Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(3), 354-367
Published Online March 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.123039

Cartan-Eilenberg $\mathcal{X}$-内射和 $\mathcal{X}$-平坦复形

王亚丽

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2022年1月27日；录用日期：2022年3月2日；发布日期：2022年3月9日

摘 要

设 $\mathcal{X}$ 为一个左 R-模类。本文引入了 CE $\mathcal{X}$-内射复形和 CE $\mathcal{X}$-平坦复形的概念，在 $\mathcal{X}$ 满足一定条件的情况下，讨论了这两类复形的联系，给出了这两类复形的一些等价刻画。

关键词

CE $\mathcal{X}$-内射复形，CE $\mathcal{X}$-平坦复形，$\mathcal{X}$-内射模，$\mathcal{X}$-平坦模

Cartan-Eilenberg $\mathcal{X}$-Injective and $\mathcal{X}$-Flat Complexes

Yali Wang

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Jan. 27^{th}, 2022; accepted: Mar. 2^{nd}, 2022; published: Mar. 9^{th}, 2022

Abstract

Let $\mathcal{X}$ be a class of left R-modules. In this paper, the notions of CE $\mathcal{X}$-injective complexes and CE $\mathcal{X}$-flat complexes are introduced. Under certain mild assumptions on $\mathcal{X}$, the relationship of CE $\mathcal{X}$-injective complexes and CE $\mathcal{X}$-flat complexes is discussed,

文章引用: 王亚丽. Cartan-Eilenberg $\mathcal{X}$-内射和 $\mathcal{X}$-平坦复形[J]. 理论数学, 2022, 12(3): 354-367.
DOI: 10.12677/pm.2022.123039

and equivalent characterizations of CE $\mathcal{X}$-injective complexes and CE $\mathcal{X}$-flat complexes are given, respectively.

Keywords

CE $\mathcal{X}$-**Injective Complex,** CE $\mathcal{X}$-**Flat Complex,** $\mathcal{X}$-**Injective Module,** $\mathcal{X}$-**Flat Module**

1. 引言

1956 年, Cartan 和 Eilenberg 在文献 [1] 中给出了复形的一种投射分解和一种内射分解. 随后, 在文献 [2] 中 Verdier 将复形的这两种分解分别称为复形的 Cartan-Eilenberg 投射分解和 Cartan-Eilenberg 内射分解(简称为 CE-投射和 CE-内射), 考虑了 CE-投射分解和 CE-内射分解的存在性, 并引入和研究了 CE-内射复形、CE-投射复形、CE-内射复形. 2011 年, Enochs 在文献 [3] 中证明了每一个复形都有 CE-内射包络和 CE-投射预覆盖, 一个复形是 CE-平坦的当且仅当它是有限生成 CE-投射复形的正向极限, 并且还研究了 CE-Gorenstein 投射复形和 CE-Gorenstein 内射复形的相关性质. 2014 年, Yang 和 Liang 在文献 [4], [5] 和 [6] 中进一步研究了 CE-Gorenstein 投射复形和 CE-Gorenstein 平坦复形的性质及 CE-Gorenstein 范畴的稳定性.

1970 年, Stenström 在文献 [7] 中引入了FP-内射模的概念. 在凝聚环上, FP-内射模有许多类似于内射模的性质. 2015 年, Gao 和 Wang 在文献 [8] 中将 FP-内射模的概念进行了推广, 引入并研究了弱内射模和弱平坦模, 并且证明了弱内射的不是 FP-内射的, 弱平坦不是平坦的. 2013 年, 作为内射模、FP-内射模、P-内射模、(m, n)-内射模等模类的统一推广, Zhu 在文献 [9] 中引入 $\mathcal{X}$-内射模的概念, 其中 $\mathcal{X}$ 是一个左 R-模类. 对偶地, Zhu 在文献 [9] 中也引入并研究了 $\mathcal{X}$-平坦模. 2016 年, Lu 和 Liu 在文献 [10] 中引入并研究了 CE FP-内射复形和 CE FP-平坦复形. 2018 年, Ma 在文献 [11] 中分别引入并研究了 CE-弱内射和 CE-弱平坦复形.

受上述工作的启发, 本文引入 CE $\mathcal{X}$-内射复形和 CE $\mathcal{X}$-平坦复形的概念, 在 $\mathcal{X}$ 满足一定条件的情况下, 研究 CE $\mathcal{X}$-内射复形和 CE $\mathcal{X}$-平坦复形的一些性质, 给出这两类复形的一些等价刻画.

2. 预备知识

本文中, R 是具有单位元的环, $\mathcal{X}$ 是一个任意取定的左 R-模类. 所有左(右) R-模构成的模范畴记为 Mod R (Mod R^{op}). 用 $\mathscr{C}(R)$ 表示左 R-模的复形范畴.

称 R-模的序列

$$\cdots \longrightarrow C_2 \xrightarrow{\delta_2^C} C_1 \xrightarrow{\delta_1^C} C_0 \xrightarrow{\delta_0^C} C_{-1} \xrightarrow{\delta_{-1}^C} C_{-2} \longrightarrow \cdots$$

是复形, 如果对任意的 $n \in \mathbb{Z}$, $\delta_{n-1}^C \delta_n^C = 0$, 记作 (C, δ) 或 C, 其中 δ_n^C 称为 C 的第 n 个微分. 用 $\mathrm{Ker}\delta_n^C$ 表示复形 C 的第 n 个循环, 记作 $\mathrm{Z}_n(C)$. 用 $\mathrm{Im}\delta_{n+1}^C$ 表示复形 C 的第 n 个边缘, 记作 $\mathrm{B}_n(C)$. 称 $\mathrm{H}_n(C) = \mathrm{Z}_n(C)/\mathrm{B}_n(C)$ 为复形 C 的第 n 个同调模. 我们用上标区分复形. 因此如果 $\{C^i\}_{i\in I}$ 是一簇复形, 那么 C^i 就是

$$C^i : \cdots \longrightarrow C_2^i \xrightarrow{\delta_2^{C^i}} C_1^i \xrightarrow{\delta_1^{C^i}} C_0^i \xrightarrow{\delta_0^{C^i}} C_{-1}^i \xrightarrow{\delta_{-1}^{C^i}} C_{-2}^i \longrightarrow \cdots .$$

假设 C 是一个复形. 用 ΣC 表示这样的复形: 其第 i 个层次的模为 $(\Sigma C)_i = C_{i-1}$, 边缘函子为 $\delta_i^{\Sigma C} = -\delta_{i-1}^C$. 归纳地, 我们可以定义复形 $\Sigma^n C = \Sigma(\Sigma^{n-1}C)$, 即其第 i 个层次的模为 $(\Sigma^n C)_i = C_{i-n}$, 边缘函子为 $\delta_i^{\Sigma^n C} = (-1)^n \delta_{i-1}^C$. 给一个左 R-模 M, 用 $\overline{M}$ 表示复形

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow M \xrightarrow{id_M} M \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots ,$$

即第 1 个层次和第 0 个层次是 M, 其他层次都为 0 的复形. 用 $\underline{M}$ 表示复形

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots ,$$

其中 M 位于第 0 个层次.

