**Pure Mathematics** 理论数学, 2022, 12(3), 458-463
Published Online March 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.123051

Hans汉斯

# 立体阵在模糊综合评判及模糊决策上的应用

**周晓中[1,2*]，薛中会[1,2]**

[1]上海传媒研究院，上海
[2]上海出版印刷高等专科学校，上海

收稿日期：2022年2月18日；录用日期：2022年3月21日；发布日期：2022年3月28日

## 摘 要

作者在对立体阵研究的基础上，基于立体矩阵的基本运算，给出了一种进行模糊综合评判的新思路、新做法，并建立了计算方法；同时，给出了该方法在教学质量等模糊综合评判上的应用。

## 关键词

立体阵，模糊综合评判，模糊决策

# Application of Cubic Matrix in Fuzzy Comprehensive Evaluation and Fuzzy Decision-Making

**Xiaozhong Zhou[1,2*], Zhonghui Xue[1,2]**

[1]Shanghai Media Research Institute, Shanghai
[2]Shanghai Publishing Printing College, Shanghai

Received: Feb. 18th, 2022; accepted: Mar. 21st, 2022; published: Mar. 28th, 2022

## Abstract

**On the basis of the study of cubic matrix and the basic operation of the cubic, a new idea and method of fuzzy comprehensive evaluation are given, and the calculation method is established. At the same time, the application of the method to fuzzy comprehensive judgements such as teaching quality is given.**

*第一作者。

文章引用: 周晓中, 薛中会. 立体阵在模糊综合评判及模糊决策上的应用[J]. 理论数学, 2022, 12(3): 458-463.
DOI: 10.12677/pm.2022.123051

## Keywords

**The Cubic Matrix, Fuzzy Comprehensive Evaluation, Fuzzy Decision-Making**



## 1. 引言

1980 年，Bates 和 Watts 提出了立体阵的概念[1]，文献[2]对立体阵的定义和运算及其性质进行了较系统总结和扩充，指出有许多例子说明立体阵在统计中的作用；1983 年 Tasi 在其博士论文中对立体阵进行了初步的整理[3]，文献[4]探讨了立体阵的一般结构，给出了立体阵在经济学中非常重要的博弈论中的应用；文献[5]对立体阵的方括号乘法的性质进行了讨论，并提出了立体阵的一种广义内积，研究了其性质，指出了立体阵在模糊决策中应用前景。本文是在文献[5]的基础上，提出了立体阵在模糊综合评判和模糊决策上的一个新的思路和算法，同时展示了对出版物质量等进行模糊综合评判的作用。

## 2. 主要结果

首先明确立体阵的定义

**定义 1** 称 $n\times p\times q$ 的三维数组 $X=\left\{x_{ijk}\right\}$ 为立体阵，它可排为

$$X=\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

这里

$$X_i=\begin{bmatrix} x_{i11} & \cdots & x_{i1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{ip1} & \cdots & x_{ipq} \end{bmatrix}$$

特别地，如果每个 $x_{ijk}\in[0,1]$，称此立体阵为模糊的。

**定义 2** 设 $A$ 为 $r\times p$ (或 $q\times r$)阶矩阵，$X$ 为 $n\times p\times q$ 的立体阵，则 $Y=AX$ (或 $XA$)为 $n\times r\times q$ (或 $n\times p\times r$)的立体阵，其定义为

$$Y=\begin{bmatrix} AX_1 \\ AX_2 \\ \vdots \\ AX_n \end{bmatrix} \text{或 } Y=\begin{bmatrix} X_1A \\ X_2A \\ \vdots \\ X_nA \end{bmatrix}$$

称常矩阵与立体阵的乘积。

以往的研究结果说明，有许多例子指出了立体阵在统计中的作用，也给出了立体阵在经济学中非常重要的博弈论(由于其对博弈论在经济学中的应用研究，有两位学者据此获得了诺贝尔奖)中的应用。我们指出，模糊立体阵(元素在 0，1 之间)可以被应用到模糊决策之中。

