Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(3), 323-343
Published Online March 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.123037

n 维广义 Fock 空间 F_{φ}^{p} 上的 Hankel 算子

郝丽丽，李海绸

华南农业大学数学与信息学院，广东 广州

收稿日期：2022 年 1 月 25 日；录用日期：2022 年 3 月 1 日；发布日期：2022 年 3 月 8 日

摘 要

对于 $1 \leq p < \infty$ ，利用有界 (消失) 平均震荡函数的性质，本文讨论了一类 **n** 维广义 **Fock** 空间 F_{φ}^{p} 上的 **Hankel** 算子 H_f 和 $H_{\bar{f}}$ 的有界性和紧性。其中权函数 $\varphi \in C^2(\mathbb{C}^n)$ 且在流的意义下满足 $dd^c\varphi \cong \omega_0$。同时, 利用 **Berezin** 变换刻画了空间 **BMO** 和 **VMO** 的几何性质。

关键词

Fock 空间，**Hankel** 算子，有界性，紧性

Hankel Operators on n-Dimension Generalized Fock Spaces F_{φ}^{p}

Lili Hao, Haichou Li

School of Mathematics and Information, South China Agricultural University, Guangzhou Guangdong

Received: Jan. 25^{th}, 2022; accepted: Mar. 1^{st}, 2022; published: Mar. 8^{th}, 2022

文章引用: 郝丽丽, 李海绸. n 维广义 Fock 空间 F_{φ}^{p} 上的 Hankel 算子 [J]. 理论数学, 2022, 12(3): 323-343.
DOI: 10.12677/pm.2022.123037

Abstract

For $1 \leq p < \infty$, we characterize the boundedness and compactness of Hankel operators H_f and $H_{\bar{f}}$ on n-dimensional generalized Fock spaces F^p_φ in terms of the properties of bounded (vanishing) mean oscillation function, where the weight function $\varphi \in C^2(\mathbb{C}^n)$ and satisfies $dd^c\varphi \cong \omega_0$ in the sense of current. We also give geometric descriptions for the spaces BMO and VMO which are defined in terms of the Berezin transform.

Keywords

Fock Spaces, Hankel Operators, Boundedness, Compactness

1. 介绍

函数空间上的算子理论与小波分析、函数论、调和分析、偏微分方程、控制论以及量子力学等有密切的联系, 是泛函分析的一个重要课题. 自上世纪五六十年代至今, 函数空间上的算子理论经久不衰. 有界区域上全纯函数空间理论在最近的几十年得到了极大的发展, 对这些空间的研究可参见专著 [1–3] 等. 相较于有界区域, 对无界区域上全纯函数空间的研究要少得多.

Fock 空间最早是由苏联的一位物理学家 Fock.V.A 定义并运用于描述粒子的量子态, 它是由复平面 C 上的全纯函数构成的. 有关 Fock 空间的研究也已有几十年的历史, 可追溯到 20 世纪 60 年代, 参见文献 [4]. 在经历了几十年的研究历程之后, Fock 空间上的算子理论得到了迅速地发展. 参见文献 [5–19]. Hankel 算子是全纯函数空间理论中一个重要的线性算子模型. 在过去的几十年中, 作用于各种全纯函数空间的 Hankel 算子引起了人们的广泛关注. 在 Bergman 空间和 Fock-Sobolev 空间中, Hankel 算子已经得到了很好的研究 [20–27].

最近, 受调和分析、插值理论等学科的发展驱动, 各种加权 Fock 空间, 例如广义 Fock 空间、Fock 型空间、Fock-Sobolev 空间上的算子理论倍受关注：2005 年, Bauer 在文献 [5] 中讨论了 Hankel 算子 H_f 和 $H_{\bar{f}}$ 在经典 Fock 空间 F^2_α 上同时为有界算子 (或紧算子) 的充要条件. 2012 年, Zhu [6] 的专著讨论了 Hankel 算子 H_f 在 F^2_α 上的相关特性, 包括有界性、紧性和 Schatten 类. Perälä 等人 [7] 将有界性和紧性部分的结果推广到了 $1 \leq p < \infty$ 的情形.

给定 $\mathbb{C}^n$ 上满足一定条件的一类权函数 ψ, Seip 和 Youssfi [8] 获得了由全纯函数 f 所诱导的 Hankel 算子 H_f 在一维加权 Fock 空间 F_ψ^2 上的有界性、紧性和 Schatten 类特征. 之后,Wang 等人 [9] 利用有界 (消失) 平均振荡函数的性质, 刻画了 n 维广义 Fock 空间 F_ψ^2 上的 Hankel 算子的有界性 (紧性), 并于 2021 年由 Tu 等人 [10] 将结果推广到了 $1 \le p < \infty$ 的情形.

给定 C 上满足 $\Delta\phi dv$ 为双倍测度的次调和函数 ϕ 和整函数 f , Constantin 和 Ortega-Cerdà[11] 研究了 Hankel 算子 H_f 在一维 Fock 空间 F_ϕ^2 上分别为有界算子、紧算子的特征, 并得到了该算子的 Schatten 类性质. 2016 年, Hu 等人 [12] 研究了 Hankel 算子 H_f 在一维 Fock 空间 F_ϕ^p 上的有界性、紧性和 Schatten 类特征. 对于给定的实值函数 $\varphi \in C^2(\mathbb{C}^n)$，其在流的意义下满足 $0 < m\omega_0 \leqslant dd^c\varphi \leqslant M\omega_0$，其中 $\omega_0 = dd^c|z|^2 = \frac{i}{2}\sum_{k=1}^n d\overline{z_k} \wedge dz_k, d = (\bar{\partial} + \partial), d^c = \frac{i}{4}(\bar{\partial} - \partial)$,$m$ 和 M 是正常数. Wang 等人 [23] 研究了 n 维 fock 空间 F_ϕ^2 的 hankel 算子 H_f 的有界性、紧性和 Schatten 类特征。当限制在 n = 1 时，由权函数 φ 所诱导的 fock 空间是 F_φ^p 是加权 Fock 空间 F_ϕ^p 的特殊情况，但当 n 不等于 1 时，两类空间就不尽相同。本文拓展了文献 [23] 的结果, 研究 n 维加权 Fock 空间 $F_\varphi^p(1 \le p \le \infty)$ 上的 Hankel 算子有界性和紧性特征。

我们规定如下记号: 如果 X 和 Y 是两个非负量, 记号 $X \lesssim Y$ 或 $Y \gtrsim X$ 表示存在一个与 X 和 Y 无关的正常数 C, 使得 $X \leqslant CY$ 成立. 因此记号 $X \cong Y$ 表示 $X \lesssim Y$ 和 $Y \lesssim X$ 同时成立.

2. 预备知识

设 $\mathbb{C}^n$ 是 n 维复空间, 对 $z = (z_1, ..., z_n)$ 和 $w = (w_1, ..., w_n) \in \mathbb{C}^n$, 记 $< z, w >= z_1w_1 + ... + z_nw_n$, $|z|^2 =< z, z >$, dv 为 $\mathbb{C}^n$ 上的 Lebsgue 测度.

本文假设函数 $\varphi \in C^2(\mathbb{C}^n)$ 且满足

$$0 < m\omega_0 \leqslant dd^c\varphi \leqslant M\omega_0$$

其中 $\omega_0 = dd^c|z|^2 = \frac{i}{2}\sum_{k=1}^n d\overline{z_k} \wedge dz_k, d = (\bar{\partial} + \partial), d^c = \frac{i}{4}(\bar{\partial} - \partial)$,$m$ 和 M 是正常数.

取 $0 < p \leqslant \infty$, 空间 L_φ^p 是指由所有满足如下性质的可测函数 f 组成的赋范空间

$$\|f\|_{p,\varphi} = \left(\int_{\mathbb{C}^n} |f(z)e^{-\varphi(z)}|^p dv(z)\right)^{1/p} < \infty$$

记 $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ 表示 $\mathbb{C}^n$ 上所有的全纯函数组成的空间, 则对于 $0 < p \leqslant \infty$, 定义广义 Fock 空间

$$F_\varphi^p = \mathcal{H}(\mathbb{C}^n) \cap L_\varphi^p$$

$$F_\varphi^\infty = \left\{f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n) : \underset{z\in\mathbb{C}^n}{esssup}|f(z)|e^{-\varphi(z)} < \infty\right\}.$$

易知, 当 $1 \leqslant p \leqslant \infty$ 时,F_φ^p 是以 $\|\cdot\|_{p,\varphi}$ 为范数的 Banach 空间. 当 $0 < p < 1, F_\varphi^p$ 是以

$$d(f, g) = \|f - g\|_{p,\varphi}^p$$

为范数的 F-空间. 特别地,F^2_φ 是以

$$\langle f,g\rangle=\int_{\mathbb{C}^n}f(z)\overline{g(z)}e^{-2\varphi(z)}dV(z)$$

为内积的 Hilbert 空间. 当 $\varphi(z)$ 是一个适当规范化的线性函数时, 则 F^2_φ 是一个经典的 Fock 空间, 其性质参考文献 [6, 28].

