Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(3), 384-391
Published Online March 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.123042

非对称损失函数下对数伽玛分布尺度参数的Bayes估计

柔鲜古丽·许库尔*，**周菊玲#**

新疆师范大学数学科学学院，新疆 乌鲁木齐

收稿日期：2022年2月11日；录用日期：2022年3月14日；发布日期：2022年3月21日

摘 要

损失函数和先验分布的选取在Bayes估计问题中起重要作用。已有众多学者在不同损失函数，不同先验分布下研究了对数伽玛分布尺度参数的Bayes估计问题。本文基于Quasi先验分布分别在Linex损失与熵损失函数下，研究了对数伽玛分布尺度参数的Bayes估计。并给出了其在熵损失函数下的E-Bayes估计和多层Bayes估计。最后通过数值模拟方法对各种估计结果的优良性进行比较分析，结果表明，先验分布为Quasi分布时，尺度参数θ的Linex损失函数下的Bayes估计较熵损失函数下的稳健性更好，更接近真值。

关键词

对数伽玛分布，尺度参数，Linex损失函数，熵损失函数

Bayes Estimation of Scale Parameter of Log Gamma Distribution under Asymmetric Loss Function

Rouxianguli Xukuer*, Juling Zhou#

School of Mathematics and Science, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: Feb. 11th, 2022; accepted: Mar. 14th, 2022; published: Mar. 21st, 2022

Abstract

The selection of loss function and prior distribution plays an important role in Bayes estimation.

*第一作者。
#通讯作者。

文章引用: 柔鲜古丽·许库尔, 周菊玲. 非对称损失函数下对数伽玛分布尺度参数的 Bayes 估计[J]. 理论数学, 2022, 12(3): 384-391. DOI: 10.12677/pm.2022.123042

Many scholars have studied the Bayes estimation of log-gamma distribution scale parameter under different loss function and different prior distribution. Based on Quasi-prior distribution and Linex loss function and entropy loss function respectively, the Bayes of log-gamma distribution scale parameter is studied. And its E-Bayes estimation and multilayer Bayes estimation under entropy loss function are given. Finally, the numerical simulation method is used to compare the robustness of various estimation results. The results show that when the prior distribution is Quasi, the Bayes estimation under the Linex loss function of the scale parameter theta is more stable and accurate than that under the entropy loss function.

Keywords

Log Gamma Distribution, Scale Parameter, Linex Loss Function, Entropy Loss Function

1. 引言

在统计决策理论中，参数估计的优劣很大程度上依赖于损失函数形式的选择。Linex 损失函数自 Varian [1]提出以来，已被众多学者应用于参数估计中。王琪等[2]研究了 Linex 和熵损失这两类非对称损失函数下逆指数分布参数的 Bayes 估计。王成元等[3]对对数伽玛分布尺度参数在 Linex 损失与复合 Linex 损失函数下的 Bayes 估计进行了比较。金秀岩[4]研究了复合 MLinex 对称损失函数下对数伽玛分布参数的 Bayes 估计。对数伽玛分布常应用于风险理论[5]、油气资源评价[6]等领域。

设随机变量服从对数伽玛分布，其概率密度函数为

$$f(x;\theta,\alpha)=\frac{\theta^{\alpha}(\ln x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}x^{-(\theta+1)}, x>0, \alpha>0, \theta>0 \tag{1}$$

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自对数伽玛模型的一个简单样本，则对其 n 个独立观测值 $x_1,\cdots,x_n$ 得到似然函数为

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)&=\frac{\theta^{n\alpha}}{[\Gamma(\alpha)]^n}\prod_{i=1}^{n}(\ln x_i)^{\alpha-1}(x_1x_2\cdots x_n)^{-(\theta+1)} \\ &=\frac{\theta^{n\alpha}}{[\Gamma(\alpha)]^n}\prod_{i=1}^{n}(\ln x_i)^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-(\theta+1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}\propto\theta^{n\alpha}\mathrm{e}^{-\theta t} \end{aligned} \tag{2}$$

