

# 拉普拉斯矩阵群逆的分块表示

柴萌萌, 乔 猛

上海理工大学理学院, 上海

收稿日期: 2022年2月15日; 录用日期: 2022年3月17日; 发布日期: 2022年3月24日

## 摘 要

令 $G$ 为具有拉普拉斯矩阵 $L(G)$ 和无符号拉普拉斯矩阵 $Q(G)$ 的加权图。根据 $L(G)$ 的广义舒尔补的群可逆条件, 以及拉普拉斯矩阵的其它性质, 利用分块矩阵求群逆的计算方法, 计算 $L(G)$ 群逆的分块表达式。并通过例子说明计算结果。

## 关键词

群逆, 拉普拉斯矩阵, 无符号拉普拉斯矩阵

# Block Representation of Laplacian Matrix Group Inverse

Mengmeng Chai, Meng Qiao

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Feb. 15<sup>th</sup>, 2022; accepted: Mar. 17<sup>th</sup>, 2022; published: Mar. 24<sup>th</sup>, 2022

## Abstract

Let  $G$  be a weighted graph with Laplacian matrix  $L(G)$  and signless Laplacian matrix  $Q(G)$ . According to the group invertibility condition of the generalized Schur complement of  $L(G)$  and other properties of Laplacian matrix. An expression for the group inverse of  $L(G)$  is calculated by using the method of group inverse of block matrix. Moreover, an example has been constructed to illustrate the result.

## Keywords

Group Inverse, Laplacian Matrix, Signless Laplacian Matrix



## 1. 引言

对于  $n \times n$  矩阵  $A$ ,  $A$  的群逆定义为  $n \times n$  矩阵  $X$ , 满足矩阵方程:

$$AXA = A, \quad XAX = X \text{ 和 } AX = XA.$$

一般来讲, 并非每个方阵都有群逆, 矩阵  $A$  具有群逆的充分必要条件是它的指数为 1, 或等价地,  $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^2)$  (参见[1]). 如果  $A$  的群逆存在, 则它是唯一的, 记为  $A^\#$ . 如果  $A^\#$  存在, 则称矩阵  $A$  是群可逆的. 文献[2]中给出了分块矩阵的群逆的一些表示. 令  $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ , 其中  $A$  是可逆的,  $M$  的舒尔补  $S = D - CA^{-1}B$  是矩阵分析中的基本工具, 也是许多矩阵不等式的来源. 使用舒尔补方法处理矩阵问题的想法应用十分广泛. 当它扩展到更一般的情况时, 广义舒尔补  $S = D - CA^\#B$  在  $M^\#$  的表达式中起着重要作用(参见[3]). 对于  $n \times m$  矩阵  $B$ ,  $B$  的 Moore-Penrose 逆矩阵是满足以下矩阵方程(参见[4] [5])的  $m \times n$  矩阵  $B^\dagger$ :

$$BB^\dagger B = B, \quad B^\dagger BB^\dagger = B^\dagger, \quad (BB^\dagger)^H = BB^\dagger \text{ 和 } (B^\dagger B)^H = B^\dagger B,$$

其中  $B^H$  表示  $B$  的共轭转置. 值得指出的是, 任何复矩阵都存在唯一的 Moore-Penrose 逆矩阵. Moore-Penrose 逆的更多基本性质可以参考[6].

在本文中, 我们考虑简单、无向的赋权图. 令  $G = (V(G), E(G))$  是带有顶点集  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  和边集  $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  的无向图,  $G$  的每条边都标记有一个正实数, 称为边的权重. 令  $A(G)$  是  $G$  的  $n \times n$  邻接矩阵, 其中如果  $G$  中没有连接顶点  $v_i$  和  $v_j$  的边, 则其  $(i, j)$  项等于 0, 否则等于连接顶点  $v_i$  和  $v_j$  的边的权重. 令  $D(G)$  为度矩阵, 其对角线元素为  $d_G(v_1), d_G(v_2), \dots, d_G(v_n)$ , 其中  $d_G(v_i)$  等于  $G$  中与顶点  $v_i$  相关联的边的权重之和. 矩阵  $D(G) - A(G)$  和  $D(G) + A(G)$  分别称为  $G$  的拉普拉斯矩阵和无符号拉普拉斯矩阵. 容易验证  $G$  的拉普拉斯矩阵和无符号拉普拉斯矩阵都是半正定的. 令  $L(G)$  为加权图  $G$  的拉普拉斯矩阵. 由于  $L(G)$  是对称的, 因此  $L^\#(G)$  存在并且  $L^\#(G) = L^\dagger(G)$ .