设 $K_\varphi(\cdot,\cdot)$ 是 F^2_φ 的再生核, 在文献 [27] 中, Schuster 和 Varolin 得到了 $K_\varphi(\cdot,\cdot)$ 的若干估计, 这些估计对 F^p_φ 上函数空间和算子理论的研究是十分重要的.

引理 2.1 *(a)* 存在常数 $C,\theta>0$ 使得对 $z,w\in\mathbb{C}^n$ 成立

$$|K_\varphi(z,w)|\le Ce^{\varphi(z)+\varphi(w)-\theta|z-w|};\tag{2. 1}$$

(b) 存在常数 $r_0>0$ 使得对任意 $z\in\mathbb{C}^n$ 和 $w\in B(z,r_0)$ 总有

$$|K_\varphi(z,w)|\cong e^{\varphi(z)+\varphi(w)};\tag{2. 2}$$

(c) 对所有 $0<p\le\infty$ 有

$$\|K_\varphi(\cdot,z)\|_{p,\varphi}\cong e^{\varphi(z)}\cong\sqrt{K_\varphi(z,z)},\quad z\in\mathbb{C}^n.\tag{2. 3}$$

相应地, 在点 $z\in\mathbb{C}^n$ 处的规范化再生核定义为

$$k_\varphi(z,w)=\frac{K_\varphi(z,w)}{\sqrt{K_\varphi(z,w)}}$$

因为 Fock 空间 F^2_φ 是 L^2_φ 的闭子空间, 则存在从 L^2_φ 到 F^2_φ 的正交投影 (也称 Bergman 投影), 则对于 $f\in L^2_\varphi$, 有

$$Pf(z)=\int_{\mathbb{C}^n}f(w)K_\varphi(z,w)e^{-2\varphi(w)}dv(w)\quad z\in\mathbb{C}^n.$$

关于正交投影的性质请参考文献 [27, 29]. 事实上, 对于 $0<p\leqslant\infty$, 由 [27] 知 Bergman 投影 P_φ 可以拓展至从 L^p_φ 到 F^p_φ 的有界投影. 由此易知,P_φ 是 F^p_φ 上的恒等映射, 从而可知集合 $Span\{k_{p,z}:z\in\mathbb{C}^n\}$ 在 F^p_φ 中稠密.

对于 $1\leqslant p<\infty$, 记 Γ^p_φ 是由 $\mathbb{C}^n$ 中所有满足如下条件的复值可测函数组成的线性空间

$$fK_\varphi(\cdot,z)\in L^p_\varphi,z\in\mathbb{C}^n.$$

所以显然有 $L^\infty(\mathbb{C}^n)\subseteq\Gamma^p_\varphi$. 对于 $f\in\Gamma^p_\varphi$, 定义符号 f 的 (大)Hankel 算子如下:

$$H_fg=(I-P_\varphi)(fg),\quad g\in F^p_\varphi,$$

其中 I 是 L^p_φ 上的单位算子. 由 Bergman 投影 P_φ 的积分表示可得

$$H_f g=\int_{\mathbb{C}^n}(f(z)-f(w))K_\varphi(z,w)g(w)e^{-2\varphi(w)}dv(w),\quad z\in\mathbb{C}^n,\quad g\in F^p_\varphi.$$

下面引入一些关于平均振荡函数的空间。

取定半径 $r>0$, 记半径为 r 的复球 $B(z,r)=\{w\in\mathbb{C}:|z-w|<r\}$, 记 $v(B(z,r))$ 为复球 $B(z,r)$ 的体积. 由 [13] 知, $v(B(z,r))\cong r^{2n}$.

对于 $\mathbb{C}$ 中的局部可积函数 f 及半径 $r>0$, 定义其平均函数 $\hat{f}_r$ 如下:

$$\hat{f}_r(z)=\frac{1}{v(B(z,r))}\int_{B(z,r)}f(w)dv(w),\quad z\in\mathbb{C}^n.$$

对于 $1\leqslant p<\infty$, 如果 f 是 $\mathbb{C}^n$ 上局部 p-可积的函数, 则定义 f 在点 z 处的 p-平均如下:

$$MO_{p,r}(f)(z)=\left(\frac{1}{v(B(z,r))}\int_{B(z,r)}|f(w)-\hat{f}_r(z)|^p dv(w)\right)^{\frac{1}{p}},\quad z\in\mathbb{C}^n. \tag{2. 4}$$

其中半径 $r>0$.

记 $BMO^p_r=BMO^p_r(\mathbb{C}^n)$ 是由 $\mathbb{C}^n$ 中所有满足以下条件的局部 p-可积的函数 f 组成的空间

$$\|f\|_{BMO^p_r}=\sup\{MO_{p,r}(f)(z):z\in\mathbb{C}^n\}<\infty.$$

及 VMO^p_φ 是由 BMO^p_φ 中满足如下条件的所有复值函数 f 组成的空间.

$$\lim_{|z|\to\infty}MO_{p,r}(f)(z)=0.$$

所以 BMO^p_r 中的函数在 $\mathbb{C}^n$ 中有有界 p-平均震荡的函数,VMO^p_φ 空间中的函数在 $\mathbb{C}^n$ 上有消失的 p-平均震荡.

设 f 是 $\mathbb{C}^n$ 中的连续函数, 半径 $r>0$, 定义 f 在 z 点的震荡为

$$\omega_r(f)(z)=\sup\{|f(z)-f(w)|:w\in B(z.r)\},\quad z\in\mathbb{C}^n$$

则空间 BO_r 是指 $\mathbb{C}^n$ 中满足如下条件的连续函数组成的空间

$$\|f\|_{BO_r}=\sup\{\omega_r(f)(z):z\in\mathbb{C}^n\}<\infty.$$

且空间 VO_r 是由 BO_r 中所有满足如下条件的复值函数 f 组成的空间

$$\lim_{|z|\to\infty}\omega_r(f)(z)=0,$$

由文献 [6] 进行简单拓展可得如下四个引理：

引理 2.2 取定 $1 \leqslant p < \infty, r > 0, f \in L^p_{loc}$, 则 $f \in BMO^p_r$ 当且仅当存在一个 $\mathbb{C}^n$ 上的复值函数 c 和常数 C, 使得

$$\frac{1}{v(B(z,r))}\int_{B(z,r)} |f(w) - c(z)|^p dv(w) \leq C.$$

引理 2.3 令 $1 \leqslant p < \infty, f \in L^p_{loc}, r > 0$, 则 $f \in VMO^p_\varphi$ 当且仅当在 $\mathbb{C}^n$ 中存在一个复值函数 c 使得

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{1}{v(B(z,r))}\int_{B(z,r)} |f(w) - c(z)|^p dv(w) = 0. \tag{2. 5}$$

引理 2.4 空间 BO_r 与参数 r 无关. 进而, $\mathbb{C}^n$ 中的连续函数 f 是空间 BO_r 中的一元当且仅当存在一个常数 $C > 0$, 使得对于任意的 $z, w \in \mathbb{C}^n$, 满足

$$|f(z) - f(w)| \leq C(|z - w| + 1).$$

引理 2.5 记 $r_1, r_2 > 0$, 若 $f \in VO_{r_1}$, 则 $f \in VO_{r_2}$.

对于 $1 \leqslant p < \infty$ 以及 $r > 0$, 空间 BA^p_r 是指 $\mathbb{C}^n$ 中所有满足如下条件的局部 p-可积的函数组成的空间

$$\|f\|_{BA^p_r} = \sup\left\{\left(\widehat{|f|^p}_r(z)\right)^{\frac{1}{p}} : z \in \mathbb{C}^n\right\} < \infty.$$

且空间 VA^p_r 是由 BA^p_r 中所有满足如下条件的复值函数 f 组成的空间

$$\lim_{|z|\to\infty}\left(\widehat{|f|^p}_r(z)\right)^{\frac{1}{p}} = 0.$$

命题 2.6 令 $1 \leqslant p < \infty, f \in L^p_{loc}$, 且 $d\mu_{f,p} = |f|^p e^{-p\varphi(w)} dv$. 则下列结论等价:

(a) 嵌入 $i_p : F^p_\varphi \to L^p(\mathbb{C}^n, d\mu_{f,p})$ 是有界的.

(b) 对于某些 $t \geq 1, \widetilde{|f|^p}_t$ 是有界的.

(c) 对于足够小的半径 $r > 0, f \in BA^p_r$.

