Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(3), 376-383
Published Online March 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.123041

二重积分在联合分布函数与密度函数计算中的应用

何忠华

广东金融学院金融数学与统计学院，广东 广州

收稿日期：2022年2月9日；录用日期：2022年3月11日；发布日期：2022年3月21日

摘 要

二维随机向量的联合分布函数与随机向量函数的密度函数的计算是概率论与数理统计教学的一个重点和难点。不少学生，特别是财经院校的学生，在计算该类问题时，经常由于不懂如何划分积分区域而无从下手，或者计算频频出错。本文介绍如何运用二重积分的方法来解决该类问题。

关键词

联合分布函数，密度函数，二重积分

Applications of the Double Integration in the Calculation of Joint Distribution Functions and Density Functions

Zhonghua He

School of Financial Mathematics and Statistics, Guangdong University of Finance, Guangzhou Guangdong

Received: Feb. 9th, 2022; accepted: Mar. 11th, 2022; published: Mar. 21st, 2022

Abstract

The calculation of the joint distribution functions of two-dimensional random vector and the density functions of random vector's function is an important and difficult point in the teaching of probability theory and mathematical statistics. Many students, especially those in financial and economic colleges, often have no way to solve this kind of problems since they don't know how to divide the region of integral, or they often make mistakes in calculation. This paper introduces how to use the methods of double integration to solve such problems.

文章引用: 何忠华. 二重积分在联合分布函数与密度函数计算中的应用[J]. 理论数学, 2022, 12(3): 376-383.
DOI: 10.12677/pm.2022.123041

Keywords

Joint Distribution Function, Density Function, Double Integration

1. 引言

在人类社会的各种活动中，人们所观察到的现象大部分都是随机现象，然而这类随机现象的结果又呈现一定的规律性。概率论与数理统计正是研究和揭示这类随机现象统计规律性的一门数学分支。它在工程技术、科学研究、经济管理、企业管理、经济预测等众多领域都有广泛的应用；它还与众多基础学科相结合产生出了许多边缘学科，如生物统计学、医学统计学、计量经济学、管理统计学、工程统计学、商业统计学、金融统计学等；又是许多新兴的重要学科的基础，如信息论、控制论、可靠性理论、人工智能、信息编码理论和数据挖掘等。由此可见，概率论与数理统计已然成为现代科技与生产生活不可或缺的数学技术。

二维随机向量的联合分布函数与随机向量函数的密度函数的求解，是概率论与数理统计教学的一个重点和难点[1]。在计算分布函数和密度函数时，由分布函数计算密度函数较为容易，但由于密度函数的非零区域一般不是整个平面，从而导致学生计算分布函数时，往往不懂如何确定积分范围而不知所措。

有不少文章就关于二维连续型随机变量分布函数和随机变量函数的密度函数的计算做了探讨。文献[1]通过联合密度函数区域为矩形的例子来介绍二维连续随机变量的联合分布函数的确定，及通过边缘密度函数利用卷积公式的例子来介绍两个随机变量和的概率密度的确定。文献[2]介绍了把联合概率密度函数区域化为 X-型区域来计算二维连续型随机变量的分布函数。文献[3]介绍了分布函数法、变量代换法和密度函数转化法来计算二维连续型随机变量函数的分布密度。文献[4]探讨了二维连续型随机变量的分布函数和概率的计算，并结合实例说明方法的有效性。文献[5]介绍了借助平面图形计算二维连续型随机变量函数的概率密度的方法。文献[6]着重对使用变量变换法求二维连续型随机变量函数的分布密度进行了探讨，并给出实例。文献[7]主要探讨了二维连续型随机变量函数的密度函数计算公式，并进行了简单推广。文献[8]运用一个例子来介绍分布函数法、卷积公式法、增补变量法和密度规范法来计算二维连续型随机变量函数密度。文献[9]针对二维连续型随机变量的线性函数的积分定限和计算问题，介绍了不等式组定限方法来计算概率密度函数。文献[10]讨论了二维连续型随机变量线性函数的概率密度计算公式。文献[11]着重分析如何借助于图形来确定积分区域的上下限来计算随机变量函数的概率密度。

本文主要通过实例来介绍二维连续型随机变量的联合分布函数计算和随机变量函数的密度函数计算。并着重介绍把积分区域转化为直角坐标系下 X 型区域的方法来计算联合分布函数和随机变量函数的概率密度函数，所选取的实例比较有代表性，能较好地帮助学生克服相关问题。

