Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(3), 392-399
Published Online March 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.123043

求解分裂可行性问题的松弛投影算法

候彩华，党亚峥

上海理工大学管理学院，上海

收稿日期：2022年2月11日；录用日期：2022年3月14日；发布日期：2022年3月21日

摘　要

分裂可行性问题被广泛地应用于放射性治疗、图像重构和信号处理等领域，研究其迭代算法具有较大的理论意义和实际价值。本文在Hilbert空间中，提出一种求解分裂可行问题的松弛投影算法，其算法在CQ算法的基础上引入改造的Halpern迭代序列和线性算子。在文中用数值实验将所提算法与前人算法进行对比验证，数值实验结果表明了提出算法的有效性。

关键词

分裂可行性问题，投影算法，Hilbert空间

Relaxation Projection Algorithm for Solving Split Feasibility Problem

Caihua Hou, Yazheng Dang

Business School, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Feb. 11th, 2022; accepted: Mar. 14th, 2022; published: Mar. 21st, 2022

Abstract

Split feasibility problem is widely used in the fields of radiotherapy, image reconstruction and signal processing, thus the iterative algorithm has great theoretical significance and practical value in studying iterative algorithms. In this paper, a relaxation projection algorithm for solving split feasible problems is proposed in Hilbert space, and its algorithm introduces modified Halpern iterative sequences and linear operators on the basis of the CQ algorithm. In this paper, the proposed algorithm is compared with predecessor algorithm by numerical experiments, and the numerical experimental results show the effectiveness of the proposed algorithm.

文章引用: 候彩华, 党亚峥. 求解分裂可行性问题的松弛投影算法[J]. 理论数学, 2022, 12(3): 392-399.
DOI: 10.12677/pm.2022.123043

Keywords

Split Feasibility Problem, Projection Algorithm, Hilbert Space

1. 引言

分裂可行性问题(SFP)在图像重建、信号处理和放射治疗中起着重要作用[1] [2] [3] [4]。设 C,Q 分别是 Hilbert 空间 H_1,H_2 上的非空闭凸子集，$A:H_1\to H_2$ 是一个有界线性算子。分裂可行问题(SFP)是指找到一点 x，满足

$$x\in C,\quad Ax\in Q. \tag{1}$$

该问题由 Censor 和 Elfving [5]于 1994 年首次在有限维 Hilbert 空间中提出。为了解决 SFP 问题，很多学者提出各种各样的算法(参见文献[6] [7] [8] [9])。其中部分学者使用投影的方法得到求解 SFP 的迭代算法，但这些迭代算法需要计算矩阵的逆，矩阵逆的计算需要花费大量时间并且不容易求解，进而会影响算法的迭代效率。为了克服这点，Byrne [10]首先提出了 *CQ* 算法，迭代公式为

$$x^{k+1}=P_C\left(x^k-\lambda A^*\left(I-P_Q\right)Ax^k\right), \tag{2}$$

其中步长 $\lambda\in\left(0,\frac{2}{\|A\|^2}\right)$。受 *CQ* 算法的影响，Wang 和 Xu [11]通过引入系数 α_k，提出了修正 *CQ* 算法

$$x^{k+1}=P_C\left[\left(1-\alpha_k\right)\left(x^k-\lambda A^*\left(I-P_Q\right)Ax^k\right)\right]. \tag{3}$$

并证明了(3)式强收敛于分裂可行性问题的最优解。Dang [6]等人提出 KM-CQ-Like 算法

$$x^{k+1}=\left(1-\beta_k\right)x^k+\beta_kP_C\left[\left(1-\alpha_k\right)\left(I-\gamma A^*\left(I-P_Q\right)A\right)x^k\right]$$