证明 $(a) \Rightarrow (b)$

$$\widetilde{|f|^p}_p(z) = \int_{\mathbb{C}^n} |f|^p(w)|k_{p,z}(w)|^p e^{-p\varphi(w)} dv(w) = \int_{\mathbb{C}^n} |k_{p,z}(w)|^p d\mu_{f,p}(w) = \|k_{p,z}\|^p_{L^p(\mathbb{C}^n, d\mu_{f,p})}.$$

因为 $i_p : F^p_\varphi \to L^p(\mathbb{C}^n, d\mu_{f,p})$ 是有界的, $k_{p,z}$ 是 F^p_φ 空间中在点 $z \in \mathbb{C}^n$ 处的单位向量, 所以有

$$\begin{aligned}\widetilde{|f|^p}_p(z) = \|k_{p,z}\|^p_{L^p(\mathbb{C}^n, d\mu_{f,p})} &\leq \|i_p\|^p_{F^p_\varphi \to L^p(\mathbb{C}^n, d\mu_{f,p})} \|k_{p,z}\|^p_{F^p_\varphi} \\ &\leq \|i_p\|^p_{F^p_\varphi \to L^p(\mathbb{C}^n, d\mu_{f,p})},\end{aligned}$$

所以当 $t = p \geq 0$ 时 $\widetilde{|f|^p}_t$ 是有界的.

$(b) \Rightarrow (c)$. 由文献 [13] 知

$$v(B(z,r)) \cong r^{2n} \cong v(B(w,r)) \tag{2. 6}$$

且对任意的 $z,w\in\mathbb{C}^n$ 且 $|z-w|<r$, 由 (2. 1) 和 (2. 2) 可知对任意的 $z\in\mathbb{C}^n$, 有

$$|k_{t,z}(w)|^t e^{-t\varphi(w)}=\left|\frac{K_\varphi(w,z)}{\|K_\varphi(\cdot,z)\|_{t,\varphi}}\right|^t e^{-t\varphi(w)}\cong\left|\frac{e^{\varphi(z)+\varphi(w)}}{e^{\varphi(z)}}\right|^t e^{-t\varphi(w)}=1. \tag{2. 7}$$

所以 $|k_{t,z}(z)|\,e^{-\varphi(z)}\cong 1$. 所以对于任意的点 $z\in\mathbb{C}^n$, 有

$$\begin{aligned}\widehat{|f|^p}_r(z)&=\frac{1}{v(B(z,r))}\int_{B(z,r)}|f|^p(w)dv(w)\\&\cong r^{-2n}\int_{B(z,r)}|f|^p(w)\,|k_{t,z}(w)|^t e^{-\frac{t}{2}\varphi(w)}dv(w)\le r^{-2n}\widetilde{|f|^p}_t(z).\end{aligned}$$

因为 $\widetilde{|f|^p}_t$ 是有界的, 所以存在一个正常数 M 使得 $\widetilde{|f|^p}_t(z)\le M$, 所以 $\|f\|_{BA_r^p}\le M^{\frac{1}{p}}<\infty$, 所以 $f\in BA_r^p$.

$(c)\Rightarrow(a)$. 给定 $r>0$ 和 $\mathbb{C}^n$ 中的序列 $\{a_k\}_k$, 如果 $B(a_k,2r)$ 覆盖 $\mathbb{C}^n$ 且 $B(a_k,r)$ 彼此互不相交, 则 $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ 称是 $\mathbb{C}^n$ 上的 r-格. 根据 Bergman 空间理论中覆盖定理的研究方法, 不难得到是 $\mathbb{C}^n$ 上的 r-格的存在性, 参见文献 [30]. 设 a_k 是覆盖半径为 r 的 φ-格, 使得对 $\mathbb{C}^n$ 中的任意点 z 来讲, 至多属于集合 $B(k,2r)$ 的 N 个. 对于 $f\in F_\varphi^p, 1\le k<\infty$ 以及 $z\in B(a_k,r)$, 由 [13] 及 (2. 6) 可知

$$\begin{aligned}|g(z)e^{-\varphi(z)}|^p&\lesssim\frac{1}{v(B(z,r))}\int_{B(z,r)}|g(z)e^{-\varphi(z)}|^p dv(w)\\&\lesssim\frac{1}{v(B(a_k,r))}\int_{B(a_k,2r)}|g(z)e^{-\varphi(z)}|^p dv(w)\end{aligned} \tag{2. 8}$$

所以有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{C}^n}|g(z)|^p d\mu_{f,p}(z)&\le\sum_{k=1}^\infty\int_{B(a_k,r)}|g(z)|^p|f(z)|^p e^{-p\varphi(z)}dv(z)\\&\le\sum_{k=1}^\infty\left(\sup_{z\in B(a_k,r)}\left|g(z)e^{-\varphi(z)}\right|^p\right)\int_{B(a_k,r)}|f(z)|^p\,dv(z)\\&\lesssim\sum_{k=1}^\infty\left(\frac{1}{v(B(a_k,r))}\int_{B(a_k,2r)}\left|g(w)e^{-\varphi(z)}\right|^p dv(w)\right)\int_{B(a_k,r)}|f(z)|^p dv(z)\\&=\sum_{k=1}^\infty\left(\frac{1}{v(B(a_k,r))}\int_{B(a_k,r)}|f(z)|^p dv(z)\right)\int_{B(a_k,2r)}\left|g(w)e^{-\varphi(z)}\right|^p dv(w)\\&=\sum_{k=1}^\infty\widehat{f|^p}_r(a_k)\int_{B(a_k,2r)}\left|g(w)e^{-\varphi(z)}\right|^p dv(w)\\&\le\sum_{k=1}^\infty\|f\|_{BA_r^p}\int_{B(a_k,2r)}\left|g(w)e^{-\varphi(z)}\right|^p dv(w)\\&=\|f\|_{BA_r^p}^p\sum_{k=1}^\infty\int_{B(a_k,2r)}\left|g(w)e^{-\varphi(z)}\right|^p dv(w)\\&\le\|f\|_{BA_r^p}^p N\int_{\mathbb{C}^n}|\,g(w)e^{-\varphi(z)|p}dv(w)\end{aligned}$$

所以 $f \in BA_r^p, \|f\|_{BA_r^p}$ 是有限的, 上式也表明 $\|g\|_{L^p(\mathbb{C}^n, d\mu_{f,p})} \lesssim \|g\|_{F_\varphi^p}$. 所以 $i_p : F_\varphi^p \to L^p(\mathbb{C}^n, d\mu_{f,p})$ 是有界的. 证明完毕. □

命题 2.7 空间 VA_r^p 与参数 r 无关. 令 $1 \leqslant p < \infty, f \in L_{loc}^p$, 且 $d\mu_{f,p} = |f|^p e^{-p\varphi(w)} dv$. 则下列结论等价:

(a) 设 $\{g_k\}_{k=1}^\infty$ 是 F_φ^p 中的有界序列, 并且在 $\mathbb{C}^n$ 的任一紧子集上一致收敛于 0, 则

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{C}^n} |g_k(z)|^p d\mu_{f,p}(z) = 0.$$

(b) 对于某些 $t \geq 1, \lim_{|z|\to\infty} \widetilde{|f|^p}_t(z) = 0$.

(c) 对于足够小的半径 $r > 0, f \in VA_r^p$.

证明 $(a) \Rightarrow (b)$ 由命题 2.6的证明可知

$$\widetilde{|f|^p}_p(z) = \int_{\mathbb{C}^n} |k_{p,z}(w)|^p d\mu_{f,p}(w).$$

因为 $\{k_{p,z}\}_{z\in\mathbb{C}^n}$ 是 F_φ^p 中的有界序列; 事实上 $\{k_{p,z}\}_{z\in\mathbb{C}^n}$ 是 F_φ^p 中的单位向量序列, 并且在 $\mathbb{C}^n$ 的任一紧子集上一致收敛于 0, 所以有

$$\lim_{|z|\to\infty} \widetilde{|f|^p}_p(z) = \lim_{|z|\to\infty} \int_{\mathbb{C}^n} |k_{p,z}(w)|^p d\mu_{f,p}(w) = 0.$$

所以令 $t = p \geq 1, \lim_{|z|\to\infty} \widetilde{|f|^p}_t(z) = 0$.

$(b) \Rightarrow (c)$ 对于足够小的半径 $r > 0$, 由 (2. 6) 和 (2. 7) 得

$$\begin{aligned}
\lim_{|z|\to\infty} \left(\widehat{|f|^p}_r(z)\right)^{\frac{1}{p}} &= \lim_{|z|\to\infty} \left(\frac{1}{v(B(z,r))} \int_{B(z,r)} |f|^p(w) dv(w)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\cong \lim_{|z|\to\infty} \left(r^{-2n} \int_{B(z,r)} |f|^p(w) \left|k_{t,z}(w)\right|^t e^{-\varphi(w)} dv(w)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\lesssim \lim_{|z|\to\infty} \left(\widetilde{f|^p}_t(z)\right)^{\frac{1}{p}} = 0
\end{aligned}$$

所以 $f \in VA_r^p$.