在实际问题中，可供选择的方案(或对象)往往不止一个，我们需要找到一个相对最可靠(或最优秀)的方案(或对象)。可假设方案(或对象)集合为

$$U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$$

由于决策环境(即自然状态)具有模糊性，方案(或对象)集 $U$ 中的决策对象是很难确切描述的。因此，$U$ 为模糊集，我们需要对 $U$ 中的元素进行排序以确定最佳方案(或最优对象)。方法是由 $p$ 个专家组成专家集

$$W=\{w_1,w_2,\cdots,w_p\}$$

其中每个专家，如专家 $w_1$，针对每个方案(或对象) $u_s\left(s=1,2,\cdots,n\right)$，根据因素集

$$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_q\}$$

结合因素对应的权重集(权重可以根据组织者意图进行调整)

$$Z=\{z_1,z_2,\cdots,z_q\},\sum_{t=1}^{q}z_t=1$$

提出意见，这些意见往往是模糊的，是专家的总体印象，且还包含有心理因素，需要将这些意见集中为一个比较合理的量化形式，可以称为模糊意见集中决策。这种决策有着广泛和深刻的实际背景，诸如我们希望的对出版物等需有多种因素决定质量的产品进行综合评判、对各种评选和问题讨论的意见集中，都有一定意义。

具体做法：求出专家 $w_i$ 在因素 $v_j$ 上，对方案 $u_s$ 打的分数 $x_{sij}$ $(0\le x_{sij}\le 1)$ ($i=1,2,\cdots,p$；$j=1,2\cdots,q$；$s=1,2,\cdots,n$)，由此可以得到每个 $w_i$ 在每个因素 $v_j$ 上对方案 $u_s$ 的打分矩阵

$$X_{u_s}=\begin{bmatrix} x_{s11} & x_{s12} & \cdots & x_{s1q} \\ x_{s21} & x_{s22} & \cdots & x_{s2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{sp1} & x_{sp2} & \cdots & x_{spq} \end{bmatrix}$$

于是，我们获得一个对 $n$ 个方案 $u_s\left(s=1,2,\cdots,n\right)$ 打分的立体阵($0\le x_{sij}\le 1$)，

$$X=\begin{bmatrix} X_{u_1} \\ X_{u_2} \\ \vdots \\ X_{u_n} \end{bmatrix}_{n\times p\times q}$$

这里 $X_{u_s}$ 中的 $x_{s11},x_{s12},\cdots,x_{s1q}$，表示第一个专家，对第 $s$ 个方案，针对 $v_1,v_2,\cdots,v_q$ 因素的打分等。如果假设

$$Z=\{z_1,z_2,\cdots,z_q\},\sum_{l=1}^{q}z_l=1$$

表示要素集 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_q\}$ 中各个要素的权重集，比如，$v_2$ 的权重是 $z_2$ 等。根据定义 2，可以求立体阵 $X$ 与权重矩阵 $Z=\left[z_1,z_2,\cdots,z_q\right]$ 的常矩阵与立体阵的乘积

$$XZ=\begin{bmatrix} X_{u_1}Z \\ X_{u_2}Z \\ \vdots \\ X_{u_n}Z \end{bmatrix}_{n\times p\times 1}$$

称为方案综合打分立体阵，这里，

$$X_{u_s}Z=\begin{bmatrix} x_{s11}z_1+x_{s12}z_2+\cdots+x_{s1q}z_q \\ x_{s21}z_1+x_{s22}z_2+\cdots+x_{s2q}z_q \\ \vdots \\ x_{sp1}z_1+x_{sp2}z_2+\cdots+x_{spq}z_q \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{q}x_{s1j}z_j \\ \sum_{j=1}^{q}x_{s2j}z_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{q}x_{spj}z_j \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} t_{sm_1} \\ t_{sm_2} \\ \vdots \\ t_{sm_p} \end{bmatrix}\quad (s=1,2,\cdots,n)$$

