

基于分段幂律设计的分布式固定时间优化

马兰兰

新疆大学, 数学与系统科学学院, 新疆 乌鲁木齐

收稿日期: 2022年3月6日; 录用日期: 2022年4月8日; 发布日期: 2022年4月15日

摘要

本文基于幂律算法研究了多智能体系统的固定时间和指定时间优化问题。在成本函数强凸的条件下, 提出一种分段幂律算法, 保证了智能体先达到固定时间一致再实现固定时间优化。此外, 通过设计分段控制协议研究了指定时间优化问题, 其中优化完成时间可以根据实际需求任意指定。最后, 通过两个数值实例验证了所提算法的有效性。

关键词

分布式算法, 多智能体系统, 固定时间优化, 指定时间优化

Distributed Fixed-Time Optimization Based on Piecewise Power-Law Design

Lanlan Ma

College of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang

Received: Mar. 6th, 2022; accepted: Apr. 8th, 2022; published: Apr. 15th, 2022

Abstract

The problem of fixed-time and specified-time optimization of multi-agent systems is investigated in this paper based on power-law algorithms. Under the condition that the cost function is strongly convex, a piecewise power-law algorithm is proposed, which can ensure that the agents reach consensus in a fixed time and then achieve fixed-time optimization. Correspondingly, the problem of specified-time optimization is also studied by designing a piecewise control protocol, in which the optimization time can be arbitrarily specified according to actual requirement. Finally, through two numerical examples, the effectiveness of the proposed algorithms is verified.

Keywords

Distributed Algorithm, Multi-Agent System, Fixed-Time Optimization, Preassigned-Time Optimization

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

近几十年来, 基于多智能体系统框架的分布式优化问题因其在移动机器人协调控制[1]、并行计算的负载均衡[2]、大规模机器学习[3]等问题中的潜在应用而成为一个热门话题并得到了广泛研究。分布式优化问题最初由 Tsitsiklis 等人提出[4], 是指每个智能体在仅已知自己成本函数的情况下, 通过与邻居智能体之间的信息交流, 使得所有智能体协作找到目标函数最小值的过程。当多智能体系统的一致值需要最小化单个智能体已知的局部成本函数之和时, 多智能体系统的一致性问题就变成了分布式优化问题。

无约束的分布式优化算法最早由 Nedic 和 Ozdaglar 提出[5], 其中智能体的通信拓扑图是强连通且有向的, 并且利用次梯度方法来分析优化问题。作为推广, Nedic 等人利用次梯度投影算法研究了具有凸约束的分布式优化问题[6]。在许多实际问题中, 由于疏忽、遗忘或环境干扰, 系统的初始状态难以测量。为了消除初始状态条件的依赖性, 提高收敛速度, Polyakov 首次提出非线性系统固定时间稳定性的概念, 其中停息时间的上界仅取决于系统的参数[7]。最近, Hu 等建立了几个改进的固定时间稳定性条件, 并给出了更精确的收敛时间估计[8]。固定时间分布式优化作为固定时间稳定性的一个重要研究课题, 近年得到了学者们的广泛关注, 相继解决了如何提高优化率, 如何避免优化时间对初始状态的依赖等问题[9] [10] [11]。特别地, Ning 等通过设计基于边的固定时间算法, 研究了多智能体系统的分布式优化问题, 该算法在固定时间内实现了一致, 但优化过程是渐近的[9]。最近, Wang 等通过设计一种分段分布式算法, 在固定时间内解决了优化问题[11]。然而, 文献中并没有验证所设计的控制协议的零梯度和性质, 这对固定时间优化的实现起着至关重要的作用。

需要注意的是, 固定时间算法中优化时间不能完全预先指定, 因为它与系统的参数有关。在一些工程应用和工业控制问题中, 要求系统在预先给定的指定时间内达到预期的性能, 并且不依赖于系统的任何参数或初始值。针对这一问题, Wang 等提出了一种指定时间的分布式控制方法, 分析了多智能体系统的一致性控制和包含控制[12]。但是, 如何提出具有有限控制增益的分布式算法来研究指定时间优化问题仍是一个充满挑战和值得深入研究的课题。