$(c) \Rightarrow (a)$ 设 a_k 是覆盖半径为 r 的 φ-格, 使得对 $\mathbb{C}^n$ 中的任意点 z 来讲, 至多属于集合 $B(k, 2r)$ 的 N 个.$\varepsilon > 0$, 有

$$\lim_{|z|\to\infty} \left(\widetilde{f|^p}_r(z)\right)^{\frac{1}{p}} = 0$$

则存在正整数 K_1 使得当 $k \geq K_1$ 时, 有 $\widetilde{f|^p}_r(a_k) < \varepsilon$. 设 $\{g_k\}_{k=1}^\infty$ 是 F_φ^p 中的有界序列, 并且在 $\mathbb{C}^n$

的任一紧子集上一致收敛于 0, 因为 $B_{K_1} := \bigcup_{k=0}^{K_1} \overline{B(a_k, 2r)}$ 是中的一个紧子集, 则有

$$\lim_{k\to\infty} \int_{B_{K_1}} |g_k(z)|^p \, d\mu_{f,p}(z) = 0$$

所以存在一个足够大的正整数 K_2, 使得当 $k \geq K_2$ 时, 有

$$\int_{B_{K_1}} |g_k(z)|^p \, d\mu_{f,p}(z) < \varepsilon$$

在命题2.6 的证明过程中可知

$$\int_{\mathbb{C}^n} |g_k(z)|^p \, d\mu_{f,p}(z) \lesssim \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{|f|^p}_r(a_k) \int_{B(a_k,2r)} \left| g_k(w) e^{-\varphi(w)} \right|^p dv(w).$$

因为 $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 F_φ^p 中的有界序列, 所以存在一个正整数 M, 使得

$$\|g_k\|_{p,\varphi} \leq M \quad 1 \leq k < \infty.$$

令 $K = \max\{K_1, K_2\}$, 则当 $k \geq K$ 时,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{C}^n} |g_k(z)|^p \, d\mu_{f,p}(z) \lesssim & \sum_{k=1}^{K_1} \widehat{|f|^p}_r(a_k) \int_{B(a_k,2r)} \left| g_k(w) e^{-\varphi(w)} \right|^p dv(w) \\
& + \sum_{k=K_1+1}^{\infty} \widehat{f \mid p}_r(a_k) \int_{B(a_k,2r)} \left| g_k(w) e^{-\varphi(w)} \right|^p dv(w) \\
\lesssim & \|f\|_{BA_r^p}^p \sum_{k=1}^{K_1} \int_{B(a_k,2r)} \left| g_k(w) e^{-\varphi(w)} \right|^p dv(w) \\
& + \varepsilon \sum_{k=K_1+1}^{\infty} \int_{B(a_k,2r)} \left| g_k(w) e^{-\varphi(w)} \right|^p dv(w) \\
\leq & \|f\|_{BA_r^p}^p N \int_{B_{K_1}} \left| g_k(w) e^{-\varphi(w)} \right|^p dv(w) \\
& + \varepsilon N \int_{\mathbb{C}^n} \left| g_k(w) e^{-\varphi(w)} \right|^p dv(w) \\
& \leq \|f\|_{BA_T^p}^p N\varepsilon + \varepsilon N M^p \\
= & \left(\|f\|_{BA_T^p}^p + M^p \right) N\varepsilon
\end{aligned}$$

由定义可知若 $f \in VA_r^p$, 则 $f \in BA_r^p$, 所以 $\|f\|_{BA_r^p}$ 是有限的, 所以有

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{C}^n} |g_k(z)|^p \, d\mu_{f,p}(z) = 0$$

证毕. □

由上述引理和命题可知 $BMO_r^p, VMO_r^p, BO_r, VO_r, BA_r^p$ 和 VA_r^p 分别与参数 r 无关. 所以可

以分别简记为 $BMO_\varphi^p, VMO_\varphi^p, BO_\varphi, VO_\varphi, BA_\varphi^p$ 和 VA_φ^p.

下面描述空间 BMO_φ^p 和 VMO_φ^p.

命题 2.8 令 $1 \leqslant p < \infty, f \in L_{loc}^p$, 且 r 是一个足够小的正半径, 则下列结论等价:

(a) $f \in BMO_r^p$

(b) $f = f_1 + f_2, f_1 \in BO_\varphi, f_2 \in BA_\varphi^p$.

证明 $(a) \Rightarrow (b)$. 因为 $f = \widehat{f}_{\frac{r}{2}} + (f - \widehat{f}_{\frac{r}{2}})$, 则只需证明 $\widehat{f}_{\frac{r}{2}} \in BO_\varphi$ 和 $f - \widehat{f}_{\frac{r}{2}} \in BA_\varphi^p$, 对于任意的 $z, w \in \mathbb{C}^n$ 且满足 $|z-w| < \frac{r}{2}$, 有

$$\begin{aligned} |\widehat{f}_{\frac{r}{2}}(z) - \widehat{f}_{\frac{r}{2}}(w)| &\leq |\widehat{f}_{\frac{r}{2}}(z) - \widehat{f}_r(z)| + |\widehat{f}_r(z) - \widehat{f}_{\frac{r}{2}}(w)| \\ &\leq \frac{1}{v(B(z,\frac{r}{2}))} \int_B (z, \frac{r}{2}) |f(u) - \widehat{f}_r(z)| dv(u) \\ &\quad + \frac{1}{v(B(w,\frac{r}{2}))} \int_B (w, \frac{r}{2}) |f(u) - \widehat{f}_r(z)| dv(u) \end{aligned} \tag{2. 9}$$

因为 $B(w, \frac{r}{2}) \subset B(z, r), v(B(z, \frac{r}{2})) \cong v(B(w, \frac{r}{2})) \cong v(B(z, r))$, 所以结合 (2. 9) 可得

$$|\widehat{f}_{\frac{r}{2}}(z) - \widehat{f}_{\frac{r}{2}}(w)| \lesssim \frac{2}{v(B(z,r))} \int_{B(z,r)} \left| f(u) - \widehat{f}_r(z) \right| dv(u) \tag{2. 10}$$

由 $H\ddot{o}lder$ 不等式可得

$$\frac{1}{v(B(z,r))} \int_{B(z,r)} \left| f(u) - \widehat{f}_r(z) \right| dv(u) \leq \left(\frac{1}{v(B(z,r))} \int_{B(z,r)} \left| f(u) - \widehat{f}_r(z) \right|^p dv(u) \right)^{\frac{1}{p}} \tag{2. 11}$$

所以由 (2. 10),(2. 11) 可得

$$|\widehat{f}_{\frac{r}{2}}(z) - \widehat{f}_{\frac{r}{2}}(w)| \lesssim 2MO_{p,r}(f)(z).$$

所以

$$\omega_{\frac{r}{2}}(\widehat{f}_{\frac{r}{2}})(z) \lesssim 2MO_{p,r}(f)(z) \leq 2 \|f\|_{BMO_r^p}.$$

因为 $f \in BMO_r^p$, 所以 $\widehat{f}_{\frac{r}{2}} \in BO_{\frac{r}{2}}$, 即 BO_φ.

记 $g = f - \widehat{f}_{\frac{r}{2}}$, 由 L^p 范数的三角不等式得

$$\begin{aligned} \left(\widehat{|g|^p}_{\frac{r}{2}}(z)\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\frac{1}{v(B(z,\frac{r}{2}))} \int_{B\left(z,\frac{r}{2}\right)} \left| f(w) - \widehat{f}_{\frac{r}{2}}(w) \right|^p dv(w) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\frac{1}{v(B(z,\frac{r}{2}))} \int_{B\left(z,\frac{r}{2}\right)} \left| f(w) - \widehat{f}_{\frac{r}{2}}(z) \right|^p dv(w) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad + \left(\frac{1}{v(B(z,\frac{r}{2}))} \int_{B\left(z,\frac{r}{2}\right)} \left| \widehat{f}_{\frac{r}{2}}(w) - \widehat{f}_{\frac{r}{2}}(z) \right|^p dv(w) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq MO_{p,\frac{r}{2}}(f)(z) + \omega_{\frac{r}{2}}\left(\widehat{f}_{\frac{r}{2}}\right)(z) \end{aligned}$$

因为 $f \in BMO_r^p$, 所以 $f \in BMO_{\frac{r}{2}}^p$, 又因为 $\widehat{f}_{\frac{r}{2}} \in BO_{\frac{r}{2}}$, 所以 $g = f - \widehat{f}_{\frac{r}{2}} \in BA_{\frac{r}{2}}^p$, 即 BA_φ^p.

$(b) \Rightarrow (a)$. 由 $H\ddot{o}lder$ 不等式可得

$$\begin{aligned}\left|\widehat{f_1}_r(z) - f_1(z)\right| &= \left|\frac{1}{v(B(z,r))}\int_{B(z,r)} (f_1(w) - f_1(z))\, dv(w)\right| \\ &\le \left(\frac{1}{v(B(z,r))}\int_{B(z,r)} |f_1(w) - f_1(z)|^p\, dv(w)\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\le \omega_r\,(f_1)\,(z).\end{aligned}$$

因此由 L^p 范数的三角不等式得

$$\begin{aligned}MO_{p,r}\,(f_1)\,(z) &= \left(\frac{1}{v(B(z,r))}\int_{B(z,r)} \left|f_1(w) - \widehat{f}_{1r}(z)\right|^p dv(w)\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\le \left(\frac{1}{v(B(z,r))}\int_{B(z,r)} |f_1(w) - f_1(z)|^p\, dv(w)\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad + \left(\frac{1}{v(B(z,r))}\int_{B(z,r)} \left|\widehat{f}_{1_r}(z) - f_1(z)\right|^p dv(w)\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\le \omega_r\,(f_1)\,(z) + \left|\widehat{f}_{1r}(z) - f_1(z)\right| \\ &\le 2\omega_r\,(f_1)\,(z).\end{aligned}$$

因为 $f_1 \in BO_\varphi$, 并且当 r 足够小时,$f_1 \in BO_r$, 所以 $f_1 \in BMO_r^p$.

