Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(1), 103-108
Published Online January 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.121014

Hans汉斯

一类传递置换群的极小基

陈媛媛

云南师范大学数学系，云南 昆明

收稿日期：2021年12月7日；录用日期：2022年1月13日；发布日期：2022年1月20日

摘 要

群G作用在有限集合Ω上，$\Delta\subseteq\Omega$，$G_{(\Delta)}=\left\{x\in G\,\middle|\,\delta^x=\delta,\forall\delta\in\Delta\right\}$称为$G$在$\Delta$上的逐点稳定子。若$G_{(\Delta)}=1$，则称$\Delta$为$G$群的基。若$\Sigma\subseteq\Omega$是使得$G_{(\Sigma)}=1$成立的最小集合，则称$\Sigma$为群$G$的极小基。本文计算出对称群$S_d$与$S_r$的圈积$S_d\ wr\ S_r$以及它的子群$D_{2r}\ wr\ S_r$，$Z_r\ wr\ S_r$在某种非本原作用下的极小基。

关键词

对称群，圈积，非本原作用，极小基

Minimal Bases of a Class of Transitive Permutation Groups

Yuanyuan Chen

School of Mathematics, Yunnan Normal University, Kunming Yunnan

Received: Dec. 7th, 2021; accepted: Jan. 13th, 2022; published: Jan. 20th, 2022

Abstract

A group G acting on a finite set Ω, $\Delta\subseteq\Omega$, $G_{(\Delta)}=\left\{x\in G\,\middle|\,\delta^x=\delta,\forall\delta\in\Delta\right\}$ is called a pointwise stabilizer on G. If $G_{(\Delta)}=1$, Δ is called the basis of group G. If $\Sigma\subseteq\Omega$ is the smallest set that makes $G_{(\Sigma)}=1$ true, then Σ is called the minimal basis of group G. In this paper, the wreath product $S_d\ wr\ S_r$ of symmetric groups S_d and S_r, the minimal basis of its subgroups $D_{2r}\ wr\ S_r$ and

文章引用: 陈媛媛. 一类传递置换群的极小基[J]. 理论数学, 2022, 12(1): 103-108.
DOI: 10.12677/pm.2022.121014

Z_r wr S_r under some imprimitive action are calculated.

Keywords

Symmetric Group, Cycle Product, Imprimitive Action, Minimal Basis

1. 引言

基是研究向量空间和线性变换的一个非常重要和有用的工具。尤其在线性变换中，每一个线性变换完全取决于它在基上的作用。类似的，在研究置换群的过程中，基也是有用的工具。设 G 作用在集合 Ω 上，Ω 的子集 Σ 被称为 G 的基，若满足 $G_{(\Sigma)}=1$；换句话说，在群 G 中有且仅有单位元能稳定 Σ 中的所有元素。在 Dixon 的经典著作[1]中给出了基的一些相关命题。

有限本原群的研究已经有了一些成果，具体参见 Cameron (1981) [2]和 Praeger (1990) [3]。对于极小基的研究，Burness 在[4]中给出了点稳定子属于 S-collection 的有限典型群的 base sizes，他对有限散在单群的 base sizes 也进行了讨论，具体参考[5]。Fawcett，Praeger 在[6]中给出了非本原线性群的 base sizes。在[7]中，Libeck 对本原置换群的 base sizes 进行讨论。而本文主要利用圈积构造一些传递置换群，确定它们在某种非本原作用下的极小基和 base sizes。

2. 预备知识

本节主要给出一些本文中要用到的基本概念及结果。

定义 2.1 [1]非空集合 Ω 到自身的一个双射，称为 Ω 的一个置换。Ω 中全体置换构成的群，称为 Ω 上的**对称群**，记作 $sym(\Omega)$。

定义 2.2 [1]设 Ω 是一个非空集合，其中的元素称为一个点，群 G 在 Ω 上的一个作用是指 G 到 $sym(\Omega)$ 上的一个**同态**，即：