其中 $t_{sm_i}$ 表示第 $i\left(i=1,2,\cdots,p\right)$ 个专家，针对 $q$ 个因素，对第 $s\left(s=1,2,\cdots,n\right)$ 个方案的综合打分，如果记

$$\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}t_{sm_i}=E_s\left(s=1,2,\cdots,n\right)$$

即认为是，$p$ 个专家针对 $q$ 各因素对第 $s$ 个方案综合评判量化的结果。取 $E_r=E_1\vee E_2\vee\cdots\vee E_n$，即为最优方案(对象)，其中 $r$ 为 $1,2,\cdots,n$ 中某个序数。

## 3. 应用

设有 6 位专家构成专家集 $W=\left\{w_1,w_2,w_3,w_4,w_5,w_6\right\}$，并假设有 5 个教学工作评判对象，构成对象集 $U=\left\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5\right\}$，选取：尊重校纪，注重仪态($v_1$)、认真备课，准备充分($v_2$)、思路清晰，重点突出($v_3$)、恰当运用现代教学手段($v_4$)、师生互动，课堂气氛活跃($v_5$)和引导学生积极思维($v_6$)，作为 6 个核心要素(可以增加更多的要素)组成因素集 $V=\left\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\right\}$，并设定权重集 $Z=\left\{0.1,0.1,0.3,0.1,0.2,0.2\right\}$，假设 6 位专家 $\left(w_i,i=1,2,3,4,5,6\right)$，对 5 位教师 $\left(u_s,s=1,2,3,4,5\right)$，针对 6 个要素 $\left(v_j,j=1,2,3,4,5,6\right)$ 打分情况如下

$$X_{u_1}=\begin{bmatrix} 0.95 & 0.88 & 0.85 & 0.90 & 0.92 & 0.95 \\ 0.88 & 0.92 & 0.75 & 0.80 & 0.98 & 0.85 \\ 0.90 & 0.83 & 0.88 & 0.85 & 0.80 & 0.82 \\ 0.76 & 0.89 & 0.82 & 0.70 & 0.75 & 0.73 \\ 0.85 & 0.80 & 0.92 & 0.75 & 0.82 & 0.80 \\ 0.92 & 0.86 & 0.91 & 0.81 & 0.76 & 0.70 \end{bmatrix}$$

$$X_{u_2}=\begin{bmatrix} 0.90 & 0.92 & 0.95 & 0.98 & 1 & 0.95 \\ 0.76 & 0.80 & 0.70 & 0.78 & 0.83 & 0.85 \\ 0.80 & 0.83 & 0.75 & 0.69 & 0.82 & 0.82 \\ 0.91 & 0.85 & 0.92 & 0.90 & 0.86 & 0.73 \\ 0.88 & 0.83 & 0.85 & 0.82 & 0.82 & 0.80 \\ 0.78 & 0.75 & 0.80 & 0.70 & 0.79 & 0.70 \end{bmatrix}$$

$$X_{u_3}=\begin{bmatrix} 1 & 0.95 & 0.95 & 1 & 0.95 & 0.95 \\ 0.75 & 0.80 & 0.77 & 0.83 & 0.85 & 0.85 \\ 0.88 & 0.85 & 0.80 & 0.90 & 0.82 & 0.82 \\ 0.70 & 0.75 & 0.68 & 0.77 & 0.73 & 0.73 \\ 0.82 & 0.78 & 0.85 & 0.65 & 0.80 & 0.80 \\ 0.77 & 0.75 & 0.78 & 0.80 & 0.70 & 0.70 \end{bmatrix}$$

$$X_{u_4}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0.95 \\ 0.95 & 0.90 & 0.88 & 0.92 & 0.95 & 0.85 \\ 0.88 & 0.90 & 0.92 & 0.95 & 0.85 & 0.82 \\ 0.60 & 0.65 & 0.63 & 0.70 & 0.68 & 0.73 \\ 0.88 & 0.90 & 0.92 & 0.85 & 0.95 & 0.80 \\ 0.80 & 0.85 & 0.90 & 0.83 & 0.85 & 0.70 \end{bmatrix}$$

$$X_{u_5}=\begin{bmatrix} 0.85 & 0.90 & 0.88 & 0.92 & 0.86 & 0.95 \\ 0.85 & 0.90 & 0.90 & 0.88 & 0.80 & 0.85 \\ 0.80 & 0.75 & 0.82 & 0.72 & 0.83 & 0.82 \\ 0.95 & 0.95 & 1 & 0.93 & 0.92 & 0.73 \\ 0.65 & 0.60 & 0.75 & 0.70 & 0.68 & 0.80 \\ 0.83 & 0.80 & 0.76 & 0.81 & 0.85 & 0.70 \end{bmatrix}$$