其中 $t=\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$ 。

设参数 θ 的先验分布为无信息 Quasi 先验分布，相应的概率密度函数为

$$\pi(\theta)\propto\frac{1}{\theta^{d}}, \theta>0, d>0 \tag{3}$$

当 $d=0$ 时，$\pi(\theta)\propto 1$ 为离散先验分布；当 $d=1$ 时，$\pi(\theta)\propto\frac{1}{\theta}$ 为无信息先验分布。

定义 1 [1]定义 Linex 损失函数如下式

$$L_a\left(\theta,\delta\right)=\mathrm{e}^{a(\delta-\theta)}-a\left(\delta-\theta\right)-1,\quad\left(a>0\right)\tag{4}$$

其中 δ 为参数 θ 的估计，a 是该损失函数的尺度参数，$a\neq0$。

事实上对 δ 求偏导得 $L'\left(\theta,\delta\right)=a\mathrm{e}^{a(\delta-\theta)}-a$，任取 $0<\delta_1<\delta_2$ 则有 $L'\left(\theta,\delta_1\right)-L'\left(\theta,\delta_2\right)=a\left(\mathrm{e}^{a(\delta_1-\theta)}-\mathrm{e}^{a(\delta_2-\theta)}\right)<0$，所以 Linex 损失函数关于 δ 是严格凸函数。

定义 2 [7]定义熵损失函数如下式

$$L\left(\theta,\delta\right)=\frac{\delta}{\theta}-\ln\frac{\delta}{\theta}-1\tag{5}$$

事实上对 δ 求偏导得 $L'\left(\theta,\delta\right)=\frac{1}{\theta}-\frac{1}{\delta}$，任取 $0<\delta_1<\delta_2$ 则有 $L'\left(\theta,\delta_1\right)-L'\left(\theta,\delta_2\right)=\frac{\delta_1-\delta_2}{\delta_1\delta_2}<0$，所以熵损失函数对于 δ 是严格凸函数。

定义 3 [8]对 $\left(\beta,\lambda\right)\in D$，若 $\delta_B\left(\beta,\lambda\right)$ 是连续的，则称

$$\delta_{EB}=\iint_D\delta_B\left(\beta,\lambda\right)\pi\left(\beta,\lambda\right)\mathrm{d}\beta\mathrm{d}\lambda\tag{6}$$

是参数 θ 的 E-Bayes 估计。其中 $\iint_D\delta_B\left(\beta,\lambda\right)\pi\left(\beta,\lambda\right)\mathrm{d}\beta\mathrm{d}\lambda$ 是存在的，D 为超参数 β 和 λ 取值的集合，$\pi\left(\beta,\lambda\right)$ 是 β 和 λ 在集合 D 上的密度函数，$\delta_B\left(\beta,\lambda\right)$ 为 θ 的 Bayes 估计。

引理 1 [9]在 Linex 损失函数(4)下，对任何先验分布 $\pi\left(\theta\right)$，θ 唯一的 Bayes 估计为

$$\delta_B\left(x\right)=-\frac{1}{a}\ln\left(E\left(\mathrm{e}^{-a\theta}\mid X\right)\right)\tag{7}$$

引理 2 [2]在熵损失函数(5)下，对任何先验分布 $\pi\left(\theta\right)$，θ 唯一的 Bayes 估计为

$$\delta_B\left(x\right)=\left[E\left(\theta^{-1}\mid X\right)\right]^{-1}\tag{8}$$

关于对数伽玛分布尺度参数的先验分布为 Quasi 分布时，在非对称损失函数下的 Bayes 估计文献研究较少，为此，在 Linex 损失与熵损失这两种非对称损失函数下研究了对数伽玛分布尺度参数的 Bayes 估计，最后得出：当先验分布同为 Quasi 先验分布时，Linex 损失函数下的 Bayes 估计的稳健性较熵损失函数下的 Bayes 估计稳健性更好，更接近真值。本文共有三部分，第一部分主要介绍研究背景；第二部分为主要结果，在 Linex 损失函数，熵损失函数下研究了参数 θ 的 Bayes 估计以及当先验分布改为伽玛分布时，推导出了尺度参数 θ 在熵损失函数下的 E-Bayes 估计和多层 Bayes 估计；最后一个部分通过 R 软件进行数值模拟，比较了各估计值的精确性和稳健性。