基于上述讨论, 本文将通过设计具有幂律形式的算法来探讨多智能体系统的固定时间和指定时间优化问题, 主要结论包含以下几个方面: 第一, 设计具有幂律形式的固定时间算法, 给出固定时间优化时间估计。第二, 对任意指定的优化时间, 提出指定时间优化算法。与多智能体系统的有限时间优化相比较, 本文的优化时间估计不依赖于初始条件, 可以更好的应用于实际问题中。

本文其余部分安排如下。第 2 节介绍本文的模型、基本定义和引理。第 3 节介绍本文所考虑的分布式固定时间和指定时间优化问题。第 4 节利用数值仿真验证理论结果。第 5 节总结本文的主要结果并介绍未来的研究方向。

符号说明: \mathbb{R} 是实数集, \mathbb{R}^m 是 m -维实空间。上标 T 是实向量。 $0_{n \times m}$ 是 $n \times m$ 维零矩阵, I_m 是 $m \times m$

单位矩阵, $\mathbf{1}_m$ 和 $\mathbf{0}_m$ 分别表示 m -维全 1 向量和 0 向量。符号 $\|z\|$ 表示 $z \in \mathfrak{R}^m$ 的欧几里德范数。 $C^k(U, V)$ 为 U 上的 k 次可微函数, 其中 $U \subset \mathfrak{R}^n$, $V \subset \mathfrak{R}^m$ 对给定的函数 $f(x)$, f^* 表示优化问题中目标函数最优值, x^* 表示最优点, 即 $f^* = f(z^*)$, $\nabla f(z)$ 和 $\nabla^2 f(z)$ 分别表示函数 $f(z)$ 的梯度和 Hessian 矩阵。对于任意的矩阵 A 和 B , $A \otimes B$ 表示它们的 Kronecker 积, $A \geq B$ ($A > B$) 表示 $A - B$ 是一个半正定(正定)矩阵。对 $z \in \mathfrak{R}^m$, $\alpha > 0$, 如果 $z \neq \mathbf{0}_m$, $\text{sig}^\alpha(z) = \text{sign}(z)\|z\|^\alpha$, 否则 $\text{sig}^\alpha(z) = \mathbf{0}_m$ 。记图为 $\mathcal{G} = (\nu, \mathcal{E})$, 其中 $\nu = \{1, 2, \dots, n\}$ 是顶点集, $\mathcal{E} \subseteq \nu \times \nu$ 是边集, 智能体 i 的邻居记为 $\mathcal{N}_i = \{j \in \nu \mid (j, i) \in \mathcal{E}\}$ 。当且仅当 $(j, i) = (i, j) \in \mathcal{E}$, 图 \mathcal{G} 是无向的。在本文中, 图 \mathcal{G} 无自环。 \mathcal{G} 可以用两个矩阵表示: 1) 加权邻居矩阵 $A = [\tau_{ij}]_{n \times n}$, 如果 $(i, j) \in \mathcal{E}$, 则 $\tau_{ij} > 0$, 否则 $\tau_{ij} = 0$; 2) Laplacian 矩阵 $\mathcal{L} = [l_{ij}]_{n \times n}$, 当 $i \neq j$ 时 $l_{ij} = -\tau_{ij}$, 当 $i = j$ 时, $l_{ii} = \sum_{j=1, j \neq i}^n \tau_{ij}$ 。