另一方面, 由 $H\ddot{o}lder$ 不等式得

$$\begin{aligned}\left|\widehat{f}_{2r}(z)\right| &= \left|\frac{1}{v(B(z,r))}\int_{B(z,r)} f_2(w) dv(w)\right| \\ &\le \left(\frac{1}{v(B(z,r))}\int_{B(z,r)} |f_2(w)|^p\, dv(w)\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\widehat{|f_2|^p}_r(z)\right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

因此由 L^p 范数的三角不等式得

$$\begin{aligned}MO_{p,r}\,(f_2)\,(z) &= \left(\frac{1}{v(B(z,r))}\int_{B(z,r)} \left|f_2(w) - \widehat{f}_{2r}(z)\right|^p dv(w)\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\le \left(\frac{1}{v(B(z,r))}\int_{B(z,r)} |f_2(w)|^p\, dv(w)\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\frac{1}{v(B(z,r))}\int_{B(z,r)} \left|\widehat{f}_{2r}(z)\right|^p dv(w)\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\le \left(\frac{1}{v(B(z,r))}\int_{B(z,r)} |f_2(w)|^p\, dv(w)\right)^{\frac{1}{p}} + \left|\widehat{f}_{2r}(z)\right| \\ &\le 2\left(|\widehat{\ f_2|^p}_r(z)\right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

因为 $f_1 \in BA^p_\varphi$, 并且当 r 足够小时,$f_1 \in BA^p_r$, 所以 $f_1 \in BMO^p_r$. 很容易去验证 BMO^p_r 空间是线性的, 所以 $f = f_1 + f_2 \in BMO^p_r$, 证明完毕. □

命题 2.9 令 $1 \leqslant p < \infty, f \in L^p_{loc}$, 并且 r 是一个足够小的正数, 则下列结论等价:

(a) $f \in VMO^p_r$

(b) $f = f_1 + f_2, f_1 \in VO_\varphi, f_2 \in VA^p_\varphi$.

证明 (a) $\Rightarrow$ (b) 因为 $f = \widehat{f}_{\frac{r}{2}} + (f - \widehat{f}_{\frac{r}{2}})$, 则只需证明 $\widehat{f}_{\frac{r}{2}} \in VO_\varphi$ 和 $f - \widehat{f}_{\frac{r}{2}} \in VA^p_\varphi$, 对于任意的 $z, w \in \mathbb{C}^n$ 根据命题2.8 的证明可知

$$\omega_{\frac{r}{2}}\left(\widehat{f}_{\frac{r}{2}}\right)(z) \lesssim 2MO_{p,r}(f)(z),$$

所以

$$\left(\widehat{|g|^p}_{\frac{r}{2}}(z)\right)^{\frac{1}{p}} \leq MO_{p,\frac{r}{2}}(f)(z) + \omega_{\frac{r}{2}}\left(\widehat{f}_{\frac{r}{2}}\right)(z),$$

记 $g = f - \widehat{f}_r$, 若 $f \in VMO^p_r$, 则

$$\lim_{|z|\to\infty} \omega_{\frac{r}{2}}\left(\widehat{f}_{\frac{r}{2}}\right)(z) \lesssim \lim_{|z|\to\infty} 2MO_{p,r}(f)(z) = 0,$$

所以

$$\begin{aligned}\lim_{|z|\to\infty}\left(\widehat{|g|^p}_{\frac{r}{2}}(z)\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \lim_{|z|\to\infty} MO_{p,\frac{r}{2}}(f)(z) + \lim_{|z|\to\infty}\omega_{\frac{r}{2}}\left(\widehat{f}_{\frac{r}{2}}\right)(z)\\ &\lesssim \lim_{|z|\to\infty} MO_{p,r}(f)(z) + \lim_{|z|\to\infty}\omega_{\frac{r}{2}}\left(\widehat{f}_{\frac{r}{2}}\right)(z) = 0\end{aligned}$$

所以 $\widehat{f}_{\frac{r}{2}} \in VO_{\frac{r}{2}}$ (即 VO_φ), 并且 $f - \widehat{f}_{\frac{r}{2}} \in VA^p_{\frac{r}{2}}$ (即 VA^p_φ).

(b) $\Rightarrow$ (a). 令 $f = f_1 + f_2$, 且 $f_1 \in VO_\varphi$ 且 $f_2 \in VA^p_\varphi$. 根据命题2.8 的证明可知

$$MO_{p,r}(f_1)(z) \leq 2\omega_r(f_1)(z),$$

以及

$$MO_{p,r}(f_2)(z) \leq 2\left(\widehat{f_2\,|}_r(z)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

因为 $f_1 \in VO_\varphi$ 且 $f_2 \in VA^p_\varphi$, 所以有

$$\lim_{|z|\to\infty} MO_{p,r}(f_1)(z) \leq \lim_{|z|\to\infty} 2\omega_r(f_1)(z) = 0$$

以及

$$\lim_{|z|\to\infty} MO_{p,r}(f_2)(z) \leq \lim_{|z|\to\infty} 2\left(\widehat{|f_2|^p}_r(z)\right)^{\frac{1}{p}} = 0$$

所以 $f_1, f_2 \in VMO^p_r$, 又因为 VMO^p_r 空间是线性的, 所以 $f = f_1 + f_2 \in VMO^p_r$, 证毕. □

3. Fock 空间 F_φ^p 上的 Hankel 算子

本节刻画在 n 维广义 Fock 空间 F_φ^p 上具有复值函数符号 $f \in \Gamma_\varphi^p$ 的 Hankel 算子 H_f 和 $H_{\bar{f}}$ 的有界性和紧性, 其中 $1 \leqslant p < \infty$.

对于 $1 \leqslant p < \infty, f \in \Gamma_\varphi^p$, 定义 $\mathbb{C}^n$ 上的函数 MO_pf 如下

$$MO_pf(z) = \left\| fk_{p,z} - \overline{g_z(z)}k_{p,z} \right\|_{p,\varphi}, \quad z \in \mathbb{C}^n$$

其中

$$g_z(w) = \frac{P_\varphi\left(\bar{f}k_{p,z}\right)(w)}{k_{p,z}(w)}, \quad w \in \mathbb{C}^n$$

因为 $k_{p,z}$ 在 $\mathbb{C}^n$ 中不为 0, 所以 g_z 是 $\mathbb{C}^n$ 上的全纯函数.

定理 3.1 令 $1 \leqslant p < \infty, f \in \Gamma_\varphi^p$, 若 $MO_pf \in L^\infty(\mathbb{C}^n)$, 则 $f \in BMO_r^p$.

证明 对于无穷小的半径 $r > 0$, 由命题2.6的证明过程中的 (2. 6) 和 (2. 7) 可知对任意的 $z \in \mathbb{C}^n$, 有

$$\begin{aligned}(MO_pf)^p &= \int_{\mathbb{C}^n} |fk_{p,z} - \overline{g_z(z)}k_{p,z}|^p e^{-p\varphi(w)} dv(w) \\ &\cong \frac{1}{v(B(z,r))} \int_{\mathbb{C}^n} |f - \overline{g_z(z)}|^p dv(w) \\ &\geq \frac{1}{v(B(z,r))} \int_{B(z,r)} |f - \overline{g_z(z)}|^p dv(w).\end{aligned}$$

因为 $MO_pf \in L^\infty(\mathbb{C}^n)$, 所以

$$\frac{1}{v(B(z,r))} \int_{B(z,r)} |fk_{p,z} - \overline{g_z(z)}|^p dv(w) \leq \|MO_pf\|_\infty^p.$$

由引理2.2可知令 $c(z) = \overline{g_z(z)}, C = \|MO_pf\|_\infty^p$, 所以有 $f \in BMO_r^p$, 证明完毕. □

定理 3.2 令 $1 \leqslant p < \infty, f \in \Gamma_\varphi^p$, 则有

$$MO_pf(z) \lesssim \|H_fk_{p,z}\|_{p,\varphi} + \left\|H_{\bar{f}}k_{p,z}\right\|_{p,\varphi}$$

