tau\right)^{-1}, & q=0,\\ c_t^r, & q<0,\end{cases}$$

则

$$\lim_{t\to\infty}H(t,r)E\left(Z(t)\right)^{-r}=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(r)}\displaystyle\int_0^{\infty}Q\left(\mathrm{e}^{-v}\right)v^{r-1}\mathrm{d}v, & q>0,\\ \dfrac{1}{h\Gamma(r)}\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^{mh}}Q\left(\phi(v)\right)v^{r-1}\mathrm{d}v, & q=0,\\ \dfrac{1}{\Gamma(r)}\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^{mh}}\phi(v)v^{r-1}\mathrm{d}v, & q<0,\end{cases}\tag{3.1}$$

其中ϕ和Q的定义如(2.2)式和(2.3)式。

运用定理 3.1，进一步得到了$Z(t+s)/Z(s)$的大偏差速率。

定理 3.2 对于任意的$\varepsilon>0$，定义

$$\psi(s,j,\varepsilon):=P\left(\left|\bar{Z}_j(s)-\mathrm{e}^{ms}\right|>\varepsilon\right),\tag{3.2}$$

其中$\bar{Z}_j(s)=\dfrac{1}{j}\sum_{i=1}^{j}Z_i(s)$，$Z_i(s)$为独立同分布的随机变量。若存在$r>0$且$K(\varepsilon,r)>0$使得对一切$j\geq1$，有$\psi(s,j,\varepsilon)<K(\varepsilon,r)j^{-r}$成立，则

$$\limsup_{t\to\infty}H(t,r)P\left(\left|\frac{Z(t+s)}{Z(t)}-\mathrm{e}^{ms}\right|>\varepsilon\right)\leq K(\varepsilon,r)D_1,\tag{3.3}$$

其中D_1为正常数。此外，对任意$j\geq1$，若$\psi(s,j,\varepsilon)<K(\varepsilon,r)j^{-r}$，则

$$\liminf_{t\to\infty}H(t,r)P\left(\left|\frac{Z(t+s)}{Z(t)}-\mathrm{e}^{ms}\right|>\varepsilon\right)\geq K(\varepsilon,r)D_2,\tag{3.4}$$

其中D_2为正常数。

推论 3.3 若存在某个$r\geq1$，$\delta>0$，使得$E\left(Z(1)^{2r+\delta}\right)<\infty$，则(3.3)式仍成立。根据 Sun 和 Zhang [5]，

可得

$$A_r := \sup_j E\left(\sqrt{j}\left|\bar{Z}_j(s)-\mathrm{e}^{ms}\right|^{2r}\right) < \infty .$$

由马尔可夫不等式，

$$\psi(s,j,\varepsilon) := P\left(\left|\bar{Z}_j(s)-\mathrm{e}^{ms}\right| > \varepsilon\right) \le \frac{E\left(\sqrt{j}\left|\bar{Z}_j(s)-\mathrm{e}^{ms}\right|^{2r}\right)}{j^r \varepsilon^{2r}} \le K(\varepsilon,r) j^{-r} ,$$

再由定理 3.2，结论得证。

4. 证明

为了方便分析，证明首先将 $I(t,r)$ 分解为以下三部分，

$$I(t,r) = \left(\int_0^{c_t^{-1}} + \int_{c_t^{-1}}^{1} + \int_1^{\infty}\right) F\left(\mathrm{e}^{-v},t\right) v^{r-1}\mathrm{d}v := M_1(t)+M_2(t)+M_3(t),$$

其中 $c_t = \mathrm{e}^{mt}$，当 $t=0$ 时，$c_t = 1$。

引理 4.1 对任意 $x>0$，$\int_x^{\infty} Q\left(\mathrm{e}^{-v}\right) v^{r-1}\mathrm{d}v < \infty$。

证明 作变量替换 $u=\mathrm{e}^{-v}$，上式等价于 $\int_0^{\mathrm{e}^{-x}} \frac{Q(u)}{u}(-\log u) u^{r-1}\mathrm{d}u$。

