Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(1), 209-217
Published Online January 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.121025

Hans汉斯

涉及亚纯函数差分算子的唯一性定理

邱仕林，郑瑞林，刘　丹*

华南农业大学数学与信息学院，广东 广州

收稿日期：2021年12月20日；录用日期：2022年1月20日；发布日期：2022年1月27日

摘　要

本文运用Nevanlinna值分布论研究了有穷级亚纯函数与其差分算子分担函数的问题，得到了如下结果。设 $f(z)$ 是有穷级超越亚纯函数，$a(z)(\not\equiv\infty),b(z)$ 是 $f(z)$ 的Borel例外函数且 $a(z),b(z)\in S(f)$，其中 $a(z)$ 是满足 $\rho(a(z))<1$ 的亚纯函数。令 η 是满足 $\Delta_\eta f(z)\not\equiv 0$ 的非零常数。如果 $f(z)$ 和 $\Delta_\eta f(z)$ CM分担 $\Delta_\eta a(z),b(z)$，那么，$a(z)=0$，$b(z)=\infty$，$f(z)=Be^{Az}$，其中 A,B 是非零常数。本文是对陈创鑫和张然然结果的改进和推广。

关键词

亚纯函数，唯一性，差分算子

Uniqueness of Meromorphic Function Concerning Difference Operator

Shilin Qiu, Ruilin Zheng, Dan Liu*

College of Mathematics and Informatics, South China Agricultural University, Guangzhou Guangdong

Received: Dec. 20th, 2021; accepted: Jan. 20th, 2022; published: Jan. 27th, 2022

Abstract

In this paper, we study the uniqueness of meromorphic functions by Nevanlinna value distribution theory and obtain the following result. Let $f(z)$ be a transcendental meromorphic function of finite order and $a(z)(\in S(f))$, $b(z)(\in S(f))$ be a Borel exceptional function of $f(z)$, where

*通讯作者。

文章引用: 邱仕林, 郑瑞林, 刘丹. 涉及亚纯函数差分算子的唯一性定理[J]. 理论数学, 2022, 12(1): 209-217.
DOI: 10.12677/pm.2022.121025

$a(z)(\not\equiv\infty)$ **is a meromorphic function satisfying** $\rho(a(z))<1$. **Let** η **be a nonzero constant satisfying** $\Delta_\eta f(z)\not\equiv 0$. **If** $f(z)$ **and** $\Delta_\eta f(z)$ **share** $\Delta_\eta a(z), b(z)$ **CM, then** $a(z)=0$, $b(z)=\infty$, $f(z)=Be^{Az}$, **where** A, B **are non-zero constants. Our result is an improvement of the theorem given by Chen and Zhang.**

Keywords

Meromorphic Function, Uniqueness, Difference Operator

1. 引言及主要结果

本文中，亚纯函数均指整个复平面上的亚纯函数。以下将使用 Nevanlinna 值分布理论的标准符号 $T(r,f), m(r,f), N(r,f)$ [1] [2] [3]。定义记号 $S(r,f)$ 表示满足 $S(r,f)=o(T(r,f))$ 的任何函数 f，其中 $r\to\infty$ 且可能除去 r 的一个有穷对数测度集。如果开平面上的另一个亚纯函数 $a(z)$ 满足 $T(r,a(z))=S(r,f)$，则称 $a(z)$ 是 $f(z)$ 的小函数，且将 $f(z)$ 的小函数集合记为 $S(f)$。设 $F(z)$ 和 $G(z)$ 是两个非常数亚纯函数，b 是复数。定义 $F(z)$ 和 $G(z)$ CM 分担 b 指的是 $F(z)-b$ 和 $G(z)-b$ 有相同的零点且每个零点的重级也相同，$F(z)$ 和 $G(z)$ CM 分担 ∞ 指的是 $F(z)$ 和 $G(z)$ 有相同的极点且每个极点的重级也相同。类似地，我们定义 $F(z)$ 和 $G(z)$ CM 分担小函数 $b(z)$，其中 $b(z)\in S(F)\cap S(G)$。

设 $f(z)$ 是非常数亚纯函数，它的级定义为

$$\rho(f)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log^+ T(r,f)}{\log r}.$$

设 $a(z)$ 是亚纯函数，$f(z)$ 是级为 $\rho(f)$ 的超越亚纯函数。若

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log^+ N\left(r,\frac{1}{f-a}\right)}{\log r}<\rho(f),$$