其中 $\{\alpha_k\}$ 和 $\{\beta_k\}$ 在(0, 1)之间。并证明了算法的强收敛性。López 等人[12]首先在 *CQ* 算法上引入新的选择步长的方法，步长 $\lambda_k=\frac{\rho_kf_k\left(x^k\right)}{\left\|\nabla f_k\left(x^k\right)\right\|^2}$，其中 $\rho_k\in(0,4)$，并证明了具有此步长的算法(2)式弱收敛到 SFP 的解。在此基础上他们又引入 Halpern [13]迭代思想，迭代公式为

$$x^{k+1}=\alpha_ku+\left(1-\alpha^k\right)P_C\left(x^k-\lambda_k\nabla f_k\left(x^k\right)\right), \tag{4}$$

其中，u 是 C 的不动点，$\alpha_k\subset[0,1)$，$\nabla f(x)=A^*\left(I-P_Q\right)Ax$，$\lambda_k=\frac{\rho_kf_k\left(x^k\right)}{\left\|\nabla f_k\left(x^k\right)\right\|^2}$，并证明了(4)式强收敛于 SFP 的最优解。本文受前人文献的启发，提出一种求解分裂可行问题的松弛投影算法。此算法在 CQ 算法上引入改造的 Halpern 迭代序列和线性算子。

文章结构安排如下：第 2 节中，回顾一些必要的定义和基础知识；在第 3 节，提出松弛投影算法和相关引理；在第 4 节中，将提出的算法与前人算法进行对比，并对结果进行分析。最后，在第 5 节中，

对论文进行简短总结。

2. 预备知识

设 H 是 Hilbert 空间，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示内积，$\|\cdot\|$ 表示对应的范数，I 表示 Hilbert 空间上的单位算子，$Fix(T) := \{x \mid x = Tx\}$ 表示算子 T 的不动点集合。$\{x^k\}$ 是 H 中的一个序列，$x \in H$。

定义 2.1 [14]令 $F: H \to H$ 为非线性算子，称

1) F 是非扩张算子，如果

$$\|Fx - Fy\| \le \|x - y\|, \ \forall x, y \in H;$$

2) F 是固定非扩张算子，如果

$$\|Fx - Fy\|^2 \le \langle x - y, Fx - Fy\rangle, \ \forall x, y \in H;$$

3) F 是 α -平均算子，如果

$$T = (1-\alpha)I + \alpha R,$$

其中 $\alpha \in (0,1)$，I 是单位算子，$R: H \to H$ 是非扩张算子。

4) F 是 L-Lipschitz 连续，其中 $L \ge 0$，如果 $\forall x, y \in H$

$$\|Fx - Fy\| \le L\|x - y\|,$$

如果，$0 \le L < 1$，F 则为 L-压缩映像。

定义 2.2 [15]设 $C \subseteq H$ 是非空闭凸集，对任意 $x \in H$，x 到 C 上的投影定义为：

$$P_C(x) = \arg\min\{\|y - x\| \mid y \in C\}.$$

显然，若 $x \in C$，则 $x = P_C(x)$。投影 P_C 具有下面重要的性质。

引理 2.1 [15]设 $C \subseteq H$，是非空闭凸集，则对任意 $x, y \in H$，有

1) $\langle x - P_C(x), z - P_C(x)\rangle \le 0$, $\forall z \in C$;

2) $\langle P_C(y) - P_C(x), y - x\rangle \ge \|P_C(y) - P_C(x)\|^2$;

3) $\|P_C(x) - z\|^2 \le \|x - z\|^2 - \|P_C(x) - x\|^2$, $\forall z \in C$;

4) $\|P_C(x) - P_C(y)\|^2 \le \|x - y\|^2 - \|(1 - P_C)x - (1 - P_C)y\|^2$;

5) $\|P_C(x) - P_C(y)\|^2 \le \|x - y\|$.