由(2.3)，$\lim_{t\to\infty}\frac{Q(u)}{u} = Q'(u) = 1$。因此，当 $0<u<1$ 时，存在常数 C 使得 $\frac{Q(u)}{u} < C < \infty$。令 $v=-\log u$，可得

$$\int_0^{\mathrm{e}^{-x}} \frac{Q(u)}{u}(-\log u) u^{r-1}\mathrm{d}u \le C\int_0^{\mathrm{e}^{-x}} (-\log u) u^{r-1}\mathrm{d}u \le C\int_x^{\infty} \mathrm{e}^{-v} v^{r-1}\mathrm{d}v < \infty .$$

引理 4.2 ($M_1(t)$ 的渐近行为) (a). 若 $q\ge 0$，则 $\lim_{t\to\infty} H(t,r) M_1(t) = 0$。

(b). 若 $q<0$，则 $\lim_{t\to\infty} H(t,r) M_1(t) = \int_0^1 \phi(u) u^{r-1}\mathrm{d}u$，

证明 作变量替换 $u=\mathrm{e}^{-mt}v$，再令 $t\to\infty$，我们得到

$$c_t^r M_1(t) = \int_0^1 \phi_t(u) u^{r-1}\mathrm{d}u \to \int_0^1 \phi(u) u^{r-1}\mathrm{d}u ,$$

其中 ϕ_t 为 $W(t)$ 的拉普拉斯变换。当 $q>0$ 时，

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} H(t,r) M_1(t) &= \lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{-b_1 t} c_t^{-r} \cdot \int_0^1 \phi_t(u) u^{r-1}\mathrm{d}u \\ &= \lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{-(b_1+mr)t} \cdot \int_0^1 \phi_t(u) u^{r-1}\mathrm{d}u = 0.\end{aligned}$$

对于 $q=0$，

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} H(t,r) M_1(t) &= \lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{-b_1 t} c_t^{-r} \cdot \left(\int_0^t \mathrm{e}^{-b_1\tau} c_\tau^{-r}\mathrm{d}\tau\right)^{-1} \cdot \int_0^t \phi_t(u) u^{r-1}\mathrm{d}u \\ &= \lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{-(b_1+mr)t} \cdot \left(\int_0^t \mathrm{e}^{-b_1\tau} c_\tau^{-r}\mathrm{d}\tau\right)^{-1} \cdot \int_0^t \phi_t(u) u^{r-1}\mathrm{d}u = 0.\end{aligned}$$

(b). 当 $q<0$，$H(t,r) = c_t^r$，由(4.1)式知结论显然成立。

引理 4.3 ($M_2(t)$ 的渐近行为)

$$\lim_{t\to\infty} H(t,r)M_2(t)=\begin{cases}\int_0^{\infty} Q\left(e^{-v}\right)v^{r-1}dv, & q>0,\\ \frac{1}{h}\int_1^{e^{mh}} Q(\phi(v))v^{r-1}dv, & q=0,\\ \int_1^{\infty}\phi(v)v^{r-1}dv, & q<0.\end{cases}$$

证明 基于 Athreya 和 Ney [9]的研究，我们知道在一定的条件下$\{Z(t);t\ge 0\}$等价于 Galton-Waston 过程，即对任意$h>0$，令$t=nh$，过程$\{Z(nh);n=0,1,2,\cdots\}$实际上是 Galton-Waston 过程。因此我们有

$$M_2(t)=\int_{e^{mnh}}^{1} F\left(nh,e^{-v}\right)v^{r-1}dv=\sum_{k=1}^{n}\int_{c_{kh}^{-1}}^{c_{(k-1)h}^{-1}} F\left(nh,e^{-v}\right)v^{r-1}dv,$$

对上式进行换元$u=c_{kh}v$，可得

$$M_2(t)=\sum_{k=1}^{n}\int_1^{e^{mh}} F\left(nh,e^{-uc_{kh}^{-1}}\right)c_{kh}^{-r}u^{r-1}du=\sum_{k=1}^{n}\int_1^{e^{mh}} F\left((n-k)h,\phi_{kh}(u)\right)c_{kh}^{-r}u^{r-1}du.$$

对于$mr+b_1>0$，我们有

$$e^{-b_1t}M_2(t)=\sum_{k=1}^{n}e^{-(mr+b_1)kh}\int_1^{e^{mh}}\frac{F\left(nh,\phi_{kh}(u)\right)}{e^{(n-k)b_1h}}u^{r-1}du. \tag{4.2}$$