2. 主要结果

2.1. 参数 θ 的 Bayes 估计

在损失函数(4)，(5)下，结合引理 1、引理 2 讨论对数伽玛分布的尺度参数 θ 的 Bayes 估计问题。

引理 3 设随机变量 X 服从对数伽玛分布(1)，参数 θ 的先验分布 $\pi\left(\theta\right)$ 为 Quasi 先验分布，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是服从对数伽玛分布的一个简单样本，记 $X=\left(X_1,\cdots,X_n\right)$，$T=\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$ 则 θ 的后验分布服从 $Gamma\left(n\alpha-d+1,T\right)$。

证明 由(2)式可知 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的 n 个独立观察值 $x_1,\cdots,x_n$ 的似然函数。再由(3)式及 Bayes 定理，参数 θ 的后验密度函数为

$$f\left(\theta\mid x\right)\propto f\left(x_1,\cdots,x_n;\theta\right)\pi\left(\theta\right)\propto\theta^{n\alpha-d}\mathrm{e}^{-\theta t}\tag{9}$$

于是 $\theta|x \sim Gamma(n\alpha-d+1,t)$，所以 $\theta|X \sim Gamma(n\alpha-d+1,T)$。

引理 4 [10]在给定的 Bayes 统计决策问题中，假如对给定的先验分布 $\pi(\theta)$，θ 的 Bayes 估计 δ_B 是唯一的，则它也是容许的。

定理 1 在 Linex 非对称损失函数下，假设对数伽玛分(1)的尺度参数 θ 的先验分布为 Quasi 先验分布，则尺度参数 θ 的 Bayes 估计为

$$\delta_B(x)=\frac{n\alpha-d+1}{a}\ln\frac{a}{T} \tag{10}$$

证明 由引理 3 知参数 θ 的后验密度函数为

$$H(\theta|x)=\frac{T^{n\alpha-d+1}}{\Gamma(n\alpha-d+1)}\theta^{n\alpha-d}\mathrm{e}^{-T\theta} \tag{11}$$

又

$$\begin{aligned}E\left(\mathrm{e}^{-a\theta}|X\right)&=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-a\theta}\frac{T^{n\alpha-d+1}}{\Gamma(n\alpha-d+1)}\theta^{n\alpha-d}\mathrm{e}^{-T\theta}\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^\infty\frac{T^{n\alpha-d+1}}{\Gamma(n\alpha-d+1)}\theta^{n\alpha-d}\mathrm{e}^{-(a+T)\theta}\mathrm{d}\theta\\&=\frac{T^{n\alpha-d+1}}{(a+T)^{n\alpha-d+1}}\int_0^\infty\frac{(a+T)^{n\alpha-d+1}}{\Gamma(n\alpha-d+1)}\theta^{n\alpha-d}\mathrm{e}^{-(a+T)\theta}\mathrm{d}\theta\\&=\left(\frac{T}{a+T}\right)^{n\alpha-d+1}\end{aligned} \tag{12}$$

则由引理 1 得尺度参数 θ 的 Bayes 估计为

$$\delta_B(x)=E\left(\mathrm{e}^{-a\theta}|X\right)=-\frac{1}{a}\ln\left(\frac{T}{a+T}\right)^{n\alpha-d+1}=\frac{n\alpha-d+1}{a}\ln\frac{T+a}{T} \tag{13}$$