那么当 $\rho(f)\ge 0$ 时，$a(z)$ 是 $f(z)$ 的 Borel 例外函数，如果 $a(z)=\infty$，定义中 $N\left(r,\frac{1}{f-a}\right)$ 被 $N(r,f)$ 替代，此时 ∞ 是 $f(z)$ 的 Borel 例外值。

设 $f(z)$ 是亚纯函数，定义其差分算子为 $\Delta_\eta f(z)=f(z+\eta)-f(z)$ 和 $\Delta_\eta^k f(z)=\Delta_\eta^{k-1}(\Delta_\eta f(z))$，$k\in\mathrm{N}$ 且 $k\ge 2$，其中 η 是非零常数。$\Delta_\eta f(z)$ 被视为 $f'(z)$ 的差分模拟。

1935 年，Csillag 研究了整函数关于导数的唯一性问题，证明了定理 A。

定理 A [4] 设 $f(z)$ 是非常数整函数，m,n 是两个相互判别的正整数。如果 $f(z)\ne 0$，$f^{(m)}(z)\ne 0$，$f^{(n)}(z)\ne 0$，那么 $f(z)=e^{az+b}$，其中 $a(\ne 0), b$ 是常数。

后来，Tumura 改进了定理 A，得到了定理 B。

定理 B [5] 设 $f(z)$ 是非常数整函数，$m(\geq 2)$ 是正整数。如果 $f(z)\neq 0, f^{(m)}(z)\neq 0$，那么 $f(z)=e^{az+b}$，其中 $a(\neq 0),b$ 是常数。

近年来，复差分方程的亚纯解，复差分算子的值分布和唯一性问题成为了复分析领域的研究热点。Halburd-Korhonen [6] [7]和 Chiang-Feng [8]分别建立了对数导数引理的差分模拟，这为复差分算子的值分布理论和唯一性理论的研究提供了强有力的工具，也使该领域的研究工作取得了重大的突破。目前，该领域已取得丰富的研究成果。

2013 年，陈宗煊得到了关于定理 B 的差分模拟，证明了定理 C。

定理 C [9] 设 $f(z)$ 是有穷级超越整函数，c 是非零常数，n 是正整数。如果 $f(z)\neq 0$，$\Delta_c^n f(z)\neq 0$，那么 $f(z)=e^{az+b}$，其中 $a(\neq 0),b$ 是常数。

后来，陈创鑫和陈宗煊将定理 C 推广到亚纯函数，得到了定理 D。

定理 D [10] 设 $f(z)$ 是有穷级超越亚纯函数，$a(\neq 0),b$ 是两个相互判别的复数且是 $f(z)$ 的 Borel 例外值，c 是满足 $\Delta_c f(z)\not\equiv 0$ 的非零常数。如果 $f(z)$ 和 $\Delta_c f(z)$ CM 分担 a,b，那么，$a=0$，$b=\infty$，$f(z)=e^{Az+B}$，其中 $A(\neq 0),B$ 是常数。

2021 年，陈创鑫和张然然研究了关于有穷级整函数的两个差分算子的分担函数问题，证明了定理 E：

定理 E [11]设 $f(z)$ 是有穷级超越整函数且满足 $\lambda(f-a(z))<\rho(f)$，其中 $a(z)(\in S(f))$ 是满足 $\rho(a(z))<1$ 的整函数。令 η 是满足 $\Delta_\eta^2 f(z)\not\equiv 0$ 的常数。如果 $\Delta_\eta^2 f(z)$ 和 $\Delta_\eta f(z)$ CM 分担 $\Delta_\eta a(z)$，其中 $\Delta_\eta a(z)\in S(\Delta_\eta^2 f(z))$，那么，$f(z)=a(z)+Be^{Az}$，其中 A，B 是非零常数，$a(z)$ 退化成常数。

本文针对定理 E，提出猜想：若 $f(z)$ 是亚纯函数，是否存在类型的结果？通过讨论，得到了以下的结果。

定理 1.1 设 $f(z)$ 是有穷级超越亚纯函数，$a(z)(\not\equiv\infty),b(z)$ 是 $f(z)$ 的 Borel 例外函数且 $a(z),b(z)\in S(f)$，其中 $a(z)$ 是满足 $\rho(a(z))<1$ 的亚纯函数，设 η 是满足 $\Delta_\eta f(z)\not\equiv 0$ 的非零常数。如果 $f(z)$ 和 $\Delta_\eta f(z)$ CM 分担 $\Delta_\eta a(z),b(z)$，那么，$a(z)=0$，$b(z)=\infty$，$f(z)=Be^{Az}$，其中 A，B 是非零常数。