考虑Q和$F(u,t)$的性质，上式中被积部分的分式可以简写为

$$\frac{F\left(nh,\phi_{kh}(u)\right)}{e^{(n-k)b_1h}}:=Q_{n-k}\left(\phi_{kh}(u)\right)\uparrow Q\left(\phi_{kh}(u)\right),$$

那么立即得到

$$e^{-b_1t}M_2(t)=\sum_{k=1}^{n}e^{-(mr+b_1)kh}\int_1^{e^{mh}} Q_{(n-k)h}\left(\phi_{kh}(u)\right)u^{r-1}du \tag{4.3}$$

$$\uparrow\sum_{k=1}^{n}e^{-(mr+b_1)kh}\int_1^{e^{mh}} Q\left(\phi_{kh}(u)\right)u^{r-1}du. \tag{4.4}$$

根据 Ney *et al.* [4]，对$u\in\left[1,e^{mh}\right]$，不难发现，存在常数$b$使得

$$\sup\int_1^{e^{mh}} Q\left(\phi_{kh}(u)\right)u^{r-1}du\le\sup\int_1^{e^{mh}} Q(b)u^{r-1}du.$$

又因对任意固定的h，$\sum_{k=1}^{n}e^{-(mr+b_1)kh}$收敛，故(4.2)式有界。

现在对做u变量逆变换$v=uc_{kh}^{-1}$，利用$Q\left(F(s,u)\right)=e^{b_1s}Q(u)$，类似于 Athreya 和 Ney [9]的方法，(4.4)式可以表示为

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\int_{c_{kh}^{-1}}^{c_{(k-1)h}^{-1}} Q\left(\phi_{kh}(v)\right)v^{r-1}dv}{e^{(mr+b_1)kh}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\int_{c_{kh}^{-1}}^{c_{(k-1)h}^{-1}} Q\left(F\left(kh,e^{-v}\right)\right)v^{r-1}dv}{e^{b_1kh}}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\int_{c_{kh}^{-1}}^{c_{(k-1)h}^{-1}} Q\left(e^{-v}\right)v^{r-1}dv$$
$$=\int_{e^{-mnh}}^{1} Q\left(e^{-v}\right)v^{r-1}dv.$$

因$t=nh$的假设，我们有$\lim_{t\to\infty}e^{-b_1t}M_2(t)=\int_0^1 Q\left(e^{-v}\right)v^{r-1}dv$。考虑到$Q$和$F(u,t)$的性质，因此有

$$Q_t\left(v\right)=\frac{F\left(v,t\right)}{\mathrm{e}^{b_1 t}}，\ 0\le v<1，$$

且 $\lim\limits_{t\to\infty}Q_t\left(v\right)=Q\left(v\right)$ 成立。

对于 $q>0$，

$$\lim_{t\to\infty}H\left(t,r\right)M_2\left(t\right)=\lim_{t\to\infty}\int_{c_t^{-1}}^{1}Q_t\left(\mathrm{e}^{-v}\right)v^{r-1}\mathrm{d}v=\int_0^1 Q\left(\mathrm{e}^{-v}\right)v^{r-1}\mathrm{d}v,$$

结合引理 4.1，立即得上式右端有界。再分析 $q=0$ 的情况，先给出以下记号，

$$\int_1^{\mathrm{e}^{mh}}Q_{nh}\left(\phi_{kh}\left(u\right)\right)u^{r-1}\mathrm{d}u=y\left(nh,kh\right)$$

由(4.3)和(4.3)式，可以发现

$$y\left(nh,kh\right)\uparrow y\left(kh\right):=\int_1^{\mathrm{e}^{mh}}Q\left(\phi_{kh}\left(u\right)\right)u^{r-1}\mathrm{d}u.$$

接下来处理 $H\left(t,r\right)M_2\left(t\right)$。根据(4.2)式，可以写出

$$H\left(t,r\right)M_2\left(t\right)=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{-(mr+b_1)kh}y\left(\left(n-k\right)h,kh\right)}{\int_0^t \mathrm{e}^{-b_1\tau}c_\tau^{-r}\mathrm{d}\tau},$$