2. 联合分布函数的计算

2.1. 理论分析

定义 [12] 对任意 n 个实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，n 个事件 $\{X_1\le x_1\},\{X_2\le x_2\},\cdots,\{X_n\le x_n\}$ 同时发生的概率

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=P(X_1\le x_1,X_2\le x_2,\cdots,X_n\le x_n)$$

称为 n 维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的联合分布函数。

由定义可知，对于二维连续型随机变量 (X,Y)，随机变量 (X,Y) 的联合分布函数 $F(x,y)=P(X\le x, Y\le y)$ 实际上就是事件 $\{X\le x\}$ 与 $\{Y\le y\}$ 同时发生的概率。其几何意义表现为，如果将二维随机变量 (X,Y) 看成是平面上随机点的坐标，那么联合分布函数 $F(x,y)$ 在 (x,y) 处的函数值就是随机点 (X,Y) 落在以 (x,y) 为顶点的左下方无穷区域上的概率[12]。其积分形式可表示为[13] [14]

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v .$$

由上可知，联合分布函数 $F(x,y)$ 的计算最终转变为二重积分的计算。二重积分的计算要点是把它化为定积分，方法有很多种，其中最常用的是在直角坐标系下化为累次积分。概率论通常考查的是有效积分区域为直角坐标系下的 x 型区域或 y 型区域上的分布函数计算(图 1、图 2)。因此，这里主要介绍该类型的求解方法。

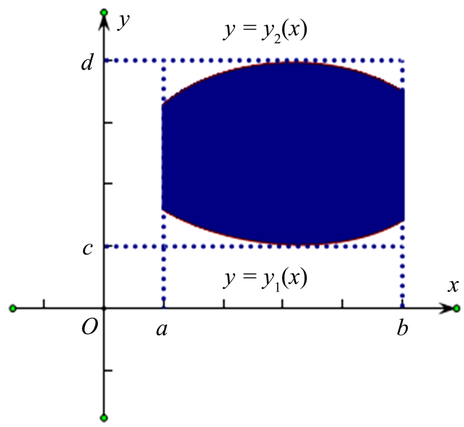

Figure 1. The x-shaped region of Theorem 1
图 1. 定理 1 的 x 型区域

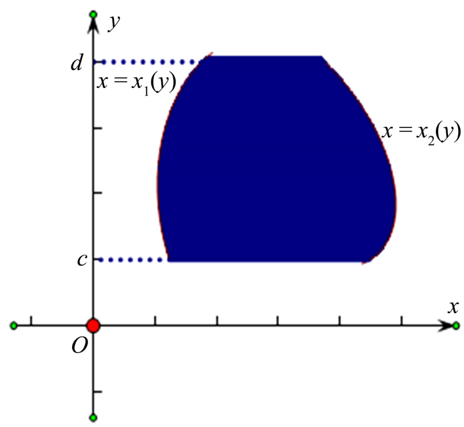

Figure 2. y-shaped region of Theorem 2
图 2. 定理 2 的 y 型区域

直角坐标系下的 x 型区域或 y 型区域上二重积分的计算方法主要依据下面两个定理。

定理 1 [15] 若 $f(x,y)$ 在 x 型区域 $D=\{(x,y)\,|\,y_1(x)\le x\le y_2(x), a\le x\le b\}$ (如图 1)上连续，其中 $y_1(x)$，$y_2(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y .$$

即二重积分可化为先对 y，后对 x 的累次积分。

定理 2 [15] 若 $f(x,y)$ 在 y 型区域 $D=\{(x,y) \mid x_1(y)\le y\le x_2(y), c\le y\le d\}$ (如图 2)上连续，其中 $x_1(y)$，$x_2(y)$ 在 $[c,d]$ 上连续，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x .$$

即二重积分可化为先对 x，后对 y 的累次积分。

若积分区域既是 x 型区域又是 y 型区域时，按照学生的习惯，这里以 x 型区域情形计算。

2.2. 应用举例

例 1 [12]：设 (X,Y) 的联合密度为 $f(x,y)=24y(1-x)$，$0\le x\le 1$，$0\le y\le x$。求 (X,Y) 的联合分布函数。

解：1) 当 $x<0$ 或 $y<0$ 时，积分区域如图 3 阴影部分所示，此时 $f(x,y)=0$，于是 $F(x,y)=0$；

2) 当 $0\le x<1, 0\le y<x$ 时，积分区域如图 4 点 (x,y) 左下方的阴影部分，其为 y 型区域，从而由定理 2 可得

$$F(x,y)=\int_0^y \mathrm{d}v \int_v^x 24v(1-u)\mathrm{d}u = 3y^4-8y^3+12y^2x-6y^2x^2 ;$$