设 C 和 D 是复形. 用 $\mathrm{Hom}_R(C, D)$ 表示 Abel 群的复形, 其中 $\mathrm{Hom}_R(C, D)_n = \prod\limits_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_R(C_i, D_{i+n})$, 且对 $f \in \mathrm{Hom}_R(C, D)_n$, $(\delta_n(f))_i = \delta_{i+n}^D f_i - (-1)^n f_{i-1}\delta_i^C$. 若对 $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\delta_n(f) = 0$, 则称 f 为度为 n 的链映射. 特别地, 度为 0 的链映射称为复形态射, 即称 $f = (f_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 为 C 到 D 的复形态射, 如果对任意的 $i \in \mathbb{Z}$, 下图可交换

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{i+1} \arrow[r, "\delta_{i+1}^C"] \arrow[d, "f_{i+1}"] & C_i \arrow[r, "\delta_i^C"] \arrow[d, "f_i"] & C_{i-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{i-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & D_{i+1} \arrow[r, "\delta_{i+1}^D"] & D_i \arrow[r, "\delta_i^D"] & D_{i-1} \arrow[r] & \cdots .
\end{tikzcd}$$

我们用 $\mathrm{Hom}(C, D)$ 表示从 C 到 D 的复形态射构成的 Abel 群, 用 $\mathrm{Ext}^i(-,-)$ 表示函子 $\mathrm{Hom}(-,-)$ 诱导的右导出函子.

令 $\underline{\mathrm{Hom}}(C, D) = \mathrm{Z}(\mathrm{Hom}_R(C, D))$. 则 $\underline{\mathrm{Hom}}(C, D)$ 是一个复形, 其中 $\underline{\mathrm{Hom}}(C, D)_n$ 是 C 到 $\Sigma^{-n}D$ 的复形态射构成的 Abel 群, 第 n 个层次上的微分为 $(\delta_n(f))_m = (-1)^n \delta_{m+n}^D f_m$, 其中 $f \in \underline{\mathrm{Hom}}(C, D)_n$, $m \in \mathbb{Z}$. 用 $\underline{\mathrm{Ext}}^i(-,-)$ 表示 $\underline{\mathrm{Hom}}(-,-)$ 的右导出函子. 不难验证 $\underline{\mathrm{Ext}}^i(C, D)$ 是这样的复形

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Ext}^i(C, \Sigma^{-(n+1)}D) \longrightarrow \mathrm{Ext}^i(C, \Sigma^{-n}D) \longrightarrow \mathrm{Ext}^i(C, \Sigma^{-(n-1)}D) \longrightarrow \cdots .$$

对任意的复形 C, 其特征复形 $\underline{\mathrm{Hom}}(C,\overline{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}})$, 记为 C^+.

设 C 是右 R-模的复形, D 是左 R-模的复形. C 和 D 的张量积 $C\bigotimes_R D$ 是 $\mathbb{Z}$-模的复形, 其中 $(C\bigotimes_R D)_n=\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}(C_i\bigotimes_R D_{n-i})$, 对于 $c\in C_i$ 以及 $d\in D_{n-i}$, $\delta^{C\bigotimes_R D}(c\bigotimes d)=\delta^C(c)\bigotimes d+(-1)^i c\bigotimes\delta^D(d)$. 定义 $C\overline{\bigotimes}D=C\bigotimes_R D/\mathrm{B}(C\bigotimes_R D)$. 则 $C\overline{\bigotimes}D$ 为 Abel 群的复形, 其边缘算子为

$$\frac{(C\bigotimes_R D)_m}{\mathrm{B}_m(C\bigotimes_R D)}\to\frac{(C\bigotimes_R D)_{m-1}}{\mathrm{B}_{m-1}(C\bigotimes_R D)},\ \ x\bigotimes y\mapsto\delta^C(x)\bigotimes y,$$

其中 $x\bigotimes y$表示 $(C\bigotimes_R D)_m/\mathrm{B}_m(C\bigotimes_R D)$ 中的陪集. 容易证明 $-\overline{\bigotimes}-$ 是右正合函子, 其左导出函子记为 $\overline{\mathrm{Tor}}_i(-,-)$.

定义 1.1 [3] (1) 称复形 P 是 CE-投射的, 如果 $P,\mathrm{Z}(P),\mathrm{B}(P)$ 和 $\mathrm{H}(P)$ 都是投射模的复形;

(2) 称复形 I 是 CE-内射的, 如果 $I,\mathrm{Z}(I),\mathrm{B}(I)$ 和 $\mathrm{H}(I)$ 都是内射模的复形;

(3) 称复形 F 是 CE-平坦的, 如果 $F,\mathrm{Z}(F),\mathrm{B}(F)$ 和 $\mathrm{H}(F)$ 都是平坦模的复形.

定义 1.2 [10] 称复形的序列 $\cdots\to C^1\to C^0\to C^{-1}\to\cdots$ 是 CE-正合的, 如果下列序列是正合的:

(1) $\cdots\to C^1\to C^0\to C^{-1}\to\cdots$;

(2) $\cdots\to\mathrm{Z}(C^1)\to\mathrm{Z}(C^0)\to\mathrm{Z}(C^{-1})\to\cdots$;

(3) $\cdots\to\mathrm{B}(C^1)\to\mathrm{B}(C^0)\to\mathrm{B}(C^{-1})\to\cdots$;

(4) $\cdots\to C^1/\mathrm{Z}(C^1)\to C^0/\mathrm{Z}(C^0)\to C^{-1}/\mathrm{Z}(C^{-1})\to\cdots$;

(5) $\cdots\to C^1/\mathrm{B}(C^1)\to C^0/\mathrm{B}(C^0)\to C^{-1}/\mathrm{B}(C^{-1})\to\cdots$;

(6) $\cdots\to\mathrm{H}(C^1)\to\mathrm{H}(C^0)\to\mathrm{H}(C^{-1})\to\cdots$.