1) $\alpha^1=\alpha$，$\forall \alpha\in\Omega$，其中 1 代表 G 中的单位元；

2) $\left(\alpha^x\right)^y=\alpha^{xy}$，$\forall \alpha\in\Omega$，$\forall x,y\in G$。

定义 2.3 [8]设 N,F 为两个抽象群。$\sigma: F\to Aut(N)$ 是同态映射，则 N 与 F 的**半直积** G 为：

$$G=N:F=\left\{(x,a)\middle|x\in N,a\in F\right\},$$

运算为 $(x,a)(y,b)=\left(xy^{\sigma(a)^{-1}},ab\right)$。

定义 2.4 **[8]**设 G 是群，H 是有限集合 $\Omega=\{1,2,\cdots,n\}$ 上的置换群 $(H\le S_n)$，设 N 是 n 个 G 的**直积**：$N=\underbrace{G\times\cdots\times G}_{n个}$，对于任意 $h\in H$，映射 $\sigma(h)$ 是 N 的一个**自同构**：

$$\left(g_1,g_2,\cdots,g_n\right)^{\sigma(h)}=\left(g_{1^{h^{-1}}},g_{2^{h^{-1}}},\cdots,g_{n^{h^{-1}}}\right)$$

可作 N 与 H 的半直积 $N:H=G^n:H$，叫做 G 和 H 的**圈积**，记作 $G\ wr\ H$。

$$G\ wr\ H=\left\{(g_1,g_2,\cdots,g_n;h)\middle|g_i\in G,h\in H\right\}.$$

定义 2.5 [8]群 G 作用在有限集合 Ω 上，$\Delta\subseteq\Omega$，$G_{(\Delta)}=\left\{x\in G\middle|\delta^x=\delta,\forall\delta\in\Delta\right\}$ 称为 G 在 Δ 上的**逐点稳定子**。若 $G_{(\Delta)}=1$，则称 Δ 为群 G 的**基**。若 $\Sigma\subseteq\Omega$ 是使得 $G_{(\Sigma)}=1$ 成立的最小集合，则称 Σ 为群 G 的**极小基**。

3. 传递置换群在非本原作用下的极小基

定理 3.1 设 $\Delta=\{\delta_1,\cdots,\delta_d\}$，$\Omega=\{1,\cdots,r\}$ 对称群 S_d 与 S_r 的圈积 $S_d\ wr\ S_r$ 非本原作用在 dr 个点上的极小基形如：

$$\Sigma=\left\{(\delta_{i_1},1),\cdots,(\delta_{i_1},r),(\delta_{i_2},1),\cdots,(\delta_{i_2},r),\cdots,(\delta_{i_{d-1}},1),\cdots,(\delta_{i_{d-1}},r)\right\},$$

其中 $i_1,i_2,\cdots,i_{d-1}$ 为集合 $\{1,2,\cdots,d-1\}$ 中任意 $d-1$ 个元素，$|\Sigma|=(d-1)r$。

证明： 令 $K=S_d$，$H=S_r$，$\Delta=\{\delta_1,\cdots,\delta_d\}$，$\Omega=\{1,\cdots,r\}$，

$$G=K\ wr\ H=\underbrace{(K\times K\times\cdots\times K)}_{n个}:H=\left\{(k_1,k_2,\cdots,k_r;h)\middle|k_i\in K,h\in H\right\}$$

设 $\Gamma=\Delta\times\Omega=\{(\delta_1,1),(\delta_1,2),\cdots,(\delta_1,r),\cdots,(\delta_d,1),(\delta_d,2),\cdots,(\delta_d,r)\}$，故 $|\Gamma|=dr$，群 G 在集合 Γ 的非本原作用如下：

$$\varphi:G\to S_\Gamma$$

$$x\mapsto\varphi(x):(\delta,i)^x=(\delta,i)^{(k_1,k_2,\cdots,k_r;h)}=\left(\delta^{k_i},i^h\right)$$