关于分块矩阵群逆的表达式问题是学者们研究较为活跃的部分, 但由于该问题难度较大, 多数分块矩阵群逆的表达式是建立在一些特定条件下的. 受文献[7]的启发, 我们可以将分块矩阵群逆的一些结论应用在拉普拉斯矩阵上, 结合拉普拉斯矩阵自身的性质, 得到拉普拉斯矩阵群逆的表达式. 本文结构如下, 在第 2 节中我们首先介绍两个重要引理, 这些引理帮助我们计算拉普拉斯矩阵的群逆. 在第 3 节中, 我们给出拉普拉斯矩阵群逆的分块表示. 此外, 还构造一个例子来说明上述结果.

## 2. 预备定理

为了证明主要结果, 本节给出一些引理. 对于群可逆矩阵  $S$ ,  $S^\pi$  表示矩阵  $I - SS^\#$ , 其中  $I$  是单位矩阵.

**引理 2.1** [8] 设  $M$  为艾尔米特半正定矩阵, 将方阵  $M$  划分为  $M = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix}$ , 其中  $B^T$  为  $B$  的转置矩阵,

则  $A^\pi B = 0$ ,  $BC^\pi = 0$ .

**引理 2.2 [9]** 令  $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ , 其中  $A$  是群可逆的. 令  $S = D - CA^\#B$  是  $M$  的广义舒尔补. 如果  $CA^\pi B = 0$ ,  $A$  和  $S$  是群可逆的, 则

1)  $M$  是群可逆的当且仅当

$$\text{rank}(A^2 + BS^\pi C) = \text{rank}(A),$$

$$A^\pi BS^\pi = 0, \quad S^\pi CA^\pi = 0, \quad A^\pi BS^\pi CA^\pi = 0;$$

2) 如果  $M$  是群可逆的, 那么有

$$M^\# = \left[ \begin{pmatrix} 0 & A^\pi B \\ S^\pi C & S^\pi D \end{pmatrix} R + I \right] \cdot W \cdot R \cdot W \cdot \left[ I + R \begin{pmatrix} 0 & BS^\pi \\ CA^\pi & DS^\pi \end{pmatrix} \right],$$

其中  $W = (I + A^\#BS^\pi CA^\#)^{-1} \oplus I$ ,  $R = \begin{pmatrix} A^\# + A^\#BS^\pi B^\top A^\# & -A^\#BS^\pi \\ -S^\pi B^\top A^\# & S^\pi \end{pmatrix}$ .

### 3. 矩阵群逆

在本节中, 我们给出拉普拉斯矩阵群逆的表达式.

**定理 3.1** 令  $G$  为具有拉普拉斯矩阵  $L(G)$  的加权图. 如果  $L(G)$  被划分为  $L(G) = \begin{pmatrix} A & B \\ B^\top & C \end{pmatrix}$ , 其中  $A$  是群可逆的, 广义舒尔补  $S = C - B^\top A^\#B$ , 则

$$L^\#(G) = \left[ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ S^\pi B^\top & S^\pi C \end{pmatrix} R + I \right] \cdot W \cdot R \cdot W \cdot \left[ I + R \begin{pmatrix} 0 & BS^\pi \\ 0 & CS^\pi \end{pmatrix} \right],$$