引理 2.2 [16]设 $x, y \in H$，$t, s \in R$。其中 R 是实数集。则有

$$\|x + y\|^2 \le \|x\|^2 + 2\langle y, x + y\rangle;$$

$$\|tx + sy\|^2 = t(t+s)\|x\|^2 + s(t+s)\|y\|^2 - st\|x - y\|^2;$$

$$\|tx + (1-t)y\|^2 = t\|x\|^2 + (1-t)\|y\|^2 - t(1-t)\|x - y\|^2.$$

引理 2.3 [17]设 $\nabla f(x) = A^*(I - P_Q)Ax$ 是 Lipschitz 连续，问题(1)的解集是非空的。当且仅当 $z = P_C(I - \alpha\nabla f)z$，$z \in H$ 时，则 z 是问题(1)的解。

引理 2.4 [18]设 $T: H \to H$ 是 $Fix(T) \ne \emptyset$ 的非扩张映射。如果 $\{x^k\}$ 是 H 中的一个弱收敛到 x^* 的序列，并且 $\{(1-T)x^k\}$ 强烈收敛到 0，则 $\lim_{k\to\infty}(1-T)x^k = 0$。

引理 2.5 [18]假设 $\{s^k\}$ 是满足以下条件的非负实数序列

$$s^{k+1} \le (1-\gamma_k)s^k + \gamma_k\delta_k + \beta_k, \ k \ge 0,$$

其中$\{\gamma_k\}$，$\{\beta_k\}$，$\{\delta_k\}$满足条件

1) $\{\gamma_k\}\subset[0,1]$，$\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k=\infty$；

2) $\limsup_{k\to\infty}\delta_k\le 0$；

3) $\beta_k\ge 0$，$\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k<\infty$。

则$\lim\limits_{k\to\infty}s^k=0$。

引理 2.6 [17] [19]设$f(x):=\frac{1}{2}\|Ax-P_QAx\|^2$，$\nabla f(x)=A^*(I-P_Q)Ax$，$L$是$\nabla f(x)$的 Lipschitz 常数，有

$$\|\nabla f(x)-\nabla f(y)\|\le L\|x-y\|,\ \forall x,y\in H,$$

对于任何$\alpha\in\left(0,\frac{2}{L}\right)$，$P_C(I-\alpha\nabla f)$是$\frac{2+\alpha L}{4}$-平均算子[14]，也是非扩张的。

证明 设$P_C(I-\alpha\nabla f)=\left(1-\frac{2+\alpha L}{4}\right)I+\frac{2+\alpha L}{4}$。

$$\begin{aligned}
&\|P_C(I-\alpha\nabla f)(x)-P_C(I-\alpha\nabla f)(y)\|\\
&=\left\|\left(1-\frac{2+\alpha L}{4}\right)(x)+\frac{2+\alpha L}{4}R(x)-\left(1-\frac{2+\alpha L}{4}\right)(y)-\frac{2+\alpha L}{4}R(y)\right\|\\
&\le\left(1-\frac{2+\alpha L}{4}\right)\|x-y\|+\frac{2+\alpha L}{4}\|R(x)-R(y)\|\\
&\le\|x-y\|
\end{aligned}$$

其中$R:H\to H$是非扩张的。□

3. 松弛投影算法

本节提出一种求解分裂可行性问题的松弛投影算法。以下为算法过程：

算法 3.1

设C,Q分别是 Hilbert 空间H_1,H_2上的非空闭凸子集，$A:H_1\to H_2$是一个有界线性算子。对于任意选取的初始点$x^0\in H_1$，算法迭代序列为

$$x^{k+1}:=t_kh(x^k)+\lambda_kP_C\left(x^k-\alpha_kD(x^k)\nabla f(x^k)\right),\ k\ge 0. \tag{5}$$

其中$\nabla f(x)=A^*(1-P_Q)Ax$，$\{t_k\}\subset(0,1)$，$\{\lambda_k\}\subset(0,2)$，$t_k+\lambda_k=1$。定义$h:H_1\to\mathbb{R}$是$\varphi$-压缩映射，且$\varphi\in[0,1)$。$D(x):H_1\to\mathbb{R}$是线性有界算子满足

$$\sum_{k=0}^{\infty}\|\nabla f(x)-D\nabla f(x)\|:=\sum_{k=0}^{\infty}\|\nabla f(x)-D(x)\nabla f(x)\|=:\sum_{k=0}^{\infty}\|\theta(x)\|<\infty. \tag{6}$$