对分子部分做恒等变换，

$$\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{-(mr+b_1)kh}y\left(\left(n-k\right)h,kh\right)=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{-(mr+b_1)kh}\left(y\left(\left(n-k\right)h,kh\right)-y\left(kh\right)\right)+\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{-(mr+b_1)kh}y\left(kh\right),$$

利用引理 4.1 中的结论，易得上式的第一项收敛到 0，根据控制收敛定理，立即证得

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}H\left(t,r\right)M_2\left(t\right)&=\lim_{t\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{-(mr+b_1)kh}\left(\int_0^t \mathrm{e}^{-b_1\tau}c_\tau^{-r}\mathrm{d}\tau\right)^{-1}\int_1^{\mathrm{e}^{mh}}Q\left(\phi_{kh}\left(u\right)\right)u^{r-1}\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{h}\int_1^{\mathrm{e}^{mh}}Q\left(\phi\left(u\right)\right)u^{r-1}\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

我们使用同样的方法处理当 $q<0$ 时的 $H\left(t,r\right)M_2\left(t\right)$。写出 $H\left(t,r\right)M_2\left(t\right)$ 的表达式，令 $t=nh$，

$$H\left(t,r\right)M_2\left(t\right)=c_t^r\int_{\mathrm{e}^{-mt}}^{1}F\left(t,\mathrm{e}^{-v}\right)v^{r-1}\mathrm{d}v=c_{nh}^r\sum_{k=1}^{n}\int_{c_{kh}^{-1}}^{c_{(k-1)h}^{-1}}F\left(nh,\mathrm{e}^{-v}\right)v^{r-1}\mathrm{d}v.$$

作变量替换 $u=vc_{kh}$ 后，上式等价于

$$\begin{aligned}H\left(t,r\right)M_2\left(t\right)&=\sum_{k=1}^{n}\frac{c_{nh}^r}{c_{kh}^r}\int_1^{\mathrm{e}^{mh}}F\left(nh,\mathrm{e}^{-uc_{kh}^{-1}}\right)u^{r-1}\mathrm{d}u\\&=\sum_{j=1}^{\infty}c_{jh}^r\int_1^{\mathrm{e}^{mh}}F\left(jh,F\left(\left(n-j\right)h,\mathrm{e}^{-uc_{kh}^{-1}}\right)\right)u^{r-1}\mathrm{d}u\\&=\sum_{j=1}^{\infty}c_{jh}^r\int_1^{\mathrm{e}^{mh}}F\left(jh,\phi_{(n-j)h}\left(u\right)\right)u^{r-1}\mathrm{d}u\uparrow\sum_{j=1}^{\infty}c_{jh}^r\int_1^{\mathrm{e}^{mh}}F\left(jh,\phi\left(u\right)\right)u^{r-1}\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

当 $t\to\infty$ 时，最后一步成立.再利用[10]中的泛函方程 $\phi\left(\mathrm{e}^{mt}s\right)=F\left(t,\phi\left(s\right)\right)$，

我们得到

$$\sum_{j=1}^{\infty}c_{jh}^r\int_1^{\mathrm{e}^{mh}}F\left(jh,\phi\left(u\right)\right)u^{r-1}\mathrm{d}u=\sum_{j=1}^{\infty}c_{jh}^r\int_1^{\mathrm{e}^{mh}}\phi\left(\mathrm{e}^{mjh}u\right)u^{r-1}\mathrm{d}u,$$

其中$\phi(s)=E\left(\mathrm{e}^{-sW}\mid Z_0=1\right)$。最后，通过取$v=c_{jh}v$可以得到$H(t,r)M_2(t)=\int_1^{\infty}\phi(v)v^{r-1}\mathrm{d}v$。由利用夹逼定理，当$q>0$时，结论得证。

引理 4.4 ($M_3(t)$的渐近行为) (a)若$q>0$，则$\lim\limits_{t\to\infty}H(t,r)M_3(t)=\int_{c_t^{-1}}^{\infty}Q\left(\mathrm{e}^{-v}\right)v^{r-1}\mathrm{d}v$。