下面给出两个例子来说明定理 1.1 的适用性。

例 1.2 设 $f(z)=Be^{Az}$，其中 A，B 是非零常数，当非零常数 η 满足 $e^{A\eta}\neq 1$ 时，$\Delta_\eta f(z)=Be^{Az}(e^{A\eta}-1)\neq 0$，即 $f(z)$ 和 $\Delta_\eta f(z)$ CM 分担 $0,\infty$，这说明定理 1.1 是非空的。

例 1.3 设 $f(z)=e^z e^{h(z)}$，其中，$h(z)=e^{2z}$ 是非常数整函数，且满足 $h(z)=h(z+c)$，η 是满足 $(e^\eta-1)\neq 0$ 的非零常数，那么 $\Delta_\eta f(z)=e^z e^{h(z)}(e^\eta-1)\neq 0$，即 $f(z)$ 和 $\Delta_\eta f(z)$ CM 分担 $0,\infty$，这说明定理 1.1 对无穷级超越亚纯函数是不适用的。

由定理 1.1 可以得到推论 1.4。易知，推论 1.4 是对定理 E 的改进。

推论 1.4 设 $f(z)$ 是有穷级超越整函数且满足 $\lambda(f-a(z))<\rho(f)$，其中 $a(z)(\in S(f))$ 是满足 $\rho(a(z))<1$ 的整函数。令 η 是满足 $\Delta_\eta f(z)\not\equiv 0$ 的常数。如果 $f(z)$ 和 $\Delta_\eta f(z)$ CM 分担 $\Delta_\eta a(z)$，那么 $a(z)=0$，$f(z)=Be^{Az}$，其中 A，B 是非零常数。

2. 定理证明所需要的引理

引理 2.1 [12] 设 g 是级小于 1 的超越亚纯函数，h 是正常数，则存在一个 ε 集 E，使得当 $z\to\infty$ 且 $z\in\mathbb{C}\setminus E$ 时，对满足 $|c|\leq h$ 的所有 c 都有如下式子成立：

$$\frac{g'(z+c)}{g(z+c)}\to 0,\ \frac{g(z+c)}{g(z)}\to 1.$$

引理 2.2 [6] [8] 设 g 是具有有穷 ρ 级的非常数亚纯函数，η 是非零有穷复数，那么

$$m\left(r,\frac{g(z+\eta)}{g(z)}\right)=S(r,g).$$

对任意的 $\varepsilon>0$，可以得到

$$m\left(r,\frac{g(z+\eta)}{g(z)}\right)=O\left(r^{\rho(g)-1+\varepsilon}\right).$$

引理 2.3 [13] 设 g 是亚纯函数，k 是正整数，c 是非零有穷复数。如果 $\Delta_c^k g\equiv 0$，那么要么 $\rho(g)\ge 1$，要么 g 是满足 $\deg g\le k-1$ 的多项式。

引理 2.4 [1] [2] [3] [14] 设 f 是一个非常数亚纯函数，a_1,a_2,a_3 (其中一个可能为 ∞)是 f 的三个相互判别的小函数，那么

$$T(r,f)\le \bar{N}\left(r,\frac{1}{f-a_1}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{f-a_2}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{f-a_3}\right)+S(r,f).$$

引理 2.5 [2] [15] 设 $f_1(z),\cdots,f_n(z),(n\ge 2)$ 是亚纯函数，$g_1(z),\cdots,g_n(z),(n\ge 2)$ 是整函数，满足下列各条件：