由 [3] 可知, 在上述序列中, 若 (1) 与 (2)或 (1) 与 (3) , (1) 与(4) , (1) 与 (5) 正合, 则 (1)-(6) 都正合.

定义 1.3 [10] (1) 称复形 C 是 CE-有限生成的, 如果 C 是有界的且对任意的 $m\in\mathbb{Z}$, $C_m,\mathrm{Z}_m(C)$, $\mathrm{B}_m(C)$ 和 $\mathrm{H}_m(C)$ 都是有限生成的;

(2) 称复形 C 是 CE-有限表示的, 如果 C 是有界的且对任意的 $m\in\mathbb{Z}$, $C_m,\mathrm{Z}_m(C),\mathrm{B}_m(C)$ 和 $\mathrm{H}_m(C)$ 都是有限表示的.

定义 1.4 [10] 称复形 C 是 CE FP-内射的, 如果对任意的 CE-有限表示复形 P, $\overline{\mathrm{Ext}}^1(P,C)=0$.

由文献 [10, 引理4.7] 可知复形 C 是 CE-平坦的当且仅当对任意的 CE-有限表示复形 P, $\overline{\mathrm{Tor}}_1(P,C)=0$.

定义 1.5 [11] 称复形 C 是 CE-超有限表示的, 如果 C 是有界的且对任意的 $m\in\mathbb{Z}$, $C_m,\mathrm{Z}_m(C)$, $\mathrm{B}_m(C)$ 和$\mathrm{H}_m(C)$ 都是超有限表示的.

定义 1.6 [11] (1) 称复形 C 是 CE-弱内射的, 如果对任意的 CE-超有限表示复形 F, $\overline{\mathrm{Ext}}^1(F,C)=0$;

(2) 称右 R-模复形 D 是 CE-弱平坦的, 如果对任意的 CE-超有限表示复形 F, $\overline{\mathrm{Tor}}_1(D,F)=0$.

定义 1.7 [9] 设 $\mathcal{X}$ 是一些有限生成左 R-模的类,

(1) 称左 R-模 M 是 $\mathcal{X}$-内射的, 如果对任意的 $X\in\mathcal{X}$, $\mathrm{Ext}_R^1(X,M)=0$. 用 $\mathcal{X}\mathcal{I}$ 来表示 $\mathcal{X}$-内射模的类;

(2) 称右 R-模 M 是 $\mathcal{X}$-平坦的, 如果对任意的 $X\in\mathcal{X}$, $\mathrm{Tor}_1^R(M,X)=0$.

引理 1.8 [3] 函子 $\mathrm{Hom}(-,-)$ 在 $\mathbf{C}(R)\times\mathbf{C}(R)$ 上关于 $\mathrm{CE}(\mathcal{P})\times\mathrm{CE}(\mathcal{I})$ 右平衡.

可知,利用 CE-投射或 CE-内射分解来计算 $\mathrm{Hom}(-,-)$ 的右导出函子 $\overline{\mathrm{Ext}}^n(-,-)$. 对任意的复形 C 和 D, $\overline{\mathrm{Ext}}^n(C,D)\subseteq\mathrm{Ext}^n(C,D)$. 易得, 对任意的 CE-正合序列 $0\longrightarrow X\longrightarrow Y\longrightarrow Z\longrightarrow 0$ 存在长正合序列

$$0\longrightarrow\mathrm{Hom}(C,X)\longrightarrow\mathrm{Hom}(C,Y)\longrightarrow\mathrm{Hom}(C,Z)\longrightarrow\overline{\mathrm{Ext}}^1(C,X)\longrightarrow\cdots,$$

和

$$0\longrightarrow\mathrm{Hom}(Z,D)\longrightarrow\mathrm{Hom}(Y,D)\longrightarrow\mathrm{Hom}(X,D)\longrightarrow\overline{\mathrm{Ext}}^1(Z,D)\longrightarrow\cdots.$$

引理 1.9 [10] (1) 函子$\underline{\mathrm{Hom}}(-,-)$ 在 $\mathbf{C}(R)\times\mathbf{C}(R)$ 上关于 $\mathrm{CE}(\mathcal{P})\times\mathrm{CE}(\mathcal{I})$ 右平衡;

(2) 函子 $-\overline{\bigotimes}-$ 在 $\mathbf{C}(R)\times\mathbf{C}(R)$ 上关于 $\mathrm{CE}(\mathcal{F})\times\mathrm{CE}(\mathcal{F})$ 左平衡.

该结论表明, 我们可以利用 CE-投射或 CE-内射分解来计算 $\underline{\mathrm{Hom}}(-,-)$ 的右导出函子 $\underline{\overline{\mathrm{Ext}}}^n(-,-)$, 可以利用 CE-平坦分解来计算$-\overline{\bigotimes}-$ 的左导出函子 $\underline{\overline{\mathrm{Tor}}}_n(-,-)$. 易见, 对任意的复形 C 和 D, $\underline{\overline{\mathrm{Ext}}}^n(C,D)\subseteq\underline{\mathrm{Ext}}^n(C,D)$; 对任意的右 R-模的复形 C 和左 R-模的复形 D, $\underline{\overline{\mathrm{Tor}}}_n(C,D)\subseteq\overline{\mathrm{Tor}}_n(C,D)$.

3. CE $\mathcal{X}$-内射复形和 CE $\mathcal{X}$-平坦复形

定义 2.1　设 $\mathcal{X}$ 是一个左 R-模的类. 令

CE-$C^b(\mathcal{X})=\{\,C\in\mathscr{C}(R)\mid C$ 是有界复形, 且对任意的 $m\in\mathbb{Z}$, C_m, $\mathrm{Z}_m(C)$, $\mathrm{B}_m(C)$ 和 $\mathrm{H}_m(C)$ 都属于 $\mathcal{X}\,\}$.

下文中, 我们总是假定 $\mathcal{X}$ 是一个左 R-模类, 且满足下列条件:

(1) $\mathcal{X}$ 关于合冲封闭;

(2) $\mathcal{X}$ 关于扩张封闭;

(3) $\mathcal{X}$ 包含于有限表示左 R-模类.