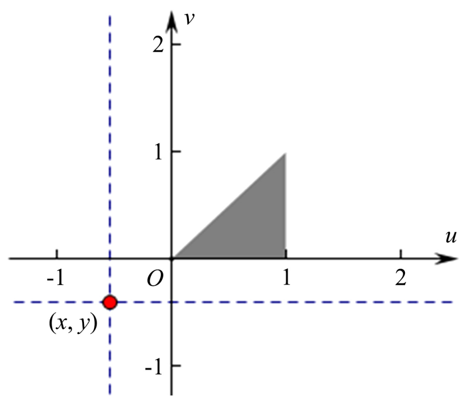

Figure 3. Integration area at $x<0$ or $y<0$
图 3. $x<0$ 或 $y<0$ 时的积分区域

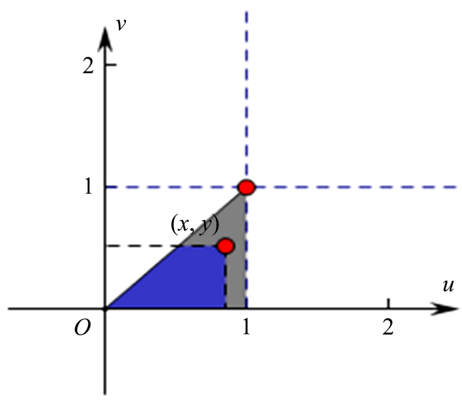

Figure 4. Integration area at $0\le x<1, 0\le y<x$
图 4. $0\le x<1$，$0\le y<x$ 时的积分区域

3) 当$0 \le x < 1$，$x \le y$时，积分区域如图 5 点(x,y)左下方的阴影部分，其既是x型区域又是y型区域，这里我们用x型区域情形计算，于是由定理 1 可得

$$F(x,y) = \int_0^x \mathrm{d}u \int_0^u 24v(1-u)\mathrm{d}v = 4x^3 - 3x^4;$$

4) 当$1 \le x, 0 \le y < 1$时，积分区域如图 6 点(x,y)左下方的阴影部分，其为y型区域，于是由定理 2 可得

$$F(x,y) = \int_0^y \mathrm{d}v \int_v^1 24v(1-u)\mathrm{d}u = 3y^4 - 8y^3 + 6y^2;$$

5) 当$1 \le x$，$1 \le y$时，积分区域如图 7 点(x,y)左下方的阴影部分，由定理 2 可得

$$F(x,y) = \int_0^1 \mathrm{d}v \int_0^u 24v(1-u)\mathrm{d}u = 1.$$

故而综上可得(X,Y)的联合分布函数为

$$F(x,y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{或} y < 0 \\ 3y^4 - 8y^3 + 12y^2x - 6y^2x^2, & 0 \le x < 1, 0 \le y < x \\ 4x^3 - 3x^4, & 0 \le x < 1, x \le y \\ 3y^4 - 8y^3 + 6y^2, & 1 \le x, 0 \le y < 1 \\ 1, & 1 \le x, 1 \le y \end{cases}$$

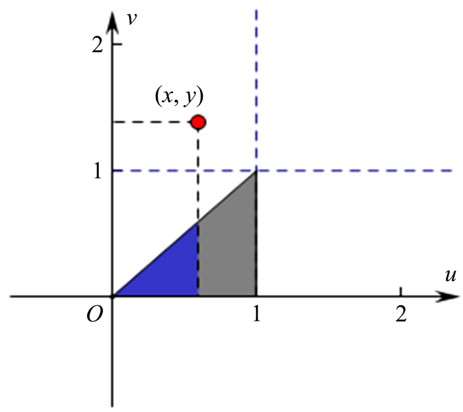

Figure 5. Integration area at $0 \le x < 1, x \le y$
图 5. $0 \le x < 1$，$x \le y$ 时的积分区域

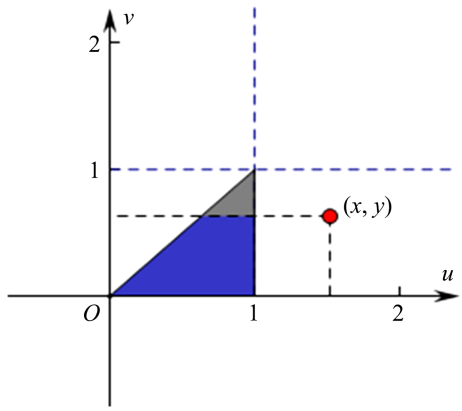

Figure 6. Integration area at $1 \le x, 0 \le y < 1$
图 6. $1 \le x$，$0 \le y < 1$ 时的积分区域