下面考虑逐点稳定子 $G_{(\Sigma)}=1$ 时，Σ 中有哪些元素。

令 $\alpha_1=(\delta_1,1)$，$\alpha_2=(\delta_1,2)$，$\cdots$，$\alpha_r=(\delta_1,r)$，则：

$$G_{\alpha_1}=\left\{(k_1,k_2,\cdots,k_r;h)\in G\middle|\alpha_1^{(k_1,k_2,\cdots,k_r;h)}=\alpha_1\right\}=\left\{(k_1,k_2,\cdots,k_r;h)\in G\middle|(\delta_1,i)^{(k_1,k_2,\cdots,k_r;h)}=\left(\delta_1^{k_1},1^h\right)=(\delta_1,1)\right\}$$

$$G_{\alpha_2}=\left\{(k_1,k_2,\cdots,k_r;h)\in G\middle|\alpha_2^{(k_1,k_2,\cdots,k_r;h)}=\alpha_2\right\}=\left\{(k_1,k_2,\cdots,k_r;h)\in G\middle|(\delta_1,i)^{(k_1,k_2,\cdots,k_r;h)}=\left(\delta_1^{k_2},2^h\right)=(\delta_1,2)\right\}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}G_{\alpha_r}&=\left\{(k_1,k_2,\cdots,k_r;h)\in G\middle|\alpha_r^{(k_1,k_2,\cdots,k_r;h)}=\alpha_r\right\}=\left\{(k_1,k_2,\cdots,k_r;h)\in G\middle|(\delta_1,i)^{(k_1,k_2,\cdots,k_r;h)}=\left(\delta_1^{k_r},r^h\right)=(\delta_1,r)\right\}\\&=\left\{(k_1,k_2,\cdots,k_r;h)\in G\middle|k_r\in K_{\delta_1},h\in H_r\right\}\end{aligned}$$

故

$$G_{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r}=\left\{(k_1,k_2,\cdots,k_r;h)\in G\middle|k_1,k_2,\cdots,k_r\in K_{\delta_1},h\in H_{1,2,\cdots,r}\right\}=\left\{(k_1,k_2,\cdots,k_r;1)\in G\middle|k_1,k_2,\cdots,k_r\in K_{\delta_1}\right\}$$

因为 $K=S_d$，所以要使 $G_{(\Sigma)}=(1,1,\cdots,1;1)=1$，则 K 至少要稳定 $(d-1)$ 个点，即 $K_{\delta_1\delta_2\cdots\delta_{d-1}}=S_{\{\delta_d\}}=1$，故：

$$G_{(\Sigma)}=\left\{(k_1,k_2,\cdots,k_r;h)\middle|k_i\in K_{\delta_1\delta_2\cdots\delta_{d-1}},h\in H_{12\cdots r}\right\}=1,$$

所以群 $G=K\ wr\ H=S_d\ wr\ S_r$ 非本原作用在 $\Gamma=\Delta\times\Omega$ 上的极小基形如：

$$\Sigma=\left\{(\delta_{i_1},1),\cdots,(\delta_{i_1},r),(\delta_{i_2},1),\cdots,(\delta_{i_2},r),\cdots,(\delta_{i_{d-1}},1),\cdots,(\delta_{i_{d-1}},r)\right\},\quad|\Sigma|=(d-1)r.$$

定理 3.2： 设 $\Omega=\{1,\cdots,r\}$，当 r 为偶数时，二面体群 D_{2r} 与对称群 S_r 的圈积 $D_{2r}\ wr\ S_r$ 非本原作用在 r^2 个点上的极小基形如 $\Sigma=\{(i,1),\cdots,(i,r),(j,1),\cdots,(j,r)\}$，其中 $j\neq i+\frac{r}{2}$，$|\Sigma|=2r$。

当 r 为奇数时，极小基形如 $\Sigma=\{(i,1),\cdots,(i,r),(j,1),\cdots,(j,r)\}$，其中任意 $i,j\in\Omega$，$|\Sigma|=2r$。

证明： 令 $N=D_{2r}$，$H=S_r$

$$G=D_{2r}\ wr\ S_r=\underbrace{(D_{2r}\times D_{2r}\times\cdots\times D_{2r})}_{r个}:S_r=\{(n_1,n_2,\cdots,n_r;h)\mid n_i\in N,h\in H\}$$