下面为对证明算法 3.1 收敛性重要的引理：

引理 3.1 设$f:H_1\to\mathbb{R}$，$0<\alpha<\frac{2}{L}$，其中$L\ge 0$为可微凸函数$f(x)$的梯度∇f的 Lipschitz 常数。设$T:=P_C(I-\alpha\nabla f)$，有

$$\|Tx-Ty\|^2\le\|x-y\|^2-\frac{2-\alpha L}{2+\alpha L}\|(I-T)x-(I-T)y\|^2. \tag{7}$$

证明 从引理 2.6 知T属于$\frac{\alpha L+2}{4}$-平均算子。因此，存在一个非扩张算子$R:H_1\to\mathbb{R}$，使得$T=(1-\beta)I+\beta R$，其中$\beta=(\alpha L+2)/4\in(0,1)$。因此，对于任何$x,y\in H_1$，由引理 2.2 有

$$\begin{aligned}\|Tx-Ty\|^2&=\left\|(1-\beta)x+\beta R(x)-\left[\left((1-\beta)y+\beta R(y)\right)\right]\right\|^2\\&=\left\|(1-\beta)(x-y)+\beta\left(R(x)-R(y)\right)\right\|^2\\&=(1-\beta)\|x-y\|^2+\beta\|R(x)-R(y)\|^2-\beta(1-\beta)\left\|x-y-\left(R(x)-R(y)\right)\right\|^2\\&=(1-\beta)\|x-y\|^2+\beta\|R(x)-R(y)\|^2-\frac{1-\beta}{\beta}\left\|\beta(x-y)-\beta\left(R(x)-R(y)\right)\right\|^2\\&\le\|x-y\|^2-\frac{2-\alpha L}{2+\alpha L}\left\|(I-T)x-(I-T)x\right\|^2.\end{aligned}\tag{8}$$

□

引理 3.2 令 $f:H_1\to\mathbb{R}$，$0<\alpha<\frac{2}{L}$，其中 $L\ge 0$ 为可微凸函数 $f(x)$ 的梯度 ∇f 的 Lipschitz 常数。设 $T:=P_C(I-\alpha\nabla f)$ 和 $b=\frac{4}{2+\alpha L}$。则 $bT+(1-b)I$ 是非扩张的。

证明 对于任意 $x,y\in H_1$。由引理 2.2 和引理 3.1

$$\begin{aligned}&\left\|\left(bT+(1-b)I\right)x-\left(bT+(1-b)I\right)y\right\|^2\\&=\left\|b(Tx-Ty)+(1-b)(x-y)\right\|^2\\&=b\|Tx-Ty\|^2+(1-b)\|x-y\|^2-b(1-b)\left\|(I-T)x-(I-T)y\right\|^2\\&\le b\left[\|x-y\|^2+(1-b)\left\|(I-T)x-(I-T)y\right\|^2\right]+(1-b)\|x-y\|^2-b(1-b)\left\|(I-T)x-(I-T)y\right\|^2\\&=\|x-y\|^2.\end{aligned}$$

□

接下来使用引理 3.1 和引理 3.2 证明算法 3.1 的收敛结果。

定理 3.3 假设 SFP 的解集 S 非空，(6)成立，且系数 $\{\alpha_k\}$，$\{t_k\}$，$\{\lambda_k\}$ 满足以下条件

1) $0<\alpha_k\le\sup_k\alpha_k=:\bar{\alpha}<\frac{2}{L}$；

2) $\lim_{k\to\infty}t_k=0$ 和 $\sum_{k=0}^{\infty}t_k=\infty$；

3) $\sup\frac{\lambda_k}{1-t_k}<\frac{4}{\bar{\alpha}L+2}$ 和 $\lim_{k\to\infty}\frac{t_k}{\lambda_k}=0$。