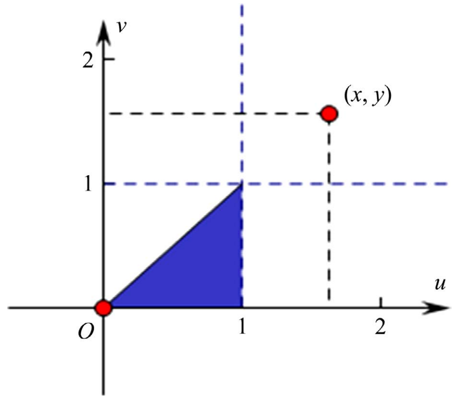

Figure 7. The integral area at $1 \le x, 1 \le y$
图 7. $1 \le x$，$1 \le y$ 时的积分区域

3. 密度函数的计算

3.1. 理论分析

设 (X,Y) 的联合密度函数为 $f(x,y)$， $z = g(x,y)$ 为连续函数，求 $Z = g(X,Y)$ 的概率密度函数。其求解方法一般有分布函数法和不等式组定限法(公式法) [9]。这里主要利用分布函数法求解，其与一维的情形类似，先求出 Z 的分布函数 $F_Z(z)$，然后对其计算关于 z 的导函数即为所求概率密度函数 $f_Z(z)$。而

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(g(X,Y) \le z) = \iint_{\{(x,y)|g(x,y)\le z\}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

于是要求 $F_Z(z)$，只需计算二重积分 $\iint_{\{(x,y)|g(x,y)\le z\}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，这与前面求解联合分布函数情形类似。

3.2. 应用举例

例 2 [12]：设 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-(x+y)}, & x>0, y>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

试求以下随机变量的密度函数

1) $Z = \dfrac{X+Y}{2}$；2) $Z = Y - X$。

解： 1) 当 $z<0$ 时， $f(x,y)=0$，此时 $F_Z(z)=0$ 于是 $f_Z(z)=0$。

当 $z \ge 0$ 时，积分区域如图 8 阴影部分，于是由定理 1 可得

$$F_Z(z) = P\left(\frac{X+Y}{2} \le z\right) = \int_0^{2z}\left(\int_0^{2z-x} \mathrm{e}^{-(x+y)}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = 1-\mathrm{e}^{-2z}-2z\mathrm{e}^{-2z}.$$

此时 $f_Z(z) = F_Z'(z) = 4z\mathrm{e}^{-2z}$。

因此，随机变量 $Z = \dfrac{X+Y}{2}$ 的密度函数为 $f_Z(z) = \begin{cases} 4z\mathrm{e}^{-2z}, & z \ge 0 \\ 0, & z<0 \end{cases}$。

2) a) 当 $z \ge 0$ 时，积分区域如图 9 阴影部分，从而由定理 1 可得

$$F_Z(z) = P(Y-X \le z) = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{x+z} \mathrm{e}^{-(x+y)}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = 1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-z}.$$

于是 $f_Z(z) = F_Z'(z) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-z}$。

b) 当 $z<0$ 时，积分区域见图 10 阴影部分，于是由定理 1 可得

$$F_Z(z)=P(Y-X\le z)=\int_{-z}^{+\infty}\left(\int_0^{x+z}\mathrm{e}^{-(x+y)}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^z .$$

于是 $f_Z(z)=F_Z'(z)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^z$ 。

因此，随机变量 $Z=Y-X$ 的密度函数为 $f_Z(z)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|z|},-\infty<z<+\infty$ 。