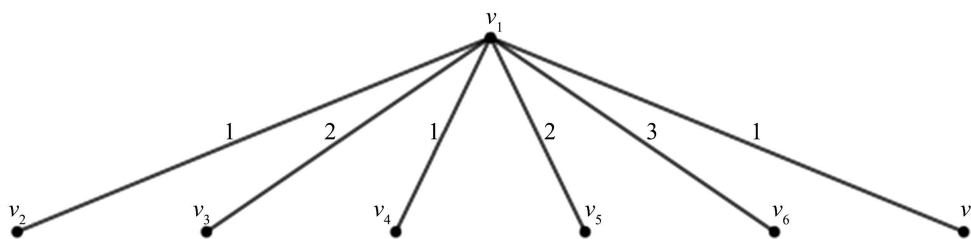
其中  $B^\top$  是矩阵  $B$  的转置,  $W_0 = I + A^\#BS^\pi B^\top A^\#$ ,  $W = W_0^{-1} \oplus I$ ,  $R = \begin{pmatrix} A^\# + A^\#BS^\pi B^\top A^\# & -A^\#BS^\pi \\ -S^\pi B^\top A^\# & S^\pi \end{pmatrix}$ .

**证明:** 根据拉普拉斯矩阵的性质, 结合引理 2.1, 我们可以得到  $A^\pi B$  和  $B^\top A^\pi$  等于 0. 由于  $L^\#(G)$  的存在性, 再根据引理 2.2, 得出

$$L^\#(G) = \left[ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ S^\pi B^\top & S^\pi C \end{pmatrix} R + I \right] \cdot W \cdot R \cdot W \cdot \left[ I + R \begin{pmatrix} 0 & BS^\pi \\ 0 & CS^\pi \end{pmatrix} \right],$$

其中  $R = \begin{pmatrix} A^\# + A^\#BS^\pi B^\top A^\# & -A^\#BS^\pi \\ -S^\pi B^\top A^\# & S^\pi \end{pmatrix}$ ,  $W_0 = I + A^\#BS^\pi B^\top A^\#$ , 并且  $W = W_0^{-1} \oplus I$ .

**例 3.1** 考虑图 1 所示的加权星图  $K_{1,6}$ .



**Figure 1.** Star graph  
**图 1.** 星图

$K_{1,6}$ 的拉普拉斯矩阵是

$$L(K_{1,6}) = \begin{pmatrix} 10 & -1 & -2 & -1 & -2 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

不失一般性, 取  $A = \begin{pmatrix} 10 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  和  $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 。

那么

$$S = C - B^T A^\# B = \begin{pmatrix} 14/9 & -2/9 & -4/9 & -2/3 & -2/9 \\ -2/9 & 8/9 & -2/9 & -1/3 & -1/9 \\ -4/9 & -2/9 & 14/9 & -2/3 & -2/9 \\ -2/3 & -1/3 & -2/3 & 2 & -1/3 \\ -2/9 & -1/9 & -2/9 & -1/3 & 8 \end{pmatrix},$$

$$S^\# = \begin{pmatrix} 13/30 & -1/6 & -1/15 & -1/30 & -1/6 \\ -1/6 & 11/15 & -1/6 & -2/15 & -4/15 \\ -1/15 & -1/6 & 13/30 & -1/30 & -1/6 \\ -1/30 & -2/15 & -1/30 & 1/3 & -2/15 \\ -1/6 & -4/15 & -1/6 & -2/15 & 11/15 \end{pmatrix},$$

$$R = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix},$$

$$S^\pi = \begin{pmatrix} 2/15 & 2/15 & 1/30 & -1/15 & 1/30 & 1/15 & -1/15 \\ 2/15 & 17/15 & 1/30 & -1/15 & 1/30 & 1/15 & -1/15 \\ 1/30 & 1/30 & 13/30 & -1/6 & -1/15 & -1/30 & -1/6 \\ -1/15 & -1/15 & -1/6 & 11/15 & -1/6 & -2/15 & -4/15 \\ 1/30 & 1/30 & -1/15 & -1/6 & 13/30 & -1/30 & -1/6 \\ 1/15 & 1/15 & -1/30 & -2/15 & -1/30 & 1/3 & -2/15 \\ -1/15 & -1/15 & -1/6 & -4/15 & -1/6 & -2/15 & 11/15 \end{pmatrix},$$

$$W = \begin{pmatrix} 6/7 & -1/7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/7 & 6/7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