设 $\Gamma=\Omega\times\Omega=\{(1,1),(1,2),\cdots,(1,r),\cdots,(r,1),(r,2),\cdots,(r,r)\}$，**则** $|\Gamma|=r^2$。

群 G 在集合 Γ 上的作用同定理 3.1，现在考虑逐点稳定子 $G_{(\Sigma)}=1$ 时，Σ 中有哪些元素。

首先考虑二面体群 D_{2r} 的点稳定子群：

我们知道二面体群的点稳定子 $(D_{2r})_i=\{(1),x\}$，其中 x 为二阶元，下面考虑什么时候二面体群的点稳定子为 1。

情况 1： r 为偶数时，$D_{2r}=\left\langle(1,2,3,\cdots,r),(2,r)(3,r-1)\cdots\left(\frac{r}{2},\frac{r+4}{2}\right)\right\rangle$。

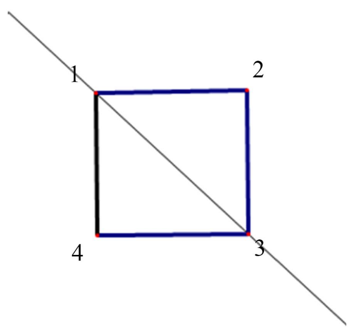
那么此时由二面体群的生成元可知当 $i\neq j+\frac{r}{2}$ 时，$(D_{2r})_{i,j}=1$。所以当 r 为偶数时，使得逐点稳定子 $G_{(\Sigma)}=1$ 的最小集合为：

$$\Sigma=\{(i,1),(i,2),\cdots,(i,r),(j,1),(j,2),\cdots,(j,r)\}，其中 j\neq i+\frac{r}{2}。$$

即当 r 为偶数时，$G=D_{2r}\ wr\ S_r$ 非本原作用在 Γ 上极小基形如 Σ，$|\Sigma|=2r$。

例如：

当 $r=4$ 时，$\Omega=\{1,2,3,4\}$，二面体群 $D_8=\langle(1,2,3,4),(2,4)\rangle$，如下图所示：

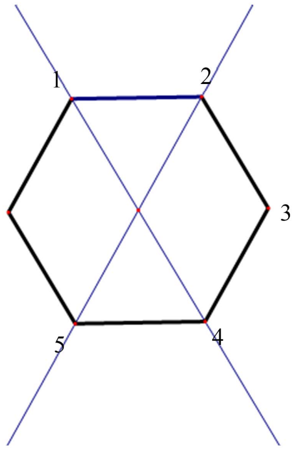


稳定点 1，就要稳定点 3，故 D_8 中稳定一个点的只有单位元与一个二阶元，即 $(D_8)_1=(D_8)_3=\{(1),(2,4)\}$，$(D_8)_2=(D_8)_4=\{(1),(1,3)\}$，故有：

$$(D_8)_{1,2}=(D_8)_{1,4}=(D_8)_{2,3}=(D_8)_{3,4}=\{(1)\}=1$$

$$3=1+\frac{r}{2}=1+\frac{4}{2}，\quad 4=2+\frac{r}{2}=2+\frac{4}{2}$$

当 $r=6$ 时，$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$，二面体群 $D_{12}=\langle(1,2,3,4,5,6),(2,6)(3,5)\rangle$，如下图所示：



则有 $(D_{12})_1=(D_{12})_4=\{(1),(2,6)(3,5)\}$，$(D_{12})_2=(D_{12})_5=\{(1),(1,3)(4,6)\}$，$(D_{12})_3=(D_{12})_6=\{(1),(1,5)(2,4)\}$

$$4=1+\frac{r}{2}=1+\frac{6}{2}，\quad 5=2+\frac{r}{2}=2+\frac{6}{2}，\quad 6=3+\frac{r}{2}=3+\frac{6}{2}$$