则序列 $\{v^k\}$

$$v^{k+1}=t_kh\left(v^k\right)+\lambda_kP_C\left(I-\alpha_k\nabla f\right)v^k,\tag{9}$$

强烈收敛到点 $z\in S$。

定理 3.4 假设问题(1)的解集 S 不为空，式(6)成立并且 $\{\alpha_k\}$，$\{t_k\}$，$\{\lambda_k\}$ 满足以下条件

1) $0<\alpha_k\le\sup_k\alpha_k=:\bar{\alpha}<\frac{2}{L}$；

2) $\lim_{k\to\infty}t_k=0$ 和 $\sum_{k=0}^{\infty}t_k=\infty$；

3) $\sup\frac{\lambda_k}{1-t_k}<\frac{4}{\bar{\alpha}L+2}$ 和 $\lim_{k\to\infty}\frac{t_k}{\lambda_k}=0$。

则由算法(3.1)生成的序列 $\{x^k\}$

$$x^{k+1}:=t_kh\left(x^k\right)+\lambda_kP_C\left(x^k-\alpha_kD\left(x^k\right)\nabla f\left(x^k\right)\right)$$

强收敛到点 $z \in S$。

4. 数值实验

本节给出两个数值实验来验证算法的可行性。所有代码程序由 MATLAB (R2017a)编写，在 Windows 10 Inter(R) Core(TM) i5-8500 CPU@3.00GHz 3.0 GHz 和 8 GB 内存的 Dell 电脑上运行。

例 4.1 设 $C=\left\{x\in R^3 \left| x_1+x_2^2+2x_3\le 0\right.\right\}$；$Q=\left\{x\in R^3 \left| x_1^2+x_2-x_3\le 0\right.\right\}$；

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

找一点 x，使 $x\in C$，$Ax\in Q$。令 $\varepsilon=10^{-4}$，$t_k=\frac{1}{15k}$，$\lambda_k=1-t_k$，同时取，$h\left(x^k\right)=0.1x^k$，$\alpha_k=\frac{k}{L(k+1)}$，$D(x)=diag(5x)$。在数值实验中，采用了 $\left\|x^{k+1}-x^k\right\|<\varepsilon$ 作为停止准则。

例 4.1 的数值结果见表 1。在表 1 中，“算式(5)”，“算式(3)”和“CQ”和分别表示松弛投影算法，修改 CQ 算法和 CQ 算法。“Iter”，“Cpu”和“x^*”分别表示迭代次数，以秒为单位的运行时间和最优解。x^0 是初始值(在区间(−10, 10)中随机产生)。

Table 1. Comparison of Equation (5) with Equation (3) and CQ algorithms at different initial values
表 1. 算式(5)与算式(3)和 CQ 算法在不同初始值下的对比

初始值	算式(5)	算式(3)	CQ
$x^0=(1\ \ 1\ \ 2)'$	Iter = 18, Cpu = 0.007 $x^*=[0.00,-0.00,0.19]$	Iter = 31, Cpu = 0.008 $x^*=[0.00,-0.61,0.61]$	Iter = 62, Cpu = 0.01 $x^*=[0.00,0.36,0.73]$
$x^0=(-3\ \ 6\ \ 9)'$	Iter = 21, Cpu = 0.006 $x^*=[0.00,-0.00,0.14]$	Iter = 56, Cpu = 0.009 $x^*=[0.00,-0.60,0.60]$	Iter = 62, Cpu = 0.009 $x^*=[-0.00,0.37,0.73]$
$x^0=(8\ \ -5\ \ 2)'$	Iter = 18, Cpu = 0.008 $x^*=[0.00,-0.00,0.17]$	Iter = 60, Cpu = 0.009 $x^*=[0.00,-0.55,0.55]$	Iter = 59, Cpu = 0.01 $x^*=[0.00,0.39,0.77]$

例 4.2 设 $C=\left\{x\in R^3 \left| x_1^2+x_2-x_3\le 0\right.\right\}$；$Q=\left\{x\in R^3 \left| x_1+x_2^2-3\le 0\right.\right\}$；