由定理 3.1, 可得

$$L^\#(K_{1,6}) = \begin{pmatrix} 13/147 & -8/147 & 5/294 & -8/147 & 5/294 & 2/49 & -8/147 \\ -8/147 & 118/147 & -37/294 & -29/147 & -37/294 & -5/49 & -29/147 \\ 5/294 & -37/294 & 131/294 & -37/294 & -8/147 & -3/98 & -37/294 \\ -8/147 & -29/147 & -37/294 & 118/147 & -37/294 & -5/49 & -29/147 \\ 5/294 & -37/294 & -8/147 & -37/294 & 131/294 & -3/98 & -37/294 \\ 2/49 & -5/49 & -3/98 & -5/49 & -3/98 & 16/49 & -5/49 \\ -8/147 & -29/147 & -37/294 & -29/147 & -37/294 & -5/49 & 118/147 \end{pmatrix}.$$

**推论 3.1** 令  $G$  为具有拉普拉斯矩阵  $L(G)$  的加权图, 如果  $L(G)$  被划分为  $L(G) = \begin{pmatrix} A & B \\ B^\top & C \end{pmatrix}$ , 并且广义舒尔补  $S = C - B^\top A^\# B = 0$ , 则

$$L^\#(G) = \begin{pmatrix} W_0^{-1} A^\# W_0^{-1} & W_0^{-1} A^\# W_0^{-1} A^\# B \\ B^\top A^\# W_0^{-1} A^\# W_0^{-1} & B^\top A^\# W_0^{-1} A^\# W_0^{-1} A^\# B \end{pmatrix},$$

这里  $W_0 = I + A^\# B B^\top A^\#$ .

**证明:** 根据定理 3.1, 如果  $S = 0$ , 那么  $S^\pi = I$ ,  $R = \begin{pmatrix} A^\# & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,

$$\begin{aligned} L^\#(G) &= \left[ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B^\top & C \end{pmatrix} R + I \right] \cdot W \cdot R \cdot W \cdot \left[ I + R \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ B^\top A^\# & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_0^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^\# & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_0^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A^\# B \\ 0 & I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} W_0^{-1} A^\# W_0^{-1} & W_0^{-1} A^\# W_0^{-1} A^\# B \\ B^\top A^\# W_0^{-1} A^\# W_0^{-1} & B^\top A^\# W_0^{-1} A^\# W_0^{-1} A^\# B \end{pmatrix} \end{aligned}$$

设  $G$  是一个具有无符号拉普拉斯矩阵  $Q(G)$  的加权图, 并且  $Q(G)$  被划分为  $Q(G) = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y^\top & Z \end{pmatrix}$ . 由于  $Q(G)$  是半正定的. 通过引理 2.1, 我们有  $X^\pi Y = 0, Y Z^\pi = 0$ , 可以得到  $Q^\#(G)$  的表达式.

**定理 3.2** 令  $G$  为具有无符号拉普拉斯矩阵  $Q(G)$  的加权图. 如果  $Q(G)$  被划分为  $Q(G) = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y^\top & Z \end{pmatrix}$ , 其中  $X$  是群可逆的, 广义舒尔补  $S = Z - Y^\top X^\# Y$ , 则

$$Q^\#(G) = \left[ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ S^\pi Y^\top & S^\pi Z \end{pmatrix} R + I \right] \cdot W \cdot R \cdot W \cdot \left[ I + R \begin{pmatrix} 0 & Y S^\pi \\ 0 & Z S^\pi \end{pmatrix} \right],$$

这里

$$R = \begin{pmatrix} X^\# + X^\#YS^\#Y^\top X^\# & -X^\#YS^\# \\ -S^\#Y^\top X^\# & S^\# \end{pmatrix}$$

$$W = W_0^{-1} \oplus I$$

$$W_0 = I + X^\#YS^\#Y^\top X^\#$$

**证明:** 根据无符号拉普拉斯矩阵的性质, 结合引理 2.1, 我们可以得到  $A^\pi B$  和  $B^\top A^\pi$  等于 0。由于  $Q^\#(G)$  的存在性, 再根据引理 2.2, 得出

$$Q^\#(G) = \left[ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ S^\pi Y^\top & S^\pi Z \end{pmatrix} R + I \right] \cdot W \cdot R \cdot W \cdot \left[ I + R \begin{pmatrix} 0 & YS^\pi \\ 0 & ZS^\pi \end{pmatrix} \right],$$