情况 2：当 r 为奇数时，二面体群：

$$D_{2r}=\left\langle (1,2,\cdots,r),(2,r)(3,r-1)\cdots\left(\frac{r+1}{2},\frac{r+3}{2}\right)\right\rangle$$

此时稳定 Ω 中任意一个元素的也只有单位元与一个二阶元，故可知：

$(D_{2r})_{i,j}=\{(1)\}=1$ 其中 $i,j\in\Omega$，所以当 r 为奇数时，$G=D_{2r}\ wr\ S_r$ 非本原作用在 Γ 上极小基形如 $\Sigma=\{(i,1),(i,2),\cdots,(i,r),(j,1),(j,2),\cdots,(j,r)\}$，其中 $i,j\in\Omega$，$|\Sigma|=2r$。

定理 3.3：设 $\Omega=\{1,\cdots,r\}$，循环群 Z_r 与对称群 S_r 的圈积 $Z_r\ wr\ S_r$，非本原作用在 r^2 个点上的极小基形如 $\Sigma=\{(i,1),\cdots,(i,r)\}$，其中任意 $i\in\Omega$，$|\Sigma|=r$。

证明：令 $G=Z_r\ wr\ S_r=(Z_r\times Z_r\times\cdots\times Z_r):S_r$，$\Omega=\{1,2,\cdots,r\}$

$$\Gamma=\Omega\times\Omega=\{(1,1),(1,2),\cdots,(1,r),\cdots,(r,1),(r,2),\cdots,(r,r)\}，\quad |\Gamma|=r^2$$

G 在集合 Γ 上的作用同以上两个定理，现在同样考虑逐点稳定子 $G_{(\Sigma)}=1$ 时，Σ 中有哪些元素。

因为 Z_r 本原正则作用在 $\Omega=\{1,2,\cdots,r\}$ 上，故任意 $i\in\Omega$ 有 $(Z_r)_i=1$，则要使逐点稳定子 $G_{(\Sigma)}=(1,1,\cdots,1;1)=1$，需要稳定 $(i,1),(i,2),\cdots,(i,r)$ 这 r 个点，其中任意 $i\in\Omega$。

故群 $G=Z_r\ wr\ S_r$ 非本原作用在 Γ 上的极小基 $\Sigma=\{(i,1),(i,2),\cdots,(i,r)\}$，任意 $i\in\Omega$，且 $|\Sigma|=r$。

参考文献

[1] Dixon, J.D. and Mortimer, B. (1996) Permutation Groups. In: *Graduate Text in Mathematic*, Springer-Verlag, Berlin. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0731-3

[2] Cameron, P.J. (1981) Finite Permutation Groups and Finite Simple Groups. *Bulletin of the London Mathematical Society*, **13**, 1-22. https://doi.org/10.1112/blms/13.1.1

[3] Praeger, C.E. (1990) Finite Permutation Groups: A Survey, Groups-Canberra. In: *Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin, Vol. 1456, 63-84. https://doi.org/10.1007/BFb0100731

[4] Burness, T.C., Guralnick, R.M. and Saxl, J. (2014) Base Sizes for S-Actions of Finite Classical Groups. *Israel Journal*

of Mathematics, **199**, 711-756. https://doi.org/10.1007/s11856-013-0059-y

[5] Burness, T.C., O'Brien, E.A. and Wilson, R.A. (2010) Base Sizes for Sporadic Simple Groups. *Israel Journal of Mathematics*, **177**, 307-333. https://doi.org/10.1007/s11856-010-0048-3

[6] Fawcett, J.B. and Praeger, C.E. (2016) Base Sizes of Imprimitive Linear Groups and Orbits of General Linear Groups on Spanning Tuples. *Archiv der Mathematik*, **106**, 305-314. https://doi.org/10.1007/s00013-016-0890-6

[7] Liebeck, M.W. (1984) On Minimal Degrees and Base Sizes of Primitive Permutation Groups. *Archiv der Mathematik*, **43**, 11-15. https://doi.org/10.1007/BF01193603

[8] 徐明耀. 有限群导引(上册) [M]. 北京: 科学出版社, 2001.