证明 由三角不等式可得

$$\begin{aligned}MO_pf(z) &= \left\| fk_{p,z} - \overline{g_z(z)}k_{p,z} \right\|_{p,\varphi} \\ &\leq \|fk_{p,z} - P(fk_{p,z})\|_{p,\varphi} + \left\| P(fk_{p,z}) - \overline{g_z(z)}k_{p,z} \right\|_{p,\varphi} \\ &= \|H_fk_{p,z}\|_{p,\varphi} + \left\| P(fk_{p,z}) - \overline{g_z(z)}k_{p,z} \right\|_{p,\varphi}\end{aligned} \tag{3. 1}$$

由再生公式可得对任意的 $z,w\in\mathbb{C}^n$, 有

$$\begin{aligned}\overline{g_z(z)}k_{p,z}(w)&=\|K(\cdot,z)\|_{p,\varphi}^{-1}\overline{g_z(z)K_\varphi(z,w)}\\&=\|K(\cdot,z)\|_{p,\varphi}^{-1}\overline{\langle g_zK_\varphi(\cdot,w),K_\varphi(\cdot,z)\rangle_\varphi}\\&=\|K(\cdot,z)\|_{p,\varphi}^{-1}\langle K_\varphi(\cdot,z),g_zK_\varphi(\cdot,w)\rangle_\varphi\\&=\langle\overline{g_z}k_{p,z},K_\varphi(\cdot,w)\rangle_\varphi=P_\varphi(\bar{g}k_{p,z})(w)\end{aligned}\tag{3. 2}$$

所以

$$\begin{aligned}\left\|P_\varphi(fk_{p,z})-\overline{g_z(z)}k_{p,z}\right\|_{p,\varphi}&=\|P_\varphi(fk_{p,z})-P_\varphi(\overline{g_z}k_{p,z})\|_{p,\varphi}\\&=\|P_\varphi(P_\varphi(fk_{p,z})-\overline{g_z}k_{p,z})\|_{p,\varphi}\\&\le\|P_\varphi\|_{L_\varphi^p\to F_\varphi^p}\|P_\varphi(fk_{p,z})-\overline{g_z}k_{p,z}\|_{p,\varphi}\end{aligned}\tag{3. 3}$$

由 g_z 的定义可知 $g_zk_{p,z}=P(\bar{f}k_{p,z})$, 所以

$$\begin{aligned}\|P_\varphi(fk_{p,z})-\overline{g_z}k_{p,z}\|_{p,\varphi}&\le\|fk_{p,z}-P_\varphi(fk_{p,z})\|_{p,\varphi}+\|fk_{p,z}-\overline{g_z}k_{p,z}\|_{p,\varphi}\\&=\|H_fk_{p,z}\|_{p,\varphi}+\left\|\bar{f}k_{p,z}-g_zk_{p,z}\right\|_{p,\varphi}\\&=\|H_fk_{p,z}\|_{p,\varphi}+\left\|\bar{f}k_{p,z}-P_\varphi\left(\bar{f}k_{p,z}\right)\right\|_{p,\varphi}\\&=\|H_fk_{p,z}\|_{p,\varphi}+\left\|H_{\bar{f}}k_{p,z}\right\|_{p,\varphi}\end{aligned}\tag{3. 4}$$

所以由 (3. 1),(3. 3) 和 (3. 4) 可得

$$MO_pf(z)\le(1+\|P_\varphi\|_{L_\varphi^p\to F_\varphi^p})\|H_fk_{p,z}\|_{p,\varphi}+\left\|H_{\bar{f}}k_{p,z}\right\|_{p,\varphi}$$

证明完毕. □

定理 3.3 令 $1\leqslant p<\infty, f\in\Gamma_\varphi^p$, 则 $H_f,H_{\bar{f}}:F_\varphi^p\to L_\varphi^p$ 是紧的，则 $f\in VMO_\varphi^p$.

证明 因为 $\{k_{p,z}\}_{z\in\mathbb{C}^n}$ 是 F_φ^p 中的有界序列; 事实上 $\{k_{p,z}\}_{z\in\mathbb{C}^n}$ 是 F_φ^p 中的单位向量序列, 并且在 $\mathbb{C}^n$ 的任一紧子集上一致收敛于 0, 所以由 Hankel 算子 H_f 得紧性可知

$$\lim_{|z|\to\infty}\|H_fk_{p,z}\|_{p,\varphi}=0.$$

同理可知

$$\lim_{|z|\to\infty}\left\|H_{\bar{f}}k_{p,z}\right\|_{p,\varphi}=0.$$

所以由定理3.2 可得

$$\lim_{|z|\to\infty}MO_pf(z)\lesssim\lim_{|z|\to\infty}\left(\|H_fk_{p,z}\|_{p,\varphi}+\left\|H_{\bar{f}}k_{p,z}\right\|_{p,\varphi}\right)=0,$$

对于固定的 $r>0$, 则由定理3.1 的证明可知

$$(MO_pf(z))^p \gtrsim \frac{1}{v(B(z,r))}\int_{B(z,r)}\left|f(w)-\overline{g_z(z)}\right|^p dv(w),$$

所以有

$$\lim_{|z|\to\infty}\frac{1}{v(B(z,r))}\int_{B(z,r)}\left|f(w)-\overline{g_z(z)}\right|^p dv(w)\lesssim \lim_{|z|\to\infty}(MO_pf(z))^p=0$$

所以由引理2.3 可知 $f\in VMO_{\varphi}^p$. 证毕. □

定理 3.4 对于 $1\leqslant p<\infty$, $f\in\Gamma_{\varphi}^p$, 则有

(a) 若 $f\in BO_{\varphi}$, 则 $H_f:F_{\varphi}^p\to L_{\varphi}^p$ 是有界的.

(b) 若 $f\in VO_{\varphi}$, 则 $H_f:F_{\varphi}^p\to L_{\varphi}^p$ 是紧的.

证明

(a) 由 [13] 可知, 当 $0<p<\infty$ 时，存在常数 C 和 M 使得

$$\left(\int_{\mathbb{C}^n}|K_{\varphi}(z,w)|^p e^{-p(\varphi(z)+\varphi(w))}dv(w)\right)\leq C,$$

所以

$$\sup_{z\in\mathbb{C}^n}\int_{\mathbb{C}^n}(|z-w|+1)\,|K_{\varphi}(z,w)|\,e^{-(\varphi(z)+\varphi(w))}dv(w)<\infty$$

对于 $g\in F_{\varphi}^p$, 由引理2.4 得

$$\begin{aligned}|H_fg(z)|\,e^{-\varphi(z)}&\leq\int_{\mathbb{C}^n}|f(z)-f(w)||g(w)||K_{\varphi}(z,w)|\,e^{-\varphi(w)}dv(w)e^{-\varphi(z)}\\&\lesssim\int_{C^n}(|z-w|+1)\,|g(w)||K_{\varphi}(z,w)|\,e^{-\varphi(w)}dv(w)e^{-\varphi(z)}\\&=\int_{C^n}(|z-w|+1)\,|K_{\varphi}(z,w)|\,e^{-(\varphi(z)+\varphi(w))}|g(w)|e^{-\varphi(w)}dv(w).\end{aligned}$$

当 $p=1$ 时, 由 Fubini 定理得,

$$\begin{aligned}\|H_fg\|_{1,\varphi}&\lesssim\int_{\mathbb{C}^n}|g(w)|e^{-\varphi(w)}dv(w)\int_{\mathbb{C}^n}(|z-w|+1)\,|K_{\varphi}(z,w)|\,e^{-(\varphi(z)+\varphi(w))}dv(z)\\&=\int_{\mathbb{C}^n}|g(w)|e^{-\varphi(w)}dv(w)\int_{\mathbb{C}^n}(\varrho(w,z)+1)\,|K_{\varphi}(w,z)|\,e^{-(\varphi(w)+\varphi(z))}dv(z)\\&\leq C\|g\|_{1,\varphi}\end{aligned}$$

当 $p=\infty$ 时, 有

$$\|H_fg\|_{\infty,\varphi}\lesssim\|g\|_{\infty,\varphi}\int_{\mathbb{C}^n}(|z-w|+1)\,|K_{\varphi}(z,w)|\,e^{-(\varphi(z)+\varphi(w))}dv(w)\leq C\|g\|_{\infty,\varphi}$$

所以当 $p=1,\infty$ 时,$H_f:F_{\varphi}^p\to L_{\varphi}^p$ 是有界的, 由 Riesz–Thorin 插值定理可知当 $1\leqslant p<\infty$

时,$H_f : F^p_\varphi \to L^p_\varphi$ 是有界的.