定理 2 在熵损失函数下，假设对数伽玛分布(1)的尺度参数 θ 的先验分布为 Quasi 先验分布，则尺度参数 θ 的 Bayes 估计为

$$\delta_B(x)=\frac{n\alpha-d}{T} \tag{14}$$

运用引理 2 证明，证明过程类似定理 1。

定理 3 在熵损失函数下，对数伽玛分布(1)的尺度参数 θ 的先验分布为伽玛分布 $Gamma(\beta,\lambda)$，则尺度参数 θ 的 Bayes 估计为

$$\delta_B(x)=\frac{n\alpha+\beta-1}{T+\lambda} \tag{15}$$

2.2. 参数 θ 的 E-Bayes 估计

在定理 3 的前提下讨论尺度参数 θ 的 E-Bayes 估计。先验分布为伽玛分布时，根据文献[11]的减函数法，β 和 λ 的选取应使先验分布 $\pi(\theta;\beta,\lambda)=\frac{\lambda^\beta}{\Gamma(\beta)}\theta^{\beta-1}\exp\{-\lambda\theta\}$ 为 θ 的单调减函数。

因为 $\pi(\theta;\beta,\lambda)$ 对 θ 求导数为 $\frac{\mathrm{d}\pi(\theta;\beta,\lambda)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{\lambda^\beta\theta^{\beta-2}\mathrm{e}^{-\lambda\theta}}{\Gamma(\beta)}\left[(\beta-1)-\lambda\theta\right]$。由伽玛分布的定义知，$\beta>0$，

$\lambda>0$，$\theta>0$。所以，当$0<\beta<1$，$\lambda>0$时，$\frac{\mathrm{d}\pi(\theta;\beta,\lambda)}{\mathrm{d}\theta}<0$，即$\pi(\theta;\beta,\lambda)$为$\theta$的单调减函数。然后由定义3，超参数$\beta,\lambda$的先验分布可以采取均匀分布的形式，即

$$\pi(\beta)=U(0,1)\text{，}\quad \pi(\lambda)=U(0,c)\text{，其中 } c>0 \text{ 为 } \lambda \text{ 的上界。}$$

定理4 在熵损失函数下，对于对数伽玛分布(1)，若尺度参数θ的先验分布$Gamma(\beta,\lambda)=\frac{\lambda^{\beta}}{\Gamma(\beta)}\theta^{\beta-1}\mathrm{e}^{-\lambda\theta}$的超参数$\beta,\lambda$的先验分布为$D$上的均匀分布，则尺度参数$\theta$的E-Bayes估计为

$$\delta_{EB}(x)=\frac{1}{c}\left(n\alpha-\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{T+c}{T}\right)\tag{16}$$

证明 由假设知超参数β,λ的先验分布为$\pi(\beta,\lambda)=\frac{1}{c}$，其中$\delta_B(x)$是由定理3得知，即是在熵损失函数下，对数伽玛分布(1)的尺度参数θ的先验分布为伽玛分布时，尺度参数θ的Bayes估计，其为$\delta_B(x)=\frac{n\alpha+\beta-1}{T+\lambda}$。根据定义3得

$$\begin{aligned}\delta_{EB}(x)&=\iint_D\delta_B(x)\pi(\beta,\lambda)\mathrm{d}\beta\mathrm{d}\lambda\\&=\int_0^1\int_0^c\frac{1}{c}\frac{n\alpha+\beta-1}{\lambda+T}\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\beta\\&=\frac{1}{c}\int_0^1(n\alpha+\beta-1)\int_0^c\frac{1}{\lambda+T}\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\beta\\&=\frac{1}{c}\ln\left(\frac{T+c}{T}\right)\int_0^1(n\alpha+\beta-1)\mathrm{d}\beta\\&=\frac{1}{c}\left(n\alpha-\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{T+c}{T}\right)\end{aligned}$$

2.3. 参数θ的多层 Bayes 估计

最后根据上面的讨论推导出尺度参数θ的多层Bayes估计。

若参数θ的先验分布为$Gamma(\beta,\lambda)$，将$(0,1)$，$(0,c)$上的均匀分布作为超参数β和λ的先验分布，则θ的多层先验密度函数为

$$\pi(\theta)=\int_0^1\int_0^c\pi(\theta;\beta,\lambda)\pi(\beta)\pi(\lambda)\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\beta=\frac{1}{c}\int_0^1\int_0^c\frac{\lambda^{\beta}}{\Gamma(\beta)}\theta^{\beta-1}\mathrm{e}^{-\lambda\theta}\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\beta\tag{17}$$