(b) 若$q\le 0$，则$\lim\limits_{t\to\infty}H(t,r)M_3(t)=0$。

证明 (a)当$q>0$，由Q性质

$$\lim_{t\to\infty}H(t,r)M_3(t)=\lim_{t\to\infty}\int_1^{\infty}Q_t\left(\mathrm{e}^{-v}\right)v^{r-1}\mathrm{d}v=\int_1^{\infty}Q\left(\mathrm{e}^{-v}\right)v^{r-1}\mathrm{d}v.$$

(b) 当$q=0$，$\lim\limits_{t\to\infty}H(t,r)M_3(t)=\dfrac{\int_1^{\infty}Q_t\left(\mathrm{e}^{-v}\right)v^{r-1}\mathrm{d}v}{\mathrm{e}^{-b_1t}c_\tau^{-r}\mathrm{d}\tau}=0$。

当$q<0$，

$$H(t,r)M_3(t)=\mathrm{e}^{(mr+b_1)t}\int_1^{\infty}Q_t\left(\mathrm{e}^{-v}\right)v^{r-1}\mathrm{d}v\to 0,\ t\to\infty.$$

结合引理 4.2~4.4，定理 3.1 得证。

现在证明定理 3.2.根据条件概率公式，可把(3.3)式的目标概率分解为

$$\begin{aligned}P\left(\left|\frac{Z(t+s)}{Z(t)}-\mathrm{e}^{ms}\right|>\varepsilon\right)&=\sum_{j=1}^{\infty}P\left(\left|\frac{Z(t+s)}{j}-\mathrm{e}^{ms}\right|>\varepsilon\middle|Z(t)=j\right)P\left(Z(t)=j\right)\\&=\sum_{j=1}^{\infty}P\left(Z(t)=j\right)\psi(s,j,\varepsilon)j^{-r}\\&\le K(\varepsilon,r)j^{-r}.\end{aligned}$$

应用定理 3.1 的结论，(3.3)式得证，同理可得(3.4)式。

基金项目

这项工作得到国家自然科学基金(1191392)的大力支持。

参考文献

[1] Heyde, C.C. and Brown, B.M. (1971) An Invariance Principle and Some Convergence Rate Results for Branching Processes. *Probablility Theory and Related Fields*, **20**, 271-278. https://doi.org/10.1007/BF00538373

[2] Nagaev, A.V. (1967) On Estimating the Expected Number of Direct Descendants of a Particle in a Branching Process. *Theory of Probability and Its Applications*, **12**, 314-320. https://doi.org/10.1137/1112037

[3] Pakes, A.G. (1975) Non-Parametric Estimation in the Galton-Watson Process. *Mathematical Biosciences*, **26**, 1-18. https://doi.org/10.1016/0025-5564(75)90091-7

[4] Ney, P.E. and Vidyashankar, A.N. (2003) Harmonic Moments and Large Deviation Rates for Supercritical Branching Processes. *The Annals of Applied Probability*, **13**, 475-489. https://doi.org/10.1214/aoap/1050689589

[5] Sun, Q. and Zhang, M. (2017) Harmonic Moments and Large Deviations for Supercritical Branching Processes with Immigration. *Frontiers of Mathematics in China*, **12**, 1201-1220. https://doi.org/10.1007/s11464-017-0642-3

[6] Ney, P.E. and Vidyashankar, A.N. (2004) Local Limit Theory and Large Deviations for Supercritical Branching Processes. *The Annals of Applied Probability*, **14**, 1135-1166. https://doi.org/10.1214/105051604000000242

[7] Athreya, K.B. (1994) Large Deviation Rates for Branching Processes: I. Single Type Case. *The Annals of Applied Probability*, **4**, 779-790. https://doi.org/10.1214/aoap/1177004971

[8] Ling, J.N. and Zhang, M. (2016) Large Deviation for Supercritical Branching Processes with Immigration. *Acta Mathematica Sinica English*, **32**, 893-900. https://doi.org/10.1007/s10114-016-5437-z

[9] Athreya, K.B. and Ney. P.E. (1972) Branching Processes. https://doi.org/10.1007/978-3-642-65371-1

[10] Asmussen, S. and Hering, H. (1983) Branching Processes. https://doi.org/10.1007/978-1-4615-8155-0