(i) $\sum_{j=1}^{n} f_j(z)\exp\{g_j(z)\}=0$；

(ii) 当 $1\le j<k\le n$ 时，$g_j(z)-g_k(z)$ 不是常数；

(iii) 当 $1\le j\le n$，$1\le h<k\le n$ 时，

$$T(r,f_j)=o\{T(r,\exp\{g_h-g_k\})\},\ r\to\infty,\ r\notin E,$$

其中 $E\subset(1,\infty)$ 具有有限性测度或对数测度。

则 $f_j(z)\equiv 0\ (j=1,\cdots,n)$。

接下来，我们将叙述 Clunie 引理的差分模拟，它在定理 1.1 的证明中起着重要的作用。

引理 2.6 [16] 设 g 是差分方程

$$U(z,g)P(z,g)=Q(z,g)$$

的有穷 ρ 级超越亚纯解，其中 $U(z,g),P(z,g),Q(z,g)$ 是差分多项式且满足 $\deg U(z,g)=n$，并且 $\deg Q(z,g)\le n$。更进一步地，假设 $U(z,g)$ 仅有一项取得最高次数。那么，对任何 $\varepsilon>0$，有

$$m(r,P(z,g))=O\left(r^{\rho-1+\varepsilon}\right)+S(r,g),$$

至多除去一个有穷对数测度集。

引理 2. 7 设 $f(z)$ 是有穷级超越亚纯函数，∞ 是 $f(z)$ 的 Borel 例外值，$a(z)$ 是 $f(z)$ 的 Borel 例外函数，其中 $a(z)(\in S(f))$ 是满足 $\rho(a(z))<1$ 的亚纯函数。如果对于满足 $\Delta_\eta f(z)\ne 0$ 的非零常数 η，D 有

$$\frac{f(z)-\Delta_\eta a(z)}{\Delta_\eta f(z)-\Delta_\eta a(z)}=D \text{ 成立,} \tag{1}$$

那么，$f(z)=Be^{Az}$，其中 A，B 是非零常数。

证明：因为 $f(z)$ 是有穷级超越亚纯函数，∞ 是 $f(z)$ 的 Borel 例外值，$a(z)$ 是 $f(z)$ 的 Borel 例外函数，由 Hadamard 分解定理可得

$$f(z)=a(z)+B(z)e^{p(z)}, \tag{2}$$

其中 $p(z)$ 是非常数多项式，$B(z)$ 是满足 $N(r,B)=S(r,f)$ 的亚纯函数，且 $\rho(B)<k=\deg p=\rho(f)$。

把(2)带入(1)，可得

$$\begin{gathered}\frac{B(z)e^{p(z)}+2a(z)-a(z+\eta)}{B(z+\eta)e^{p(z+\eta)}-B(z)e^{p(z)}}=D\\ \left(2a(z)-a(z+\eta)\right)e^{-p(z)}=DB(z+\eta)e^{p(z+\eta)-p(z)}-(D+1)B(z).\end{gathered} \tag{3}$$

下面将证明分成以下三个步骤。

步骤 1：证明 $a(z)=0$。

如果(3)中 $2a(z)-a(z+\eta)\not\equiv 0$，比较(3)两边的级，矛盾，因此

$$\frac{a(z+\eta)}{a(z)}\equiv 2. \tag{4}$$

下证 $a(z)$ 是常数。假设 $a(z)$ 是非常数亚纯函数，由引理 2.1，可知存在一个 ε 集 E_0，使得当 $z\to\infty$ 且 $z\in\mathbb{C}\setminus E_0$ 时，有 $\frac{a(z+\eta)}{a(z)}\to 1$ 成立，这与(4)矛盾，因此 $a(z)$ 是常数。结合(4)，有 $a(z)=0$，所以 $f(z)=B(z)e^{p(z)}$。

步骤 2：证明 $\rho(f)=\deg p=1$。

假设 $\rho(f)=\deg p=k\geq 2$。断言 $D\neq -1$，若 $D=-1$ 由(1)与 $a(z)=0$ 可得 $f(z+\eta)\equiv 0$，这显然是矛盾的。此时，由(3)，可得

$$e^{p(z+\eta)-p(z)}=\frac{(D+1)B(z)}{DB(z+\eta)},$$

由上式可得 $\frac{B(z)}{B(z+\eta)}$ 是非零整函数。由引理 2.2，可知

$$\begin{aligned}T\left(r,e^{p(z+\eta)-p(z)}\right)&=T\left(r,\frac{(D+1)B(z)}{DB(z+\eta)}\right)\\&=T\left(r,\frac{B(z)}{B(z+\eta)}\right)+S\left(r,e^{p(z+\eta)-p(z)}\right)\\&=m\left(r,\frac{B(z)}{B(z+\eta)}\right)+S\left(r,e^{p(z+\eta)-p(z)}\right)\\&=S\left(r,e^{p(z+\eta)-p(z)}\right),\end{aligned}$$