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

求 $x\in C$，$Ax\in Q$。取 $\varepsilon=10^{-3}$，$t_k=\frac{1}{3k}$，$\lambda_k=1-t_k$，同时取，$h\left(x^k\right)=0.3x^k$，$\alpha_k=\frac{k}{L(k+1)}$，$D(x)=diag(2x)$。在数值实验中，采用了 $\left\|x^{k+1}-x^k\right\|<\varepsilon$ 作为停止准则。

例 4.2 的数值结果可见于图 1。在图 1 中，“算式(5)”，“算式(3)”和“CQ”和分别表示松弛投影算法，修改 CQ 算法和 CQ 算法。

图 1 中的数值结果为当初始值 $x^1=rand(3,1)$ 时算式(5)，算式(3)和 CQ 算法的迭代次数对比图。其中算式(5)，算式(3)和 CQ 的迭代次数分别为 31，68 和 103。

由以上实验结果可知，松弛投影算法(5)在处理分裂可行问题时具有有效性，而且由对比结果可知，本文所提算法因其较少的迭代次数而优于 CQ 算法和修改 CQ 算法。

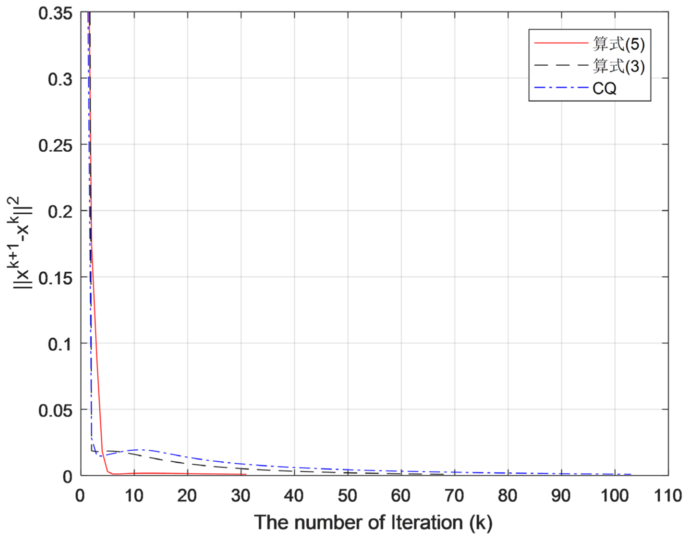

Figure 1. Equation (5) versus Equation (3) and *CQ* result comparison diagram
图 1. 算式(5)与算式(3)和 *CQ* 结果对比图

5. 结论

本文主要研究了求解分裂可行性问题的松弛投影算法，在前人研究的基础上引入改进的 Halpern 迭代和线性算子，构建了求解分裂可行问题的新算法。数值实验结果表明了所提算法的有效性。本文算法的步长为固定步长，其取值范围的算子范数难以估计，因此结合其它方法，优化迭代步长，是下一步研究方向。

参考文献

[1] Suantai, S., Kesornprom, S. and Cholamjiak, P. (2019) A New Hybrid CQ Algorithm for the Split Feasibility Problem in Hilbert Spaces and Its Applications to Compressed Sensing. *Mathematics*, **7**, Article No. 789. https://doi.org/10.3390/math7090789

[2] Ansari, Q.H., Rehan, A. and Yao, J.C. (2017) Split Feasibility and Fixed Point Problems for Asymptotically K-Strict Pseudo-Contractive Mappings in Intermediate Sense. *Fixed Point Theory*, **18**, 57-68. https://doi.org/10.24193/fpt-ro.2017.1.06

[3] Padcharoen, A., Kumam, P. and Cho, Y.J. (2018) Split Common Fixed Point Problems for Demicontractive Operators. *Numerical Algorithms*, **82**, 297-320. https://doi.org/10.1007/s11075-018-0605-0