注记 2.2 (1) 设 R 是左凝聚环, $\mathcal{X}$ 是所有有限表示左 R-模的类, 则 $\mathcal{X}$ 关于合冲封闭, CE-$C^b(\mathcal{X})$ 是CE-有限表示复形的类;

(2) 若 $\mathcal{X}$ 是所有超有限表示左 R-模的类, 则 $\mathcal{X}$ 关于合冲封闭, CE-$C^b(\mathcal{X})$ 是 CE-超有限表示复形的类;

(3) 根据 [9, 定理2.10] 知, $({}^{\perp}\mathcal{X}\mathcal{I}, \mathcal{X}\mathcal{I})$ 是完备余挠对. 已知 $\mathcal{X}$ 关于合冲封闭, 故由 [12, 推论5.25] 知, $({}^{\perp}\mathcal{X}\mathcal{I}, \mathcal{X}\mathcal{I})$ 是遗传余挠对.

命题 2.3 设 C 是复形. 如果 $C \in$ CE-$C^b(\mathcal{X})$, 那么存在 CE-正合序列

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow P \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

其中 P 是 CE-有限生成且 CE-投射的, $K \in$ CE-$C^b(\mathcal{X})$.

证明 设 $i \in \mathbb{Z}$. 由于 $C \in$ CE-$C^b(\mathcal{X})$, 则 $\mathrm{B}_i(C) \in \mathcal{X}$, $\mathrm{H}_i(C) \in \mathcal{X}$, 故存在正合列

$$0 \longrightarrow K_{\mathrm{B}_i(C)} \longrightarrow P_{\mathrm{B}_i(C)} \longrightarrow \mathrm{B}_i(C) \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow K_{\mathrm{H}_i(C)} \longrightarrow P_{\mathrm{H}_i(C)} \longrightarrow \mathrm{H}_i(C) \longrightarrow 0,$$

其中$P_{\mathrm{B}_i(C)}$ 和 $P_{\mathrm{H}_i(C)}$ 是有限生成投射模, $K_{\mathrm{B}_i(C)}$ 和 $K_{\mathrm{H}_i(C)}$ 都属于 $\mathcal{X}$. 考虑下列正合序列

$$0 \longrightarrow \mathrm{B}_i(C) \longrightarrow \mathrm{Z}_i(C) \longrightarrow \mathrm{H}_i(C) \longrightarrow 0.$$

则根据马蹄引理可得以下行列正合的交换图:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K_{\mathrm{B}_i(C)} \arrow[r] \arrow[d] & K_{\mathrm{Z}_i(C)} \arrow[r] \arrow[d] & K_{\mathrm{H}_i(C)} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_{\mathrm{B}_i(C)} \arrow[r] \arrow[d] & P_{\mathrm{B}_i(C)} \bigoplus P_{\mathrm{H}_i(C)} \arrow[r] \arrow[d] & P_{\mathrm{H}_i(C)} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{B}_i(C) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Z}_i(C) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}_i(C) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0. &
\end{tikzcd}$$

因为 $\mathcal{X}$ 关于扩张封闭, 所以 $K_{\mathrm{Z}_i(C)} \in \mathcal{X}$. 再根据马蹄引理可得以下行列正合的交换图:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K_{\mathrm{Z}_i(C)} \arrow[r] \arrow[d] & K_i \arrow[r] \arrow[d] & K_{\mathrm{B}_{i-1}(C)} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_{\mathrm{B}_i(C)} \bigoplus P_{\mathrm{H}_i(C)} \arrow[r] \arrow[d] & P_{\mathrm{B}_i(C)} \bigoplus P_{\mathrm{H}_i(C)} \bigoplus P_{\mathrm{B}_{i-1}(C)} \arrow[r] \arrow[d] & P_{\mathrm{B}_{i-1}(C)} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Z}_i(C) \arrow[r] \arrow[d] & C_i \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{B}_{i-1}(C) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0. &
\end{tikzcd}$$

则有 $K_i \in \mathcal{X}$. 从而根据 i 的任意性可得以下列正合的交换图:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & K_{\mathrm{B}_i(C)} \arrow[r] \arrow[d] & K_{\mathrm{Z}_i(C)} \arrow[r] \arrow[d] & K_i \arrow[r] \arrow[d] & K_{\mathrm{B}_{i-1}(C)} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & P_{\mathrm{B}_i(C)} \arrow[r] \arrow[d] & P_{\mathrm{B}_i(C)} \bigoplus P_{\mathrm{H}_i(C)} \arrow[r] \arrow[d] & P_{\mathrm{B}_i(C)} \bigoplus P_{\mathrm{H}_i(C)} \bigoplus P_{\mathrm{B}_{i-1}(C)} \arrow[r] \arrow[d] & P_{\mathrm{B}_{i-1}(C)} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathrm{B}_i(C) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Z}_i(C) \arrow[r] \arrow[d] & C_i \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{B}_{i-1}(C) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & 0 & 0 & 0 & 0. &
\end{tikzcd}$$

因此可得下列 CE-正合序列

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow P \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

其中 $P_i = P_{\mathrm{B}_i(C)} \bigoplus P_{\mathrm{H}_i(C)} \bigoplus P_{\mathrm{B}_{i-1}(C)}$. 由于复形 C 是有界的, 故 P 和 K 是有界的, 并且可知 P 是 CE-有限生成且 CE-投射的. 因为对任意的 $i \in \mathbb{Z}$, 有 $\mathrm{Z}_i(K) = K_{\mathrm{Z}_i(C)}$, $\mathrm{B}_i(K) = K_{\mathrm{B}_i(C)}$ 和 $\mathrm{H}_i(K) = K_{\mathrm{H}_i(C)}$, 且 K_i, $K_{\mathrm{Z}_i(C)}$, $K_{\mathrm{B}_i(C)}$ 和 $K_{\mathrm{H}_i(C)}$ 都属于 $\mathcal{X}$, 所以 $K \in$ CE-$C^b(\mathcal{X})$. □

命题 2.4 设 $\{C^i\}_{i\in I}$ 是一簇复形, $X \in$ CE-$C^b(\mathcal{X})$. 则有

$$\overline{\mathrm{Ext}}^1(X, \bigoplus_{i\in I} C^i) \cong \bigoplus_{i\in I} \overline{\mathrm{Ext}}^1(X, C^i).$$

证明 设复形 $X \in$ CE-$C^b(\mathcal{X})$. 则根据命题 2.3 可知存在 CE-正合序列

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow P \longrightarrow X \longrightarrow 0,$$

其中 P 是 CE-有限生成且 CE-投射的, $K \in$ CE-$C^b(\mathcal{X})$. 故有下列行正合的交换图:

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{Hom}}(P, \bigoplus_{i\in I} C^i) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & \underline{\mathrm{Hom}}(K, \bigoplus_{i\in I} C^i) \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & \overline{\mathrm{Ext}}^1(X, \bigoplus_{i\in I} C^i) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\bigoplus_{i\in I} \underline{\mathrm{Hom}}(P, C^i) \arrow[r] & \bigoplus_{i\in I} \underline{\mathrm{Hom}}(K, C^i) \arrow[r] & \bigoplus_{i\in I} \overline{\mathrm{Ext}}^1(X, C^i) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

因为 $\mathcal{X}$ 包含于有限表示模类, 所以 $K \in$ CE-$C^b(\mathcal{X})$ 是 CE-有限生成的. 故根据 [10, 引理5.3] 可得 α 和 β 都是同构的. 因此由五引理可得$\overline{\mathrm{Ext}}^1(X, \bigoplus_{i\in I} C^i) \cong \bigoplus_{i\in I} \overline{\mathrm{Ext}}^1(X, C^i)$. □

定义 2.5 (1)称复形C是CE $\mathcal{X}$-内射的, 如果对于任意的复形$X \in$ CE-$C^b(\mathcal{X})$, 有$\overline{\mathrm{Ext}}^1(X, C) = 0$;

(2)称右R模的复形F是CE $\mathcal{X}$-平坦的, 如果对于任意的复形$X \in$ CE-$C^b(\mathcal{X})$, 有$\overline{\mathrm{Tor}}_1(F, X) = 0$.

注记 2.6 (1) CE $\mathcal{X}$-内射复形的类记作 CE($\mathcal{X}$-Inj);

(2) 如果 $\mathcal{X}$ 是所有有限表示左 R- 模的类, 那么 CE($\mathcal{X}$-Inj) 表示 CE FP-内射复形的类;

(3) 如果 $\mathcal{X}$ 是所有超有限表示左 R-模的类, 那么 CE($\mathcal{X}$-Inj) 表示 CE-弱内射复形的类;

注记 2.7 (1) CE $\mathcal{X}$-平坦复形的类记作 CE($\mathcal{X}$-Flat);

(2) 如果 $\mathcal{X}$ 是所有有限表示左 R-模的类, 那么 CE($\mathcal{X}$-Flat) 表示 CE FP-平坦复形的类;

(3) 如果 $\mathcal{X}$ 是所有超有限表示左 R-模的类, 那么 CE($\mathcal{X}$-Flat) 表示 CE-弱平坦复形的类;

命题 2.8 复形 C 是 CE $\mathcal{X}$-内射的当且仅当对任意的复形 $X \in$ CE-$C^b(\mathcal{X})$, 有 $\underline{\overline{\mathrm{Ext}}}^1(X, C) = 0$.

证明 设复形 $X \in$ CE-$C^b(\mathcal{X})$. 由定义可知复形 $\underline{\overline{\mathrm{Ext}}}^1(X, C)$ 为

$$\cdots \longrightarrow \overline{\mathrm{Ext}}^1(X, \Sigma^{-(n+1)}C) \longrightarrow \overline{\mathrm{Ext}}^1(X, \Sigma^{-n}C) \longrightarrow \overline{\mathrm{Ext}}^1(X, \Sigma^{-(n-1)}C) \longrightarrow \cdots.$$

故复形 C 是 CE $\mathcal{X}$-内射的当且仅当对任意的复形 $X \in$ CE-$C^b(\mathcal{X})$, 有 $\underline{\overline{\mathrm{Ext}}}^1(X, C) = 0$. □

命题 2.9 (1) CE($\mathcal{X}$-Inj) 关于直积, 直和, 直和项和 CE-扩张封闭;

(2) CE($\mathcal{X}$-Flat) 关于直和, 直和项和 CE-扩张封闭.

证明 (1) 根据 CE $\mathcal{X}$-内射复形的定义可知, CE($\mathcal{X}$-Inj) 关于直积, 直和项和 CE-扩张封闭是显然的. 下证 CE($\mathcal{X}$-Inj) 关于直和封闭.

设 $\{C^i\}_{i\in I}$ 是一簇 CE $\mathcal{X}$-内射复形, $X \in$ CE-$C^b(\mathcal{X})$. 则根据命题 2.3 知, 存在 CE-正合序列

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow P \longrightarrow X \longrightarrow 0,$$

其中 P 是 CE-有限生成且 CE-投射的,$K \in$ CE-$C^b(\mathcal{X})$. 再根据 [10, 引理5.3] 和命题 2.4 可得如下行

正合的交换图:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \underline{\mathrm{Hom}}(X, \bigoplus_{i\in I} C^i) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \underline{\mathrm{Hom}}(P, \bigoplus_{i\in I} C^i) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \underline{\mathrm{Hom}}(K, \bigoplus_{i\in I} C^i) \arrow[d, "\cong"'] & \\ 0 \arrow[r] & \bigoplus_{i\in I}\underline{\mathrm{Hom}}(X, C^i) \arrow[r] & \bigoplus_{i\in I}\underline{\mathrm{Hom}}(P, C^i) \arrow[r] & \bigoplus_{i\in I}\underline{\mathrm{Hom}}(K, C^i) \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

由于 P 是 CE-投射的, 故 $\underline{\mathrm{Ext}}^1(P, \bigoplus_{i\in I} C^i) = 0$, 则有 $\underline{\mathrm{Ext}}^1(X, \bigoplus_{i\in I} C^i) = 0$. 因此由命题 2.8 可得 $\bigoplus_{i\in I} C^i$ 是CE $\mathcal{X}$-内射复形.

(2) 根据CE$\mathcal{X}$-平坦复形的定义可知, CE($\mathcal{X}$-Flat)关于直和, 直和项和CE-扩张封闭是成立的. □

命题 2.10　设 M 是左 R-模. 则有

(1) M 是 $\mathcal{X}$-内射模当且仅当 $\underline{M}$ 是 CE $\mathcal{X}$-内射复形;

(2) M 是 $\mathcal{X}$-内射模当且仅当 $\overline{M}$ 是 CE $\mathcal{X}$-内射复形.