(b) 对于任意的 $R > 0$, 定义 $f_R(z) = f(z) \cdot \chi_{|z|\le R}$, 对于足够小的半径 $r > 0$, 因为 $f \in VO_\varphi$, 即 $f \in VO_r$, 所以

$$\lim_{|z|\to\infty} \omega_r(f)(z) = 0.$$

所以对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在一个常数 $M > 0$, 使得当 $|z| > M$ 时, 有 $\omega_r(f)(z) < \varepsilon$. 令 $R_0 = M + r$, 则对于 $R > R_0$, 当 $|z| \le M$ 时, 若 $w \in B(z, r)$ 且 $|w| \le |z| + |z-w| < M + r = R_0 < R$, 则有 $(f_R - f)(z) = f(z) - f(z) = 0, (f_R - f)(w) = f(w) - f(w) = 0$. 所以对于 $|z| \le M$, 有

$$\omega_r\left(f_R - f\right)(z) = \sup\left\{\left|\left(f_R - f\right)(z) - \left(f_R - f\right)(w)\right| : w \in B(z,r)\right\} = 0$$

所以

$$\sup_{|z|\le M} \omega_r\left(f_R - f\right)(z) = 0.$$

另一方面, 对于任意的 $z \in \mathbb{C}^n$, 有 $\omega_r(f_R)(z) \le \omega_r(f)(z)$, 所以当 $|z| > M$ 时, 有

$$\omega_r\left(f_R - f\right)(z) \le \omega_r(f_R)(z) + \omega_r(f)(z) \le 2\omega_r(f)(z) < 2\varepsilon.$$

所以有

$$\sup_{|z|>M} \omega_r\left(f_R - f\right)(z) < 2\varepsilon.$$

所以

$$\|f_R - f\|_{BO_r} = \sup_{z\in\mathbb{C}^n} \omega_r\left(f_R - f\right)(z) = \max\left\{\sup_{|z|\le M} \omega_r\left(f_R - f\right)(z), \sup_{|z|>M} \omega_r\left(f_R - f\right)(z)\right\} < 2\varepsilon$$

所以有 $\lim_{R\to\infty} \|f_R - f\|_{BO_r} = 0$. 由引理2.4 可知存在绝对常数 $C > 0$ 使得 $\|H_{f_R} - H_f\| \le C\|f_R - f\|_{BO_r}$. 所以有 $\lim_{R\to\infty} \|H_{f_R} - H_f\| = 0$. 若紧算子空间是闭的, 则对任意的 $R > 0$,H_{f_R} 是紧的. 设 $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 F^p_φ 中的有界序列, 并且在 $\mathbb{C}^n$ 上一致收敛于 0. 因为 VO_φ 空间中的函数是连续的, 且 $f_R(z)$ 在紧子集 $\{z \in \mathbb{C}^n : |z| \le R\}$ 上是有界的, 所以其在 $\mathbb{C}^n$ 上是有界的. 所以 $\|f_R\|_\infty$ 是有限的. 因为对任意的 $g \in F^p_\varphi$ 有 $\|f_R g\|_{p,\varphi} \le \|f_R\|_\infty \|g\|_{p,\varphi} < \infty$, 所以 $f_R g \in L^p_\varphi$. 因为 $P_\varphi : L^p_\varphi \to F^p_\varphi$ 是有界的, 所以对任意的 $g \in F^p_\varphi$, 有 $\|P_\varphi\left(f_R g\right)\|_{p,\varphi} \le \|P_\varphi\| \to F^p_\varphi \|f_R g\|_{p,\varphi}$. 因此当 $k \ge 1$ 时,

$$\|H_{f_R} g_k\|_{p,\varphi} = \|(I - P_\varphi)\left(f_R g_k\right)\|_{p,\varphi} \le \|f_R g_k\|_{p,\varphi} + \|P_\varphi\left(f_R g_k\right)\|_{p,\varphi} \le \left(1 + \|P_\varphi\|_{L^p_\varphi \to F^p_\varphi)}\right) \|f_R g_k\|_{p,\varphi}$$

因为序列 $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ 在紧子集 $\{z \in \mathbb{C}^n : |z| \le R\}$ 上一致收敛于 0, 所以对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $K > 0$ 使得当 $k > K$ 时, 对任意的 $|z| \le R$, 有

$$|g_k(z)| < \varepsilon,$$

所以

$$\|f_R - f\|_{BO_r} = \sup_{z\in\mathbb{C}^n} \omega_r\left(f_R - f\right)(z) = \max\left\{\sup_{|z|\le M} \omega_r\left(f_R - f\right)(z), \sup_{|z|>M} \omega_r\left(f_R - f\right)(z)\right\} < 2\varepsilon$$

所以有 $\lim_{k\to\infty}\|f_R g_k\|_{p,\varphi} = 0$. 且 $\lim_{k\to\infty}\|H_{f_R} g_k\|_{p,\varphi} = 0$, 所以 H_{f_R} 是紧的. 证毕. □

下一个引理是引理2.4的改进版本. 这种改进的优势是我们可以利用它来揭示 Hankel 算子 H_f 的范数和符号 f 的 $BOr-$ 范数之间的关系.

定理 3.5 *设 r 是任一正数,*

(a) 如果 $f \in BO_r$, 则存在一个仅与 r 有关的常数 $C_r > 0$ 使得对所有的 $z, w \in \mathbb{C}^n$, 有

$$|f(z) - f(w)| \le C_r \|f\|_{BO_r}(|z - w| + 1)$$

(b) 如果 $f \in \Gamma^p_\varphi, 1 \le p < \infty$, 则有 Hankel 算子 $H_f : F^p_\varphi \to L^p_\varphi$ 的算子范数由 $CC_r\|f\|_{BO_r}$ 控制, 其中 $C > 0$ 是一个绝对常数.

证明 对引理2.4 进行简单修改即得 (a) 成立.

利用定理3.4 的证明中使用的方法可得 (b) 成立. 因此, 证明完毕. □

定理 3.6 *对于 $1 \leqslant p < \infty$ 且 $f \in \Gamma^p_\varphi$.*

(a) 若 $f \in BA^p_\varphi$, 则 $H_f : F^p_\varphi \to L^p_\varphi$ 是有界的.

(b) 若 $f \in VA^p_\varphi$, 则 $H_f : F^p_\varphi \to L^p_\varphi$ 是紧的.

证明 (a) 令 $f \in BA^p_\varphi$. 由命题2.6 可知 $i_p : F^p_\varphi \to L^p(\mathbb{C}^n, d\mu_{f,p})$ 是有界的, 所以对于 $g \in F^p_\varphi$, 我们有

$$\|fg\|_{p,\varphi} = \|g\|_{L^p(d\mu_{f,p})} \le \|i_p\|_{F^p_\varphi\to L^p(\mathbb{C}^n,d\mu_{f,p})}\|g\|_{p,\varphi},$$

所以 $fg \in L^p_\varphi$. 因为 Bergman 投影 P_φ 在 L^p_φ 上是有界的, 所以

$$\begin{aligned}\|H_f g\|_{p,\varphi} &\le \|fg\|_{p,\varphi} + \|P_\varphi(fg)\|_{p,\varphi} \le \left(1 + \|P_\varphi\|_{L^p_\varphi\to F^p_\varphi}\right)\|fg\|_{p,\varphi} \\ &\le \left(1 + \|P_\varphi\|_{L^p_\varphi\to F^p_\varphi}\right)\|i_p\|_{F^p_\varphi\to L^p(\mathbb{C}^n,d\mu_{f,p})}\|g\|_{p,\varphi}\end{aligned} \tag{3. 5}$$

所以 $H_f : F^p_\varphi \to L^p_\varphi$ 是有界的.

(b) 设 $\{g_k\}_{k=1}^\infty$ 是 F^p_φ 中的有界序列, 并且在 $\mathbb{C}^n$ 上一致收敛于 0. 由 (3. 5) 知对任意的 $1 \le k < \infty$, 有

$$\|H_f g_k\|_{p,\varphi} \le \left(1 + \|P_\varphi\|_{L^p_\varphi\to F^p_\varphi}\right)\|i_p\|_{F^p_\varphi\to L^p(\mathbb{C}^n,d\mu_{f,p})}\|g_k\|_{L^p(d\mu_{f,p})}$$

其中 $d\mu_{f,p}=|f|^p e^{-p\varphi(w)}dv$. 因为 $f\in VA^p_\varphi$, 根据命题2.7 可知

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\|H_f g_k\|_{p,\varphi} &\le \lim_{k\to\infty}\left(1+\|P_\varphi\|_{L^p_\varphi\to F^p_\varphi)}\right)\|i_p\|_{F^p_\varphi\to L^p(\mathbb{C}^n,d\mu_{f,p})}\|g_k\|_{L^p(d\mu_{f,p})}\\ &=\lim_{k\to\infty}\left(1+\|P_\varphi\|_{L^p_\varphi\to F^p_\varphi)}\right)\|i_p\|_{F^p_{\mathbb{N}}\to L^p(\mathbb{C}^n,d\mu_{f,p})}\left(\int_{\mathbb{C}^n}|g_k(z)|^p\,d\mu_{f,p}(z)\right)^{\frac{1}{p}}=0\end{aligned}$$

所以 $H_f:F^p_\varphi\to L^p_\varphi$ 是紧的, 证毕. □

定理 3.7 当 $1\leqslant p<\infty$ 且 $f\in\Gamma^p_\varphi$ 时

(*a*) *Hankel* 算子 $H_f, H_{\bar f}: F^p_\varphi\to L^p_\varphi$ 同时有界当且仅当 $f\in BMO^p_\varphi$.