[4] Censor, Y., Bortfeld, T., Martin, B. and Trofimov, A. (2006) A Unified Approach for Inverse Problem in Intensity-Modulated Radiation Therapy. *Physics in Medicine & Biology*, **51**, 2353-2365. https://doi.org/10.1088/0031-9155/51/10/001

[5] Censor, Y. and Elfving, T. (1994) A Multiprojection Algorithm Using Bregman Projections in a Product Space. *Numerical Algorithms*, **8**, 221-239. https://doi.org/10.1007/BF02142692

[6] Dang, Y.Z. and Gao, Y. (2011) The Strong Convergence of a KM-CQ-Like Algorithm for a Split Feasibility Problem. *Inverse Problems*, **27**, Article ID: 015007. https://doi.org/10.1088/0266-5611/27/1/015007

[7] Vinh, N.T., Cholamjiak, P. and Suantai, S. (2018) A New CQ Algorithm for Solving Split Feasibility Problems in Hilbert Spaces. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, **42**, 2517-2534. https://doi.org/10.1007/s40840-018-0614-0

[8] Zhao, J., Zhang, Y. and Yang, Q. (2012) Modified Projection Methods for the Split Feasibility Problem and the Multiple-Sets Split Feasibility Problem. *Applied Mathematics & Computation*, **219**, 1644-1653. https://doi.org/10.1016/j.amc.2012.08.005

[9] Kesornprom, S., Pholasa, N. and Cholamjiak, P. (2020) On the Convergence Analysis of the Gradient-CQ Algorithms for the Split Feasibility Problem. *Numerical Algorithms*, **84**, 997-1017. https://doi.org/10.1007/s11075-019-00790-y

[10] Byrne, C. (2002) Iterative Oblique Projection onto Convex Sets and the Split Feasibility Problem. *Inverse Problems*, **18**, 441-453. https://doi.org/10.1088/0266-5611/18/2/310

[11] Wang, F. and Xu, H.K. (2010) Approximating Curve and Strong Convergence of the CQ Algorithm for the Split Feasibility Problem. *Journal of Inequalities & Applications*, **2010**, Article ID: 102085. https://doi.org/10.1155/2010/102085

[12] López, G., Martín-Márquez, V., Wang, F. and Xu, H. (2012) Solving the Split Feasibility Problem without Prior Knowledge of Matrix Norms. *Inverse Problems*, **28**, Article ID: 085004. https://doi.org/10.1088/0266-5611/28/8/085004

[13] Halpern, B. (1967) Fixed Points of Nonexpanding Maps. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **73**, 957-961. https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1967-11864-0

[14] Xu, H.-K. (2010) Iterative Methods for the Split Feasibility Problem in Infinite-Dimensional Hilbert Spaces. *Inverse Problems*, **26**, Article ID: 105018. https://doi.org/10.1088/0266-5611/26/10/105018

[15] Facchinei, F. and Pang, J.S. (2003) Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems. Vol. I, Springer, New York. https://doi.org/10.1007/b97544

[16] Wang, Y., Wang, F. and Xu, H.K. (2016) Error Sensitivity for Strongly Convergent Modifications of the Proximal Point Algorithm. *Journal of Optimization Theory & Applications*, **168**, 901-916. https://doi.org/10.1007/s10957-015-0835-4

[17] Byrne, C. (2004) A Unified Treatment of Some Iterative Algorithms in Signal Processing and Image Reconstruction. *Inverse Problems*, **20**, 103-120. https://doi.org/10.1088/0266-5611/20/1/006

[18] Goebel, K. and Kirk, W.A. (1990) Topics in Metric Fixed Point Theory. Cambridge University Press, Cambridge. https://doi.org/10.1017/CBO9780511526152

[19] Martinez-Yanes, C. and Xu, H.K. (2006) Strong Convergence of the CQ Method for Fixed Point Process. *Nonlinear Analysis*, **64**, 2400-2411. https://doi.org/10.1016/j.na.2005.08.018