这是矛盾的。因此，$\rho(f)=\deg p=1$，$f(z)=B(z)e^{Az+A_0}=B_1(z)e^{Az}$，其中 $A(\neq 0),A_0$ 是常数，$B_1(z)=B(z)e^{A_0}$ 是满足 $\rho(B_1)<\rho(f)=1$ 的亚纯函数。

步骤 3：证明 $B_1(z)$ 是非零常数。

把 $f(z)=B_1(z)e^{Az}$ 代入(1)，可以得到

$$\frac{B_1(z+\eta)}{B_1(z)}=\frac{1+D}{De^{A\eta}}. \tag{5}$$

由引理 2.1，可知存在一个 ε 集 E_1，使得当 $z\to\infty$ 且 $z\in\mathbb{C}\setminus E_1$ 时，有 $\frac{B_1(z+\eta)}{B_1(z)}\to 1$ 成立，即(5)中常数 $\frac{1+D}{De^{A\eta}}=1$，可得 $\Delta_\eta B_1(z)\equiv 0$。因此，由 $\rho(B_1)<1$ 和引理 2.3 可知，$B_1(z)$ 是非零常数。

综上，引理 2.7 得证。

3. 定理 1.1 的证明

定理的证明将分成以下两种情形进行讨论：

情形 1：$a(z),b(z)$ 都不取 ∞。

由 $a(z),b(z)$ 是 $f(z)$ 的 Borel 例外函数与 Hadamard 分解定理，可得

$$\frac{f(z)-b(z)}{f(z)-a(z)}=\alpha(z)e^{p(z)}, \tag{6}$$

其中 $\alpha(z)$ 是满足 $\rho(\alpha)<\rho(f)$ 的亚纯函数，$p(z)$ 是满足 $\deg p=\rho(f)$ 的非常数多项式，因此，可得

$$T(r,\alpha)=S(r,e^p),\ T(r,f)=T(r,e^p)+S(r,f).$$

由(6)，可得

$$f(z)=a(z)+\frac{a(z)-b(z)}{\alpha(z)e^{p(z)}-1}.$$

因此，

$$\begin{aligned}
&\Delta_\eta f(z)=f(z+\eta)-f(z)\\
&=\left(a(z+\eta)+\frac{a(z+\eta)-b(z+\eta)}{\alpha(z+\eta)e^{p(z+\eta)}-1}\right)-\left(a(z)+\frac{a(z)-b(z)}{\alpha(z)e^{p(z)}-1}\right)\\
&=\frac{\left(a(z+\eta)-a(z)\right)\left(\alpha(z+\eta)e^{p(z+\eta)}-1\right)\left(\alpha(z)e^{p(z)}-1\right)}{\left(\alpha(z+\eta)e^{p(z+\eta)}-1\right)\left(\alpha(z)e^{p(z)}-1\right)}\\
&\quad+\frac{\left(a(z+\eta)-b(z+\eta)\right)\left(\alpha(z)e^{p(z)}-1\right)}{\left(\alpha(z+\eta)e^{p(z+\eta)}-1\right)\left(\alpha(z)e^{p(z)}-1\right)}+\frac{\left(\alpha(z+\eta)e^{p(z+\eta)}-1\right)\left(a(z)-b(z)\right)}{\left(\alpha(z+\eta)e^{p(z+\eta)}-1\right)\left(\alpha(z)e^{p(z)}-1\right)}\\
&=\frac{A_1(z)e^{p(z+\eta)+p(z)}+\left(A_2(z)e^{p(z+\eta)}+A_3(z)e^{p(z)}\right)+\left(b(z+\eta)-b(z)\right)}{\alpha(z)\alpha(z+\eta)e^{p(z+\eta)+p(z)}-\alpha(z+\eta)e^{p(z+\eta)}-\alpha(z)e^{p(z)}+1}\\
&=\frac{B_1(z)\left(e^{p(z)}\right)^2+B_2(z)e^{p(z)}+B_3(z)}{C_1(z)\left(e^{p(z)}\right)^2+C_2(z)e^{p(z)}+C_3(z)}.
\end{aligned}$$