(*b*) *Hankel* 算子 $H_f, H_{\bar f}: F^p_\varphi\to L^p_\varphi$ 同时紧当且仅当 $f\in VMO^p_\varphi$.

证明 (a) 由定理3.1 和定理3.2 可知必要性成立. 又因为 $f\in BMO^p_\varphi$ 当且仅当 $\bar f\in BMO^p_\varphi$, 所以由命题2.8命题、定理3.4和定理3.6可知充分性成立.

(b) 由定理3.3 可知必要性成立, 又因为 $f\in VMO^p_\varphi$ 当且仅当 $\bar f\in VMO^p_\varphi$, 所以由命题2.9、定理3.4 和定理3.6可知充分性成立, 定理证毕. □

推论 3.8 记 $1\leqslant p<\infty, f\in\Gamma^p_\varphi$, 若 f 是 $\mathbb{C}^n$ 上的实值函数, 则

(a) $H_f:F^p_\varphi\to L^p_\varphi$ 有界当且仅当 $f\in BMO^p_\varphi$.

(b) $H_f, H_{\bar f}:F^p_\varphi\to L^p_\varphi$ 是紧的当且仅当 $f\in VMO^p_\varphi$.

推论 3.9 令 $1\leqslant p<\infty, f\in\Gamma^p_\varphi$, 若 f 是 $\mathbb{C}^n$ 上的全纯函数, 则

(a) $H_{\bar f}:F^p_\varphi\to L^p_\varphi$ 有界当且仅当 $f\in BMO^p_\varphi$.

(b) $H_f, H_{\bar f}:F^p_\varphi\to L^p_\varphi$ 是紧的当且仅当 $f\in VMO^p_\varphi$.

4. 总结

本文利用有界 (消失) 平均震荡函数的性质, 讨论了一类 n 维广义 Fock 空间 $F^p_\varphi(1\le p<\infty)$ 上的 Hankel 算子 H_f 和 $H_{\bar f}$ 的有界性和紧性, 拓展了文献 [23] 的结果. 同时, 利用 Berezin 变换刻画了空间 BMO 和 VMO 的几何性质. 截止目前, 当 $1\le p<\infty$ 时, 在各类加权 Fock 空间上的 Hankel 算子的有界性和紧性的研究已较为完整. 而当 $p=\infty$ 时, 对于 Hankel 算子的研究有赖于对“平均震荡”函数空间的进一步刻画, 当 $0<p<1$ 时, 要得到完整的结果还需有方法上的进一步创新.

基金项目

国家自然科学基金 (11901205).

参考文献

[1] Duren, P.L. (1970) Theory of H_p Spaces. Academic Press, Amsterdam.

[2] Hedenmalm, H., Korenblum, B. and Zhu, K.H. (2000) Theory of Bergman Spaces. Springer, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0497-8

[3] Zhu, K.H. (2007) Operator Theory in Function Spaces. In: *Mathematical Surveys and Monographs*, Vol. 138, American Mathematical Society, Providence.

[4] Bargmann, V. (1961) On a Hilbert Space of Analytic Functions and an Associated Integral Transform. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **14**, 187-214. https://doi.org/10.1002/cpa.3160140303

[5] Bauer, W. (2005) Mean Oscillation and Hankel Operators on the Segal-Bargmann Space. *Integral Equations and Operator Theory*, **52**, 1-15. https://doi.org/10.1007/s00020-003-1272-6

[6] Zhu, K. (2012) Analysis on Fock Spaces. Graduate Texts in Mathematics 263. Springer, New York.

[7] Perälä, A., Schuster, A. and Virtanen, J.A. (2014) Hankel Operators on Fock Spaces. *Operator Theory: Advances and Applications*, **236**, 377-390. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0648-0_24

[8] Kristian, S. and Youssfi, E.H. (2013) Hankel Operators on Fock Spaces and Related Bergman Kernel Estimates. *Journal of Geometric Analysis*, **23**, 170-210. https://doi.org/10.1007/s12220-011-9241-9

[9] Wang, X., Cao, G. and Zhu, K. (2014) BMO and Hankel Operators on Fock-Type Spaces. *Journal of Geometric Analysis*, **25**, 1650-1665. https://doi.org/10.1007/s12220-014-9488-z

[10] Tu, Z. and Wang, X. (2021) Mean Oscillation and Hankel Operators on Fock-Type Spaces. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, **37**, 1089-1108. https://doi.org/10.1007/s10114-021-0526-z

[11] Constantin, O. and Ortega-Cerdà, J. (2011) Some Spectral Properties of the Canonical Solution Operator to $\bar{\partial}$ on Weighted Fock Spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **377**, 353-361. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2010.10.074

[12] 胡璋剑, 吕小芬. 加权 Fock 空间上的 Hankel 算子 [J]. 中国科学: 数学, 2016, 46(2): 141-156.

[13] Hu, Z. and Lv, X. (2014) Toeplitz Operators on Fock Spaces $F^p(\varphi)$. *Integral Equations and Operator Theory*, **80**, 33-59. https://doi.org/10.1007/s00020-014-2168-3

[14] Bauer, W., Coburn, L.A. and Isralowitz, J. (2010) Heat Flow, BMO, and the Compactness of Toeplitz Operators. *Journal of Functional Analysis*, **259**, 57-78. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2010.03.016

[15] Bommier-Hato, H. and Constantin, O. (2018) Big Hankel Operators on Vector-Valued Fock Spaces in C^d. *Integral Equations and Operator Theory*, **90**, 1-25. https://doi.org/10.1007/s00020-018-2433-y

[16] Isralowitz, J. (2010) Compact Toeplitz Operators on the Segal-Bargmann Space. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **374**, 554-557. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2010.08.066

[17] Bauer, W. and Isralowitz, J. (2012) Compactness Characterization of Operators in the Toeplitz Algebra of the Fock Space F^p. *Journal of Functional Analysis*, **263**, 1323-1355. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2012.04.020

[18] Krizhevsky, A., Sutskever, I. and Hinton, G.E. (2021) Mean Oscillation and Hankel Operators on Fock-Type Spaces. *Acta Mathematica Sinica*, **37**, 1089-1108. https://doi.org/10.1007/s10114-021-0526-z

[19] Hu, Z. and Lv, X. (2011) Toeplitz Operators from One Fock Space to Another. *Integral Equations Operator Theory*, **70**, 541-559. https://doi.org/10.1007/s00020-011-1887-y

[20] Berger, C.A. and Coburn, L.A. (1987) Toeplitz Operators on the Segal-Bargmann Space. *Transactions of the America Mathematical Society*, **301**, 813-829. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1987-0882716-4

[21] Cho, H.R., Choe, B.R. and Koo, H. (2014) Linear Combinations of Composition Operators on the Fock-Sobolev Spaces. *Potential Analysis*, **41**, 1223-1246. https://doi.org/10.1007/s11118-014-9417-6

[22] Cho, H.R., Choe, B.R. and Koo, H. (2015) Fock-Sobolev Spaces of Fractional Order. *Potential Analysis*, **43**, 199-240. https://doi.org/10.1007/s11118-015-9468-3

[23] Wang, X., Cao, G. and Xia, J. (2014) Toeplitz Operators on Fock-Sobolev Spaces with Positive Measure Symbols. *Science China Mathematics*, **57**, 1443-1462. https://doi.org/10.1007/s11425-014-4813-3

[24] Wang, X., Xia, J. and Cao, G. (2014) Bounded, Compact and S_p-Class Operators on Fock Sobolev Spaces. *Scientia Sinica Mathematica*, **44**, 263-274. https://doi.org/10.1360/012014-15

[25] 卢玉峰, 杨君. 加权 Bergman 空间上 Berezin 变换和 Hankel 算子乘积 [J]. 数学学报, 2009, 52(4): 665-676.

[26] 王晓峰, 夏锦, 陈建军. 广义 Fock 空间上的 Hankel 算子 [J]. 数学学报 (中文版), 2019, 62(4): 561-572.

[27] Schuster, A.P. and Varolin, D. (2012) Toeplitz Operators and Carleson Measures on Generalized Bargmann-Fock Spaces. *Integral Equations and Operator Theory*, **72**, 363-392. https://doi.org/10.1007/s00020-011-1939-3

[28] Janson, S., Peetre, J. and Rochberg, R. (1987) Hankel Forms and the Fock Space. *Revista Matemática Iberoamericana*, **3**, 61-138. https://doi.org/10.4171/RMI/46

[29] Delin, H. (1998) Pointwise Estimates for the Weighted Bergman Projection Kernel in $\mathbb{C}^n$, Using a Weighted L^2 Estimate for the $\bar{\partial}$ Equation. *Annales de l'Institut Fourier*, **48**, 967-997. https://doi.org/10.5802/aif.1645

[30] Pertti, M. (1995) Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces: Fractals and Rectifiability. Cambridge University Press, Cambridge.