证明　(1) $\Rightarrow$) 设 M 是 $\mathcal{X}$-内射模, $X \in$ CE-$C^b(\mathcal{X})$. 则 X_0, $\mathrm{H}_0(X)$, $\mathrm{B}_{-1}(X)$ 都是属于 $\mathcal{X}$ 的. 由正合序列 $0 \to \mathrm{H}_0(X) \to X_0/\mathrm{B}_0(X) \to \mathrm{B}_{-1}(X) \to 0$ 以及 $\mathcal{X}$ 关于扩张封闭, 可得 $X_0/\mathrm{B}_0(X) \in \mathcal{X}$. 故 $\mathrm{Ext}^1(X_0/\mathrm{B}_0(X), M) = 0$. 由 [3, 引理9.3] 知 $\overline{\mathrm{Ext}}^1(X, \underline{M}) \cong \mathrm{Ext}^1(X_0/\mathrm{B}_0(X), M)$, 故 $\overline{\mathrm{Ext}}^1(X, \underline{M}) = 0$. 因此 $\underline{M}$ 是 CE $\mathcal{X}$-内射的.

$\Leftarrow$) 设 $X \in \mathcal{X}$. 则 $\underline{X} \in$ CE-$C^b(\mathcal{X})$, 故 $\overline{\mathrm{Ext}}^1(\underline{X}, \underline{M}) = 0$. 根据 [3, 引理9.1] 可得 $\mathrm{Ext}^1(X, M) \cong \overline{\mathrm{Ext}}^1(\underline{X}, \underline{M})$, 故 $\mathrm{Ext}^1(X, M) = 0$. 因此 M 是 $\mathcal{X}$-内射的.

(2) $\Rightarrow$) 设 M 是 $\mathcal{X}$-内射模, $X \in$ CE-$C^b(\mathcal{X})$. 则 $X_0 \in \mathcal{X}$, 故 $\mathrm{Ext}^1(X_0, M) = 0$. 由 [3, 引理9.3] 知 $\overline{\mathrm{Ext}}^1(X, \overline{M}) \cong \mathrm{Ext}^1(X_0, M)$, 故 $\overline{\mathrm{Ext}}^1(X, \overline{M}) = 0$. 因此 $\overline{M}$ 是 CE $\mathcal{X}$-内射的.

$\Leftarrow$) 设左 R-模 $X \in \mathcal{X}$. 可知 $\overline{X} \in$ CE-$C^b(\mathcal{X})$, 故 $\overline{\mathrm{Ext}}^1(\overline{X}, \overline{M}) = 0$. 根据 [3, 引理9.2] 可知 $\mathrm{Ext}^1(X, M)$
$\cong \overline{\mathrm{Ext}}^1(\overline{X}, \overline{M})$, 因此 $\mathrm{Ext}^1(X, M) = 0$, 即 M 是 $\mathcal{X}$-内射的. □

命题 2.11　设 C 是复形. 则以下等价:

(1) C 是 CE $\mathcal{X}$-内射复形;

(2) 对任意的 CE-正合序列

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0,$$

其中 $Z \in$ CE-$C^b(\mathcal{X})$, 序列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(Z, C) \longrightarrow \mathrm{Hom}(Y, C) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X, C) \longrightarrow 0$$

正合;

(3) 每个 CE-正合序列

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow I \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

都是可裂的, 其中 $L \in$ CE-$C^b(\mathcal{X})$.

证明 (1) ⇒ (3) 设序列 $0 \longrightarrow C \longrightarrow I \longrightarrow L \longrightarrow 0$ 是CE-正合的, 其中 $L \in$ CE-$C^b(\mathcal{X})$. 由 (1) 可得 $\overline{\mathrm{Ext}}^1(L, C) = 0$. 故序列 $0 \longrightarrow C \longrightarrow I \longrightarrow L \longrightarrow 0$ 可裂.

(2) ⇒ (1) 设复形 $X \in$ CE-$C^b(\mathcal{X})$. 根据命题 2.3 可知存在 CE-正合序列

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow P \longrightarrow X \longrightarrow 0,$$

其中 P 是 CE-有限生成且 CE-投射的, $K \in$ CE-$C^b(\mathcal{X})$. 故有正合序列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(X, C) \longrightarrow \mathrm{Hom}(P, C) \longrightarrow \mathrm{Hom}(K, C) \longrightarrow \overline{\mathrm{Ext}}^1(X, C) \longrightarrow 0.$$

则根据条件 (2) 可得 $\overline{\mathrm{Ext}}^1(X, C) = 0$. 因此 C 是 CE $\mathcal{X}$-内射复形.

(3) ⇒ (2) 设序列 $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow X \longrightarrow 0$ 是 CE-正合的, 其中 $X \in$ CE-$C^b(\mathcal{X})$. 对任意的态射 $\alpha : A \to C$, 可得如下推出图:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r] \arrow[d, "g"] & X \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & C \arrow[r, "\beta"] & H \arrow[r] & X \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

由条件 (3) 可知序列

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{\beta} H \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

是可裂的, 故存在 $\gamma : H \to C$, 使得 $\gamma\beta = 1$. 令 $\theta = \gamma g$. 则 $\theta : B \to C$ 且 $\theta f = \alpha$. 所以 (2) 成立. □

定理 2.12 设 C 是复形. 则下列条件等价:

(1) C 是 CE $\mathcal{X}$-内射复形;

(2) 对任意的 $i \in \mathbb{Z}$, C_i, $\mathrm{Z}_i(C)$ 是 $\mathcal{X}$-内射模;

(3) 对任意的 $i \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{B}_i(C)$, $\mathrm{H}_i(C)$ 是 $\mathcal{X}$-内射模;

(4) 对任意的 $i \in \mathbb{Z}$, C_i, $\mathrm{B}_i(C)$, $\mathrm{Z}_i(C)$ 和 $\mathrm{H}_i(C)$ 是 $\mathcal{X}$-内射模.

证明 (1) ⇒ (2) 设 C 是 CE $\mathcal{X}$-内射复形, $X \in \mathcal{X}$, $i \in \mathbb{Z}$. 则 $\Sigma^{i-1}\overline{X}$, $\Sigma^i \underline{X} \in$ CE-$C^b(\mathcal{X})$. 故 $\overline{\mathrm{Ext}}^1(\Sigma^{i-1}\overline{X}, C) = 0$, $\overline{\mathrm{Ext}}^1(\Sigma^i \underline{X}, C) = 0$. 由 [3, 引理9.1和9.2] 知 $\overline{\mathrm{Ext}}^1(\Sigma^i \underline{X}, C) \cong \mathrm{Ext}^1(X, \mathrm{Z}_i(C))$, $\overline{\mathrm{Ext}}^1(\Sigma^{i-1}\overline{X}, C) \cong \mathrm{Ext}^1(X, C_i)$, 从而有 $\mathrm{Ext}^1(X, C_i) = 0$, $\mathrm{Ext}^1(X, \mathrm{Z}_i(C)) = 0$. 因此 C_i, $\mathrm{Z}_i(C)$ 是 $\mathcal{X}$-内射模.