其中，

$$B_1(z)=\big(a(z+\eta)-a(z)\big)\alpha(z)\alpha(z+\eta)\mathrm{e}^{p(z+\eta)-p(z)},$$
$$B_2(z)=\big(b(z)-a(z+\eta)\big)\alpha(z+\eta)\mathrm{e}^{p(z+\eta)-p(z)}+\big(a(z)-b(z+\eta)\big)\alpha(z),$$
$$B_3(z)=b(z+\eta)-b(z),$$
$$C_1(z)=\alpha(z)\alpha(z+\eta)\mathrm{e}^{p(z+\eta)-p(z)},$$
$$C_2(z)=-\alpha(z+\eta)\mathrm{e}^{p(z+\eta)-p(z)}-\alpha(z),$$
$$C_3(z)=1.$$

类似可得

$$\Delta_\eta f(z)-b(z)=\frac{D_1(z)\left(\mathrm{e}^{p(z)}\right)^2+D_2(z)\mathrm{e}^{p(z)}+D_3(z)}{C_1(z)\left(\mathrm{e}^{p(z)}\right)^2+C_2(z)\mathrm{e}^{p(z)}+C_3(z)},\tag{7}$$

易知 $B_1(z)$，$B_2(z)$，$B_3(z)$，$C_1(z)$，$C_2(z)$，$C_3(z)$，$D_1(z)$，$D_3(z)$，$D_3(z)$ 都是 $\mathrm{e}^{p(z)}$ 的小函数。由(7)可得

$$N\left(r,\frac{1}{\Delta_\eta f(z)-b(z)}\right)=N\left(r,\frac{1}{D_1\left(\mathrm{e}^{p(z)}\right)^2+D_2\mathrm{e}^{p(z)}+D_3}\right)+S\left(r,\mathrm{e}^{p(z)}\right).\tag{8}$$

运用引理 2.4 以及(8)，可得

$$\begin{aligned}2T\left(r,\mathrm{e}^{p(z)}\right)&=T\left(r,D_1\left(\mathrm{e}^{p(z)}\right)^2+D_2\mathrm{e}^{p(z)}\right)+S\left(r,\mathrm{e}^{p(z)}\right)\\&\le\bar{N}\left(r,\frac{1}{D_1\left(\mathrm{e}^{p(z)}\right)^2+D_2\mathrm{e}^{p(z)}+D_3}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{D_1\left(\mathrm{e}^{p(z)}\right)^2+D_2\mathrm{e}^{p(z)}}\right)\\&\quad+\bar{N}\left(r,D_1\left(\mathrm{e}^{p(z)}\right)^2+D_2\mathrm{e}^{p(z)}\right)+S\left(r,\mathrm{e}^{p(z)}\right)\\&\le\bar{N}\left(r,\frac{1}{\Delta_\eta f(z)-b(z)}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{D_1\mathrm{e}^{p(z)}+D_2}\right)+S\left(r,\mathrm{e}^{p(z)}\right)\\&\le\bar{N}\left(r,\frac{1}{\Delta_\eta f(z)-b(z)}\right)+T\left(r,\mathrm{e}^{p(z)}\right)+S\left(r,\mathrm{e}^{p(z)}\right).\end{aligned}\tag{9}$$

由(9)以及 $f(z)$ 和 $\Delta_\eta f(z)$ CM 分担 $b(z)$，可得

$$T\left(r,\mathrm{e}^{p(z)}\right)\le N\left(r,\frac{1}{f(z)-b(z)}\right)+S\left(r,\mathrm{e}^{p(z)}\right),$$

故 $\rho\big(f(z)\big)\le\lambda\big(f(z)-b(z)\big)$，这与 $b(z)$ 是 $f(z)$ 的 Borel 例外函数矛盾。

情形 2：$a(z)\not\equiv\infty$，$b(z)=\infty$。

因为 $f(z)$ 是有穷级超越亚纯函数且 ∞ 是 $f(z)$ 的 Borel 例外值，$a(z)$ 是 $f(z)$ 的 Borel 例外函数，根据 Hadamard 分解定理可得

$$f(z)=a(z)+B(z)\mathrm{e}^{p(z)},$$

其中 $p(z)$ 是非常数多项式，$B(z)$ 是满足 $N(r,B)=S(r,f)$ 的亚纯函数，且 $\rho(B)<k=\deg p=\rho(f)$。

由 $f(z)$ 和 $\Delta_\eta f(z)$ CM 分担 $\Delta_\eta a(z),\infty$，可得

$$\frac{f(z)-\Delta_\eta a(z)}{\Delta_\eta f(z)-\Delta_\eta a(z)}=\frac{B(z)\mathrm{e}^{p(z)}+2a(z)-a(z+\eta)}{B(z+\eta)\mathrm{e}^{p(z+\eta)}-B(z)\mathrm{e}^{p(z)}}=\mathrm{e}^{q(z)}, \tag{10}$$