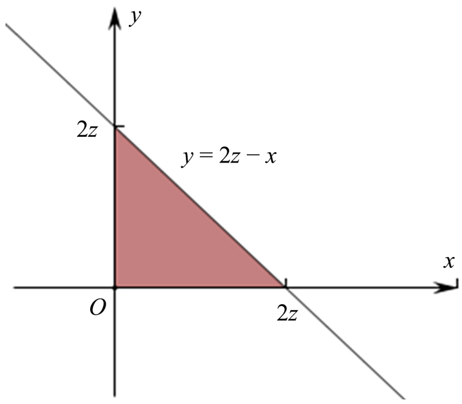

Figure 8. Integral area for problem (1) $z\ge 0$
图 8. 问题(1) $z\ge 0$ 时的积分区域

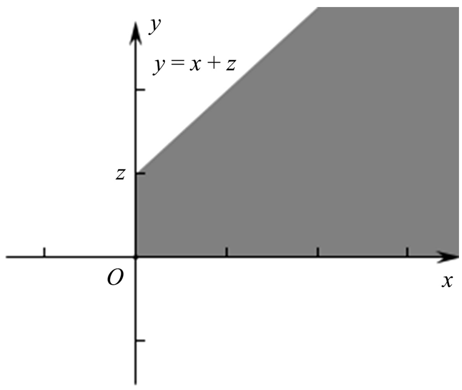

Figure 9. Integral area for problem (2) $z\ge 0$
图 9. 问题(2) $z\ge 0$ 时的积分区域

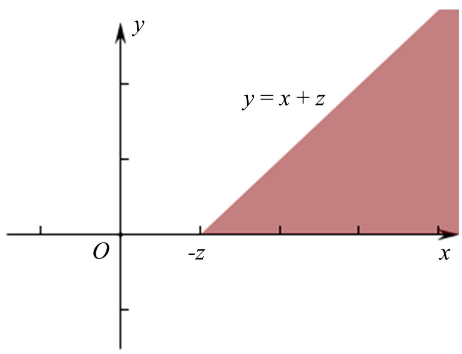

Figure 10. Integration area for problem (2) $z<0$
图 10. 问题(2) $z<0$ 时的积分区域

4. 结束语

随机变量的分布函数及随机变量函数的密度函数计算，主要难点在于如何确定积分上下限。本文选取的例子具有一定的代表性，借助于直角坐标积分区域的划分情形，可以比较容易让学生掌握求解相关函数的方法，并且不易出错。同时，在直角坐标系下也可以使问题比较直观，有利于培养学生的形象思维，提高学习的积极性，对培养学生的数学思维具有重要意义。

基金项目

国家自然科学基金(11971123)。

参考文献

[1] 翟亚利. 二维随机变量相关问题教学难点分析[J]. 数学学习与研究(教研版), 2009(2): 12-13.

[2] 张忠诚, 喻五一. 二维连续型随机变量分布函数的计算[J]. 高等函授学报(自然科学版), 2010, 23(6): 3-4+6.

[3] 李思齐, 李昌兴, 柳晓燕. 二维连续型随机变量函数的分布密度的计算[J]. 大学数学, 2011, 27(5): 162-166.

[4] 张菲菲, 徐海蛟, 朱雄泳, 李万益, 李晓霞. 二维连续型随机变量分布函数及概率的计算[J]. 电脑知识与技术, 2019, 15(28): 195-198.

[5] 李香玲, 刘桂霞. 二维连续型随机变量函数的分布计算技巧[J]. 河北建筑工程学院学报, 2003, 21(3): 67-69.

[6] 唐兴芸, 罗明燕. 二维连续型随机变量函数的分布密度[J]. 黔南民族师范学院学报, 2012, 32(2): 112-115.

[7] 刘平兵. 二维连续型随机变量函数的密度公式及计算[J]. 数学理论与应用, 2005, 25(4): 94-96.

[8] 阮传同, 谭伟. 二维连续型随机变量函数密度的求解技巧探讨[J]. 周口师范学院学报, 2019, 36(5): 39-41.

[9] 王建平, 王瑞. 二维连续型随机变量线性函数的概率密度的新算法[J]. 高等数学研究, 2019, 22(4): 93-96.

[10] 周永卫, 范贺花. 连续型二维随机变量线性函数和的概率密度的简单求法[J]. 河南教育学院学报(自然科学版), 2009, 18(1): 3-6.

[11] 安佰玲, 张德燕, 王国华. 数形结合法在确定随机变量函数分布中的运用[J]. 淮北师范大学学报(自然科学版), 2018, 39(2): 78-81.

[12] 茆诗松, 程依明, 濮晓龙. 概率论与数理统计[M]. 第二版. 北京: 高等教育出版社, 2017.

[13] 盛骤, 谢式千, 潘承毅, 等. 概率论与数理统计[M]. 第四版. 北京: 高等教育出版社, 2008.

[14] 同济大学数学系. 高等数学(下册) [M]. 第七版. 北京: 高等教育出版社, 2014.

[15] 华东师范大学数学系. 数学分析(下册) [M]. 第四版. 北京: 高等教育出版社, 2015.