(2) $\Rightarrow$ (3) 设 $i \in \mathbb{Z}$. 因为 $C_{i+1}, \mathrm{Z}_{i+1}(C)$ 是 $\mathcal{X}$-内射的, 所以由正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Z}_{i+1}(C) \longrightarrow C_{i+1} \longrightarrow \mathrm{B}_i(C) \longrightarrow 0$$

和注记 2.2(3) 可知 $\mathrm{B}_i(C)$ 是 $\mathcal{X}$-内射的. 又根据正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{B}_i(C) \longrightarrow \mathrm{Z}_i(C) \longrightarrow \mathrm{H}_i(C) \longrightarrow 0$$

和注记 2.2(3) 可知 $\mathrm{H}_i(C)$ 是 $\mathcal{X}$-内射的.

(3) $\Rightarrow$ (4) 设 $i \in \mathbb{Z}$. 由 (3) 可知 $\mathrm{B}_i(C), \mathrm{H}_i(C)$ 是 $\mathcal{X}$-内射的. 则由正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{B}_i(C) \longrightarrow \mathrm{Z}_i(C) \longrightarrow \mathrm{H}_i(C) \longrightarrow 0$$

可得 $\mathrm{Z}_i(C)$ 是 $\mathcal{X}$-内射的. 再由正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Z}_i(C) \longrightarrow C_i \longrightarrow \mathrm{B}_{i-1}(C) \longrightarrow 0$$

可得 C_i 是 $\mathcal{X}$-内射的.

(4) $\Rightarrow$ (1) 设 $X \in \mathrm{CE}\text{-}C^b(\mathcal{X})$. 需证 $\overline{\mathrm{Ext}}^1(X, C) = 0$. 设序列 $0 \longrightarrow C \longrightarrow L \longrightarrow X \longrightarrow 0$ 是 CE-正合的, $i \in \mathbb{Z}$. 则有正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{B}_i(C) \longrightarrow \mathrm{B}_i(L) \longrightarrow \mathrm{B}_i(X) \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}_i(C) \longrightarrow \mathrm{H}_i(L) \longrightarrow \mathrm{H}_i(X) \longrightarrow 0.$$

因为 $X \in \mathrm{CE}\text{-}C^b(\mathcal{X})$, 所以 $\mathrm{B}_i(X) \in \mathcal{X}, \mathrm{H}_i(X) \in \mathcal{X}$. 由 (4) 知 $\mathrm{B}_i(C)$ 和 $\mathrm{H}_i(C)$ 是 $\mathcal{X}$-内射模, 故上面两个正合列都是可裂的. 从而 $\mathrm{B}_i(C) \to \mathrm{B}_i(L)$ 和 $\mathrm{H}_i(C) \to \mathrm{H}_i(L)$ 都有收缩映射, 分别记作 γ_i^{B} 和 γ_i^{H}. 考虑以下行可裂正合, 列正合的交换图:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{B}_i(C) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{B}_i(L) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{B}_i(X) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Z}_i(C) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Z}_i(L) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Z}_i(X) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{H}_i(C) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}_i(L) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}_i(X) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0. &
\end{tikzcd}$$

由于 $\mathrm{H}_i(X)\in\mathcal{X}$, 且 $\mathrm{B}_i(C),\mathrm{Z}_i(C)$ 是 $\mathcal{X}$-内射模, 故 $\mathrm{Ext}_R^1(\mathrm{H}_i(X),\mathrm{B}_i(C))=0,\mathrm{Ext}_R^1(\mathrm{H}_i(X),\mathrm{Z}_i(C))=0$. 故由 [3, 引理9.5] 可知存在 $\mathrm{Z}_i(C)\to\mathrm{Z}_i(L)$ 的收缩映射 $\gamma_i^{\mathrm{Z}}:\mathrm{Z}_i(L)\to\mathrm{Z}_i(C)$, 使得 γ_i^{B} 与 γ_i^{Z} 相容, γ_i^{Z} 与 γ_i^{H} 相容. 同理, 根据行可裂正合, 列正合的交换图:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Z}_i(C) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Z}_i(L) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Z}_i(X) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_i \arrow[r] \arrow[d] & L_i \arrow[r] \arrow[d] & X_i \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{B}_{i-1}(C) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{B}_{i-1}(L) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{B}_{i-1}(X) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0. &
\end{tikzcd}$$

可知 $C_i\to L_i$ 的收缩映射 $\gamma_i^{\mathrm{C}}:L_i\to C_i$, 使得 γ_i^{Z} 与 γ_i^{C} 相容, γ_i^{C} 与 $\gamma_{i-1}^{\mathrm{B}}$ 相容. 于是由交换图:

$$\begin{tikzcd}
L_i \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_i^{\mathrm{C}}"] & \mathrm{B}_{i-1}(L) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_{i-1}^{\mathrm{B}}"] & \mathrm{Z}_{i-1}(L) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_{i-1}^{\mathrm{Z}}"'] & L_{i-1} \arrow[d, "\gamma_i^{\mathrm{C}}"] \\
C_i \arrow[r] & \mathrm{B}_{i-1}(C) \arrow[r] & \mathrm{Z}_{i-1}(C) \arrow[r] & C_{i-1}
\end{tikzcd}$$

得交换图:

$$\begin{tikzcd}
L_i \arrow[r, "\gamma_i^{\mathrm{C}}"] \arrow[d] & C_i \arrow[d] \\
L_{i-1} \arrow[r, "\gamma_{i-1}^{\mathrm{C}}"] & C_{i-1}.
\end{tikzcd}$$

因此 CE-正合序列 $0\longrightarrow C\longrightarrow L\longrightarrow X\longrightarrow 0$ 是可裂的, 从而 $\overline{\mathrm{Ext}}^1(X,C)=0$. 故 C 是 CE $\mathcal{X}$-内射复形. □

定理 2.13　设 C 是复形. 则:

(1) C 是 CE $\mathcal{X}$-平坦复形当且仅当 C^+ 是 CE $\mathcal{X}$-内射复形;

(2) C 是 CE $\mathcal{X}$-内射复形当且仅当 C^+ 是 CE $\mathcal{X}$-平坦复形.