其中  $R = \begin{pmatrix} X^\# + X^\#YS^\#Y^\top X^\# & -X^\#YS^\# \\ -S^\#Y^\top X^\# & S^\# \end{pmatrix}$ ,  $W_0 = I + X^\#YS^\#Y^\top X^\#$ , 并且  $W = W_0^{-1} \oplus I$ 。

**推论 3.2** 令  $G$  为具有拉普拉斯矩阵  $Q(G)$  的加权图。如果  $Q(G)$  被划分为  $Q(G) = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y^\top & Z \end{pmatrix}$ , 并且广义舒尔补  $S = Z - Y^\top X^\#Y = 0$ , 则

$$Q^\#(G) = \begin{pmatrix} W_0^{-1} X^\# W_0^{-1} & W_0^{-1} X^\# W_0^{-1} X^\# Y \\ Y^\top X^\# W_0^{-1} Y^\# W_0^{-1} & Y^\top X^\# W_0^{-1} X^\# W_0^{-1} X^\# Y \end{pmatrix}$$

这里  $W_0 = I + X^\#Y Y^\top X^\#$ 。

## 4. 结语

本文已经求出拉普拉斯矩阵和无符号拉普拉斯矩阵群逆的一种表达式, 并且举例说明计算结果。通过测试和比较不同类型的图, 我们发现本文给出的表达式与文献[7]中所给的表达式相比较而言, 利用本文给出的表达式来计算拉普拉斯矩阵群逆时, 计算量更小。受文献[7]和[10]的启发, 如何将拉普拉斯矩阵群逆的分块表示应用到电网络图中, 以及遇到大型矩阵时相应算法该如何实现, 这是需要我们继续深入研究的。

## 基金项目

国家自然科学基金资助项目(12001368); 上海市青年科技英才扬帆计划(20YF1433100)。

## 参考文献

- [1] Rao, K. (2003) *The Theory of Generalized Inverses over Commutative Rings*. Taylor & Francis Ltd., London.
- [2] Bu, C.J., Li, M., Zhang, K.Z., et al. (2009) Group Inverse for the Block Matrices with an Invertible Subblock. *Applied Mathematics and Computation*, **215**, 132-139. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2009.04.054>
- [3] Benítez, J. and Thome, N. (2006) The Generalized Schur Complement in Group Inverses and  $(k + 1)$ -Potent Matrices. *Linear and Multilinear Algebra*, **54**, 405-413. <https://doi.org/10.1080/03081080500348709>
- [4] Moore, E.H. (1920) On the Reciprocal of the General Algebraic Matrix. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **26**, 394-395. <https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1920-03332-X>
- [5] Penrose, R. (1955) A Generalized Inverse for Matrices. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. 51, 406-413. <https://doi.org/10.1017/S0305004100030401>
- [6] Israel, A. (1974) *Generalized Inverses: Theory and Applications*. J. Wiley, New York.
- [7] Bu, C.J., Sun, L.Z., Zhou, J., et al. (2012) A Note on Block Representations of the Group Inverse of Laplacian Matrices. *Electronic Journal of Linear Algebra*, **23**, 866-876. <https://doi.org/10.13001/1081-3810.1562>

- 
- [8] Zhang, F.Z. (2005) *The Schur Complement and Its Applications*. Springer, New York. <https://doi.org/10.1007/b105056>
- [9] Zheng, B.D., Sun L.Z. and Jiang, X.W. (2016) Group Invertible Block Matrices. *Frontiers of Mathematics in China*, **11**, 679-691. <https://doi.org/10.1007/s11464-016-0532-0>
- [10] Benzi, M., Fika, P. and Mitrouli, M. (2019) Graphs with Absorption: Numerical Methods for the Absorption Inverse and the Computation of Centrality Measures. *Linear Algebra & Its Applications*, **574**, 123-152. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2019.03.026>