定理5 对于对数伽玛分布(1)，若参数θ的先验分布密度函数由(17)式给出，则在熵损失函数下，参数θ的多层Bayes估计为

$$\delta_{HB}(x)=\frac{\int_0^1\int_0^c\frac{\lambda^{\beta}}{\Gamma(\beta)}\frac{\Gamma(n\alpha+\beta)}{(T+\lambda)^{n\alpha+\beta}}\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\beta}{\int_0^1\int_0^c\frac{\lambda^{\beta}}{\Gamma(\beta)}\frac{\Gamma(n\alpha+\beta-1)}{(T+\lambda)^{n\alpha+\beta-1}}\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\beta}\tag{18}$$

证明 由θ的先验分布密度函数(17)式，所以θ的后验密度函数为

$$
\begin{aligned}
h(\theta\mid x)&=\frac{\pi(\theta)f(x_1,\cdots,x_n;\theta,\alpha)}{\int_0^{\infty}\pi(\theta)f(x_1,\cdots,x_n;\theta,\alpha)\mathrm{d}\theta}=\frac{\int_0^1\int_0^c\frac{\lambda^{\beta}}{\Gamma(\beta)}\theta^{n\alpha+\beta-1}\mathrm{e}^{-(T+\lambda)\theta}\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\beta}{\int_0^{\infty}\int_0^1\int_0^c\frac{\lambda^{\beta}}{\Gamma(\beta)}\theta^{n\alpha+\beta-1}\mathrm{e}^{-(T+\lambda)\theta}\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\beta\mathrm{d}\theta}\\
&=\frac{\int_0^1\int_0^c\frac{\lambda^{\beta}}{\Gamma(\beta)}\theta^{n\alpha+\beta-1}\mathrm{e}^{-(T+\lambda)\theta}\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\beta}{\int_0^1\int_0^c\frac{\lambda^{\beta}}{\Gamma(\beta)}\frac{\Gamma(n\alpha+\beta)}{(T+\lambda)^{n\alpha+\beta}}\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\beta}
\end{aligned}
\tag{19}
$$

其中 $T=\sum_{i=1}^{n}\ln X_i$。

$$
\begin{aligned}
E(\theta^{-1}\mid X)&=\frac{\int_0^{\infty}\int_0^1\int_0^c\frac{\lambda^{\beta}}{\Gamma(\beta)}\theta^{n\alpha+\beta-2}\mathrm{e}^{-(T+\lambda+a)\theta}\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\beta\mathrm{d}\theta}{\int_0^1\int_0^c\frac{\lambda^{\beta}}{\Gamma(\beta)}\frac{\Gamma(n\alpha+\beta)}{(T+\lambda)^{n\alpha+\beta}}\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\beta}\\
&=\frac{\int_0^1\int_0^c\frac{\lambda^{\beta}}{\Gamma(\beta)}\frac{\Gamma(n\alpha+\beta-1)}{(T+\lambda)^{n\alpha+\beta-1}}\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\beta}{\int_0^1\int_0^c\frac{\lambda^{\beta}}{\Gamma(\beta)}\frac{\Gamma(n\alpha+\beta)}{(T+\lambda)^{n\alpha+\beta}}\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\beta}
\end{aligned}
\tag{20}
$$

3. 数值模拟

下面用 R 软件进行数值模拟：取形状参数 $\alpha=2$，尺度参数 $\theta=0.82$ 的对数伽玛分布 $n=50$ 个随机数，由式 $T=\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$ 计算可得 $T=79.7130$。分别根据定理 1、定理 2 计算先验分布为 Quasi 先验分布时，不同损失函数下对数伽玛分布参数 θ 的 Bayes 估计值 δ_B。