证明　(1) 根据 [10, 引理4.8] 和命题 2.8 可证得.

(2) 设复形 $X\in$ CE-$C^b(\mathcal{X})$. 则根据命题 2.3 可得 CE-正合序列

$$0\longrightarrow K\longrightarrow P\longrightarrow X\longrightarrow 0,$$

DOI: 10.12677/pm.2022.123039

其中 P 是 CE-有限生成且 CE-投射复形, $K \in \text{CE-}C^b(\mathcal{X})$. 于是有以下行正合交换图:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \overline{\mathrm{Tor}}_1(C^+, X) \arrow[r] \arrow[d] & C^+\overline{\bigotimes}K \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"'] & C^+\overline{\bigotimes}P \arrow[d, "\phi"'] \\
0 \arrow[r] & \underline{\mathrm{Ext}}^1(X, C)^+ \arrow[r] & \underline{\mathrm{Hom}}(K, C)^+ \arrow[r] & \underline{\mathrm{Hom}}(P, C)^+.
\end{tikzcd}$$

由 [10, 引理3.7] 知 φ 和 ϕ 是同构, 因此 $\underline{\mathrm{Ext}}^1(X, C)^+ \cong \overline{\mathrm{Tor}}_1(C^+, X)$, 故 (2) 成立. □

定理 2.14　设 C 是复形. 则以下等价:

(1) C 是 CE $\mathcal{X}$-平坦复形;

(2) 对任意的 $i \in \mathbb{Z}$, C_i, $C_i/\mathrm{B}_i(C)$ 是 $\mathcal{X}$-平坦模;

(3) 对任意的 $i \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{B}_i(C)$, $\mathrm{H}_i(C)$ 是 $\mathcal{X}$-平坦模;

(4) 对任意的 $i \in \mathbb{Z}$, C_i, $\mathrm{B}_i(C)$, $\mathrm{Z}_i(C)$ 和 $\mathrm{H}_i(C)$ 是 $\mathcal{X}$-平坦模.

证明　因为对任意的 $i \in \mathbb{Z}$, 有 $\mathrm{Z}_i(C^+) \cong (C_{-i}/\mathrm{B}_{-i}(C))^+$, $\mathrm{B}_i(C^+) \cong (\mathrm{B}_{i-1}(C))^+$, $\mathrm{H}_i(C^+) \cong (\mathrm{H}_{-i}(C))^+$, 所以由定理 2.12 和定理 2.13 可得结论成立. □

推论 2.15　设 N 是右 R-模, 则以下结论成立:

(1) N 是 $\mathcal{X}$-平坦模当且仅当 $\overline{N}$ 是 CE $\mathcal{X}$-平坦复形;

(2) N 是 $\mathcal{X}$-平坦模当且仅当 $\underline{N}$ 是 CE $\mathcal{X}$-平坦复形.

证明　(1) $\Rightarrow$) 设 N 是 $\mathcal{X}$-平坦右 R-模. 则由 [9, 定理2.7] 可得 N^+ 是 $\mathcal{X}$-内射左 R-模, 故由命题 2.10 知 $\overline{N^+}$ 是 CE $\mathcal{X}$-内射复形. 又因为 $\overline{N^+} \cong (\overline{N})^+$, 所以 $(\overline{N})^+$ 是 CE $\mathcal{X}$-内射复形, 由定理 2.13(1) 可知 $\overline{N}$ 是 CE $\mathcal{X}$-平坦复形.

$\Leftarrow$) 设 $\overline{N}$ 是 CE $\mathcal{X}$-平坦复形. 则由定理 2.13(1) 知 $(\overline{N})^+$ 是 CE $\mathcal{X}$-内射复形, 再由 $\overline{N^+} \cong (\overline{N})^+$ 以及命题 2.11 得 N^+ 是 $\mathcal{X}$-内射左 R-模, 因此根据 [9, 定理2.7] 可得 N 是 $\mathcal{X}$-平坦右 R-模.

(2) 与 (1) 证明过程类似.

基金项目

国家自然科学基金资助项目(11861055, 12061061).

参考文献

[1] Cartan, H. and Eilenberg, S. (1957) Review. *Homological Algebra*, **41**, 310-311.
https://doi.org/10.2307/3610160

[2] Verdier, J.L. (1996) Des catégories dérivées des catégories abéliennes. *Astérisque*, **239**, 227-229.

[3] Enochs, E.E. (2011) Cartan-Eilenberg Complexes and Resolution. *Journal of Algebra*, **342**, 16-39. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2011.05.011

[4] Yang, G. and Liang, L. (2014) Cartan-Eilenberg Gorenstein Projective Complexes. *Journal of Algebra and Its Applications*, **13**, Article ID: 1350068. https://doi.org/10.1142/S0219498813500680

[5] Yang, G. and Liang, L. (2014) Cartan-Eilenberg Gorenstein Flat Complexes. *Mathematica Scandinavica*, **114**, 5-25. https://doi.org/10.7146/math.scand.a-16637

[6] Yang, G. and Liang, L. (2014) Stability of Cartan-Eilenberg Gorenstein Categories. *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, **132**, 103-122. https://doi.org/10.4171/RSMUP/132-8

[7] Stenström, B. (1970) Coherent Rings and FP-Injective Modules. *Journal of the London Mathematical Society*, **2**, 323-329. https://doi.org/10.1112/jlms/s2-2.2.323

[8] Gao, Z.H. and Wang, F.G. (2015) Weak Injective and Weak Flat Modules. *Communications in Algebra*, **43**, 3857-3868. https://doi.org/10.1080/00927872.2014.924128

[9] Zhu, Z.M. (2013) C-Coherent Rings, C-Semiherditary Rings and C-Regular Rings. *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, **50**, 491-508. https://doi.org/10.1556/sscmath.50.2013.4.1256

[10] Lu, B. and Liu, Z.K. (2017) Cartan-Eilenberg FP-Injective Complexes. *Journal of the Australian Mathematical Society*, **103**, 387-401. https://doi.org/10.1017/S1446788716000586

[11] 马鹏举. Cartan-Eilenberg弱内射和弱平坦复形[D]: [硕士学位论文]. 兰州: 西北师范大学, 2018.

[12] Gobel, R. and Trlifaj, J. (2006) Approximations and Endomorphism Algebras of Modules. Walter de Gruyter, Berlin, New York.