其中 $q(z)$ 是多项式。

断言 $\deg q(z)=0$。由反证法，不妨假设 $\deg q(z)=s\geq 1$。则

$$p(z)=a_k z^k+a_{k-1}z^{k-1}+\cdots+a_0,$$
$$q(z)=b_s z^s+b_{s-1}z^{s-1}+\cdots+b_0,$$

其中 $s\leq k$，$a_k(\neq 0),a_{k-1},\cdots,a_0,b_s(\neq 0),b_{s-1},\cdots,b_0$ 都是常数。

子情形 2. 1：$1\leq s=k$。

将多项式 $p(z),q(z)$ 的首项系数分成两种情况来讨论。

当 $a_k=-b_k$ 时，由(10)可得

$$B(z)\mathrm{e}^{p(z)}=B(z+\eta)\mathrm{e}^{p(z+\eta)+q(z)}-B(z)\mathrm{e}^{p(z)+q(z)}+a(z+\eta)-2a(z), \tag{11}$$

其中 $B(z)\not\equiv 0$，比较(11)两边的级，这显然是矛盾的。

当 $a_k\neq -b_k$ 时，由(10)可得

$$B(z)\mathrm{e}^{0}+\left(2a(z)-a(z+\eta)\right)\mathrm{e}^{-p(z)}+\left(B(z)-B(z+\eta)\mathrm{e}^{p(z+\eta)-p(z)}\right)\mathrm{e}^{q(z)}=0, \tag{12}$$

设 $f_1=B(z)$，$f_2=2a(z)-a(z+\eta)$，$f_3=B(z)-B(z+\eta)\mathrm{e}^{p(z+\eta)-p(z)}$，

其中 $\rho(f_i)<k=\deg p=\rho(f)=\deg q=\deg(q+p)$，

且 $T(r,f_i)=o\left\{T\left(r,\mathrm{e}^{q+p}\right)\right\}$，$T(r,f_i)=o\left\{T\left(r,\mathrm{e}^{q}\right)\right\}$，$T(r,f_i)=o\left\{T\left(r,\mathrm{e}^{p}\right)\right\}(i=1,2,3)$。对(12)运用引理 2.5，可得 $f_1\equiv 0$，即 $B(z)\equiv 0$，矛盾。

子情形 2.2：$1\leq s<k$。

由(10)可得

$$\begin{aligned}&B(z)\mathrm{e}^{p(z)}+2a(z)-a(z+\eta)=\left(B(z+\eta)\mathrm{e}^{p(z+\eta)}-B(z)\mathrm{e}^{p(z)}\right)\mathrm{e}^{q(z)}\\&\left(2a(z)-a(z+\eta)\right)\mathrm{e}^{-p(z)}=B(z+\eta)\mathrm{e}^{p(z+\eta)-p(z)+q(z)}-B(z)\mathrm{e}^{q(z)}-B(z).\end{aligned} \tag{13}$$

断言 $2a(z)-a(z+\eta)\equiv 0$，若 $2a(z)-a(z+\eta)\not\equiv 0$，通过比较(13)两边的级，可以得到矛盾。下面，把 $2a(z)-a(z+\eta)\equiv 0$ 代入(13)，可得

$$\frac{B(z+\eta)}{B(z)}\mathrm{e}^{p(z+\eta)-p(z)}=1+\mathrm{e}^{-q(z)}. \tag{14}$$

当 $1\leq s<k-1=\deg p-1$ 时，由引理 2.2，可知存在 $\varepsilon>0$，使得对满足 $|z|=r\to\infty$ 的所有 z，都有

$$T\left(r,\frac{B(z+\eta)}{B(z)}\right)=m\left(r,\frac{B(z+\eta)}{B(z)}\right)=O\left(r^{\rho(B)-1+\varepsilon}\right).$$