1) Linex 损失函数下 Quasi 分布为先验分布时，尺度参数 θ 的 Bayes 估计值 δ_B。见表 1：

Table 1. Parameter estimation of parameter theta under Linex loss function
表 1. Linex 损失下参数 θ 的参数估计

δ_B	$a=97$	$a=98$	$a=99$	$a=100$	$a=101$	极差	MSE
$d=0.1$	0.8281	0.8254	0.8228	0.8202	0.8176	0.0105	2.2×10^{-5}
$d=0.2$	0.8272	0.8246	0.8220	0.8194	0.8168	0.0104	1.8×10^{-5}
$d=0.3$	0.8264	0.8238	0.8212	0.8186	0.8160	0.0104	1.5×10^{-5}
$d=0.4$	0.8256	0.8230	0.8203	0.8178	0.8152	0.0104	1.4×10^{-5}
$d=0.5$	0.8248	0.8221	0.8195	0.8169	0.8144	0.0104	1.4×10^{-5}
$d=0.6$	0.8239	0.8213	0.8187	0.8161	0.8136	0.0103	1.5×10^{-5}
$d=0.7$	0.8231	0.8205	0.8179	0.8153	0.8128	0.0103	1.8×10^{-5}
$d=0.8$	0.8223	0.8197	0.8171	0.8145	0.8119	0.0104	2.2×10^{-5}
$d=0.9$	0.8215	0.8189	0.8163	0.8137	0.8111	0.0104	2.7×10^{-5}
极差	0.0066	0.0065	0.0065	0.0065	0.0065		
MSE	4.9×10^{-5}	1.6×10^{-5}	8.4×10^{-6}	2.5×10^{-5}	5.2×10^{-5}		

2) 熵损失函数下 Quasi 分布为先验分布时，尺度参数 θ 的 Bayes 估计值 δ_B。见表 2：

Table 2. Parameter estimation of parameter theta under entropy loss function
表 2. 熵损失下参数 θ 的参数估计

d	δ_B
34.1	0.8267
34.2	0.8254
34.3	0.8242
34.5	0.8229
34.5	0.8216
34.6	0.8204
34.7	0.8191
34.8	0.8179
34.9	0.8166
极差	0.0101
MSE	2.5×10^{-5}

根据表 1 和表 2 中的极值和均方误差(MSE)，可以看出：Linex 损失函数下先验分布为 Quasi 分布时尺度参数 θ 的 Bayes 估计值的稳健性远比熵损失函数下的尺度参数的稳健性好，横向极差不超过 0.0105，纵向极差不超过 0.0066。从统计决策中稳健性角度考虑，第一个条件下的 δ_B 更稳健。

另外，由偏差 $\Delta\delta = \left|\delta_B - \theta_0\right|$ (其中 δ_B 为参数 θ 的估计量，θ_0 为参数 θ 的真值)得到表 1 的偏差区间为 [0.0002, 0.0081]，可见第一个条件下的偏差很小，所以精确度较高。

3) Linex 损失函数下，先验分布分别为 Quasi 分布和伽玛分布时，尺度参数 θ 的 Bayes 估计值 δ_B 的对比：

由文献[3]可知，Linex 损失函数下先验分布为伽玛分布的对数伽玛分布尺度参数 θ 的 Bayes 估计(表 3)：

Table 3. Parameter estimation of parameter theta under the prior distribution of gamma distribution
表 3. 伽玛分布先验分布下参数 θ 的参数估计