记立体阵

$$X=\begin{bmatrix} X_{u_1} \\ X_{u_2} \\ X_{u_3} \\ X_{u_4} \\ X_{u_5} \end{bmatrix}$$

计算常矩阵与立体阵乘积

$$XZ=\begin{bmatrix} X_{u_1}Z \\ X_{u_2}Z \\ X_{u_3}Z \\ X_{u_4}Z \\ X_{u_5}Z \end{bmatrix}$$

其中

$$Z=\begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.3 & 0.1 & 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}$$

为权重矩阵，这里

$$X_{u_1}Z=\begin{bmatrix}t_{1m_1}\\t_{1m_2}\\t_{1m_3}\\t_{1m_4}\\t_{1m_5}\\t_{1m_6}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.896\\0.851\\0.846\\0.777\\0.84\\0.824\end{bmatrix},\quad X_{u_2}Z=\begin{bmatrix}t_{2m_1}\\t_{2m_2}\\t_{2m_3}\\t_{2m_4}\\t_{2m_5}\\t_{2m_6}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.955\\0.78\\0.785\\0.86\\0.832\\0.761\end{bmatrix},\quad X_{u_3}Z=\begin{bmatrix}t_{3m_1}\\t_{3m_2}\\t_{3m_3}\\t_{3m_4}\\t_{3m_5}\\t_{3m_6}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.96\\0.809\\0.831\\0.718\\0.80\\0.746\end{bmatrix},$$

$$X_{u_4}Z=\begin{bmatrix}t_{4m_1}\\t_{4m_2}\\t_{4m_3}\\t_{4m_4}\\t_{4m_5}\\t_{4m_6}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.99\\0901\\0.844\\0.666\\0.889\\0.828\end{bmatrix},\quad X_{u_5}Z=\begin{bmatrix}t_{5m_1}\\t_{5m_2}\\t_{5m_3}\\t_{5m_4}\\t_{5m_5}\\t_{5m_6}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.893\\0.863\\0.803\\0.915\\0.716\\0.782\end{bmatrix}$$

$$E_i=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}t_{im_i},\quad i=1,2,3,4,5$$

得

$$E_1=0.839,\ E_2=0.828,\ E_3=0.811,\ E_4=0.853,\ E_5=0.829$$

教师水平排序情况 $E_3<E_2<E_5<E_1<E_4$。

对比通常的评价方式，此方法具有对评价专家打分涉及到的各种因素采纳的更全面的特点，不要求舍弃最低分和最高分这种主观意识较强的做法，因此，更能全面地、综合地体现专家的各种想法，使评价更具客观性和真实性。同时，也可根据实际要求更改权重比例，以便更好体现突出重点要素的目标。

## 参考文献


[1] Bate, D.M. and Watts, D.G. (1980) Relative Curvature Measure of Nonlinerity. *Journal of the Royal Statistical Society*: *Series B* (*Methodological*), **42**, 1-16. https://doi.org/10.1111/j.2517-6161.1980.tb01094.x

[2] 王新洲. 非线性模型参数估计理论与应用[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2002.

[3] Tsai, C.L. (1983) Contribution to the Design and Analysis of Nonlinear Models. Ph.D. Thesis, University of Mimesota.

[4] 张利军, 程代展, 李春文. 立体阵的一般结构[J]. 系统科学与数学, 2005, 25(4): 439-450.

[5] 周晓中. 关于立体阵的广义内积及其应用研究[J]. 商丘师范学院学报, 2007, 23(3): 46-48.