那么整函数 $\dfrac{B(z+\eta)}{B(z)}$ 与 $1+\mathrm{e}^{-q(z)}$ 都是 $\mathrm{e}^{p(z)-p(z)}$ 的小函数。对(14)运用引理 2.6，有

$$
\begin{aligned}
T\left(r,\mathrm{e}^{p(z+\eta)-p(z)}\right) &= m\left(r,\mathrm{e}^{p(z+\eta)-p(z)}\right) \\
&= O\left(r^{\deg p-1-1+\varepsilon}\right)+S\left(r,\mathrm{e}^{p(z+\eta)-p(z)}\right) \\
&= S\left(r,\mathrm{e}^{p(z+\eta)-p(z)}\right),
\end{aligned}
$$

这是矛盾的。当$1\le s=k-1=\deg p-1$时，由(14)，可以得到

$$
\mathrm{e}^{-q(z)}=\frac{B(z+\eta)}{B(z)}\mathrm{e}^{p(z+\eta)-p(z)}-1. \tag{15}
$$

分析可知$\dfrac{B(z+\eta)}{B(z)}$是不恒等于 0 的整函数，因此(15)式右边的函数存在无穷多个零点，但(15)式左边的函数没有零点，矛盾。

综合上述两种子情形，有$\deg q(z)=0$。因此，由(10)与引理 2.7，定理 1.1 得证。

基金项目

国家自然科学基金资助项目(编号：12171127)。

国家自然科学基金资助项目(编号：11701188)。

参考文献

[1] Hayman, W.K. (1964) Meromorphic Functions. Clarendon Press, Oxford.

[2] Yang, C.C. and Yi, H.X. (2003) Uniqueness Theory of Meromorphic Functions. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht.

[3] Yang, L. (1993) Value Distribution Theory. Springer, Berlin.

[4] Csillag, P. (1935) Uber ganze Funktionen, welehe drei nicht verschwindende Ableitungen besitzen. *Mathematische Annalen*, **110**, 745-752. https://doi.org/10.1007/BF01448056

[5] Tumura, Y. (1937) On the Extensions of Borels Theorem and Saxer-Csillags Theorem. *Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan*, **19**, 29-35.

[6] Halburd, R.G. and Korhonen, R.J. (2006) Difference Analogue of the Lemma on the Logaritheoremic Derivative with Applications to Difference Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **314**, 477-487. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.04.010

[7] Halburd, R.G. and Korhonen, R.J. (2006) Nevanlinna Theory for the Difference Operator. *Annales Academiae Scientiarum Fennicae Mathematica*, **31**, 463-478.

[8] Chiang, Y.M. and Feng, S.J. (2008) On the Nevanlinna Characteristic of $f(z+\eta)$ and Difference Equations in the Complex Plane. *The Ramanujan Journal*, **16**, 105-129. https://doi.org/10.1007/s11139-007-9101-1

[9] Chen, Z.X. (2013) Relationships between Entire Functions and Their Forward Differences. *Complex Variables and Elliptic Equations*, **58**, 299-307. https://doi.org/10.1080/17476933.2011.584251

[10] Chen, C.X. and Chen, Z.X. (2016) The Uniqueness of Meromorphic Functions and Their Differences. *Acta Mathematica Sinica*, **59**, 821-834.

[11] 陈创鑫, 张然然. 涉及整函数差分算子的唯一性定理[J]. 数学年刊 A 辑, 2021, 42(1): 11-22.

[12] Bergweiler, W. and Langley, J.K. (2007) Zeros of Differences of Meromorphic Functions. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **142**, 133-147. https://doi.org/10.1017/S0305004106009777

[13] Fang, M.L. and Wang, Y.F. (2021) Higher Order Difference Operators and Uniqueness of Meromorphic Functions. *Analysis and Mathematical Physics*, **11**, Article No. 93. https://doi.org/10.1007/s13324-021-00529-w

[14] Laine, I. (1993) Nevanlinna Theory and Complex Differential Equations. de Gruyter, Berlin. https://doi.org/10.1515/9783110863147

[15] Gross, F. (1972) Factorization of Meromorphic Function. U.S. Government Printing Office, Washington DC.

[16] Laine, I. and Yang, C.C. (2007) Clunie Theorems for Difference and Q-Difference Polynomials. *Journal of the London Mathematical Society*, **76**, 556-566. https://doi.org/10.1112/jlms/jdm073