δ_B	$a = 2$	$a = 3$	$a = 4$	$a = 5$	$a = 6$	极差	MSE
$\beta = 0.1$	0.8224	0.8191	0.8158	0.8125	0.8093	0.0131	3.9×10^{-5}
$\beta = 0.2$	0.8233	0.8199	0.8166	0.8133	0.8101	0.0132	3.3×10^{-5}
$\beta = 0.3$	0.8241	0.8207	0.8174	0.8141	0.8109	0.0132	2.8×10^{-5}
$\beta = 0.4$	0.8249	0.8216	0.8182	0.8150	0.8117	0.0132	2.5×10^{-5}
$\beta = 0.5$	0.8257	0.8224	0.8191	0.8158	0.8125	0.0132	2.3×10^{-5}
$\beta = 0.6$	0.8266	0.8232	0.8199	0.8166	0.8133	0.0133	2.2×10^{-5}
$\beta = 0.7$	0.8274	0.8240	0.8207	0.8174	0.8141	0.0133	2.3×10^{-5}
$\beta = 0.8$	0.8282	0.8248	0.8215	0.8182	0.8149	0.0133	2.4×10^{-5}
$\beta = 0.9$	0.8290	0.8256	0.8223	0.8190	0.8158	0.0132	2.7×10^{-5}
极差	0.0066	0.0065	0.0065	0.0065	0.0065		
MSE	3.7×10^{-5}	1×10^{-5}	5.3×10^{-6}	2.2×10^{-5}	6×10^{-5}		

注：$n = 50, T = 79.7130, \alpha = 2$。

比较上述表 1 和表 3，表中的极值和均方误差，Linex 损失函数下适当选择参数 a,d ，对数伽玛分布尺度参数 θ 在 Quasi 先验分布下的 Bayes 估计比在伽玛分布为先验分布下的估计值更接近真值，更稳健。

4. 结论

数值模拟的结果表明，尺度参数 θ 的先验分布为 Quasi 分布时，Linex 损失函数下的 Bayes 估计稳健性较熵损失函数下的稳健性更好，Bayes 估计值更接近真值。另外，与文献[3]在同样的 Linex 损失函数下，将先验分布由伽玛分布改为 Quasi 先验分布时作对比，表 1 和表 3 中极值和均方误差结果表明适当选择 Linex 损失函数及 Quasi 先验分布的参数 a,d 时，对数伽玛分布尺度参数 θ 在 Quasi 先验分布下的 Bayes 估计比在伽玛分布为先验分布下的估计值更接近真值，更稳健。

基金项目

国家自然科学基金项目(11801488)；新疆师范大学教学研究与改革项目(SDJG2020-30)；新疆师范大学科研发展专项项目(XJNUZX202001)。

参考文献

[1] Varian, H.R. (1975) A Bayesian Approach to Real Estate Assessment. In: Fienberg, S.E. and Zellner, A., Eds., *Studies in Bayesian Econometrics and Statistics in Honor of Leonard J. Savage*, North Holland, Amsterdam, 195-208.

[2] 王琪, 任海平. 非对称损失函数下逆指数分布参数的Bayes估计[J]. 齐齐哈尔大学学报(自然科学版), 2014, 30(4): 79-83.

[3] 王成元, 黄先玖. 对数伽玛分布尺度参数的Bayes估计在LINEX与复合LINEX损失函数下的比较[J]. 应用数学, 2018, 31(2): 384-391.

[4] 金秀岩. 复合 MLINEX 对称损失函数下对数伽玛分布参数的 Bayes 估计[J]. 数学的实践与认识, 2014, 44(19): 257-262.

[5] 熊福生. 风险理论[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2005.

[6] 张道勇. 油气资源评价中的统计建模[D]: [博士学位论文]. 北京: 中国石油勘探开发研究院, 2005.

[7] Dey, D.K., Ghosh, M. and Srinivasan, C. (1987) Simultaneous Estimation of Parameters under Entropy Loss. *Journal of Statistical Planning & Inference*, **15**, 347-363. https://doi.org/10.1016/0378-3758(86)90108-4

[8] 韩明. Pascal 分布的参数估计[J]. 纯粹数学与应用数学, 2006, 22(4): 510-515.

[9] 康会光, 等. LINEX 损失及 PA 样本下单边截断型分布族参数函数的 EB 估计[J]. 纯粹数学与应用数学, 2008, 24(2): 334-340.

[10] 茆诗松, 王静龙, 濮晓龙. 高等数理统计[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.

[11] 韩明. 多层先验分布的构造及其应用[J]. 运筹与管理, 1997, 6(3): 31-40.