2. 预备知识

2.1. 模型描述

考虑如下多智能体系统

$$\dot{z}_i(t) = u_i(t), i \in \nu, \tag{1}$$

其中 $z_i = (z_{i1}, z_{i2}, \dots, z_{im})^T \in \mathfrak{R}^m$ 是第 i 个智能体的状态向量, $u_i(t) \in \mathfrak{R}^m$ 是无向图或有向图上的控制算法。第 i 个智能体的初始状态记为 $z_i(0) \in \mathfrak{R}^m$ 。本文将提出一些算法使得所有智能体的状态在固定时间或指定时间内通过协同解决如下无约束凸优化问题

$$f(z) = \sum_{i=1}^n f_i(z), \tag{2}$$

其中 $z \in \mathfrak{R}^m$, $f_i(z)$ 是智能体 i 的局部目标函数, $f(z)$ 是全局目标函数。

2.2. 引理和假设

为了得到主要结果, 下面给出一些定义和引理。

定义 1. [7] [13] 如果存在两个数 $T^*(Z(0)) \geq 0$ 和 T_{\max} 使得

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow T^*} \sum_{i=1, i \neq j}^n \|z_i(t) - z_j(t)\| = 0, \\ \sum_{i=1, i \neq j}^n \|z_i(t) - z_j(t)\| = 0, \forall t \geq T^*, \end{cases}$$

且对于任意初始状态 $Z(0) \in \mathfrak{R}^{nm}$, $T(Z(0)) \leq T_{\max}$, 则称系统(1)达到固定时间一致, 其中

$$T(Z(0)) = \inf \left\{ T^*(Z(0)) \geq 0, \sum_{i=1, i \neq j}^n \|z_i(t) - z_j(t)\| = 0, t \geq T^*(Z(0)) \right\}$$

称为停息时间, $Z = (z_1^T, z_2^T, \dots, z_n^T)^T$ 。此外, 对于指定时间 $T_p > 0$, 如果

$$\sum_{i=1, i \neq j}^n \|z_i(t) - z_j(t)\| = 0, \forall t \geq T_p,$$

则称系统(1)实现指定时间一致。

定义 2. [7] [13] 若存在一个与系统或控制参数有关的数 $\hat{T} > 0$ 使得对任意初始状态 $Z(0) \in \mathfrak{R}^{nm}$, 有

$$\lim_{t \rightarrow \hat{T}} \sum_{i=1}^n \|z_i(t) - z^*\| = 0, \sum_{i=1}^n \|z_i(t) - z^*\| = 0, t \geq \hat{T},$$

则称优化问题(2)实现了固定时间优化, 其中 z^* 是最优点。进一步, 对于指定时间 \hat{T}_p , 若对任意初始值 $Z(0)$ 有

$$\lim_{t \rightarrow \hat{T}_p} \sum_{i=1}^n \|z_i(t) - z^*\| = 0, \sum_{i=1}^n \|z_i(t) - z^*\| = 0, t \geq \hat{T}_p,$$

那么称问题(2)实现指定时间优化。

定义 3. [14] [15] 令 $D \subset \mathfrak{R}^n$ 是一个凸紧集, 若存在 $\rho > 0$ 使得如下任意一个不等式成立:

$$\begin{cases} f(y) - f(z) - (\nabla f(z))^T (y - z) \geq \frac{\rho}{2} \|z - y\|^2, \\ (\nabla f(y) - \nabla f(z))^T (y - z) \geq \rho \|y - z\|^2, \\ \nabla^2 f(z) \geq \rho I_m, z, y \in D, \end{cases} \quad (3)$$

则称 $f \in C^2(D, \mathfrak{R})$ 是 ρ -强凸的。

引理 1. [11] 若 $f(x) \in C^2(\mathfrak{R}^m, \mathfrak{R})$ 是 ρ -强凸的, 则存在唯一 $z^* \in \mathfrak{R}^m$ 满足 $f(z^*) = \min_{z \in \mathfrak{R}^m} f(z)$ 和 $\nabla f(z^*) = 0_m$ 。

引理 2. [16] 对于加权无向连通图, 记其 Laplacian 矩阵 \mathcal{L} 的特征值为 $0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$, 则

$$z^T (\mathcal{L} \otimes \Gamma) z \geq \lambda_2 (\mathcal{L}) z^T (I_n \otimes \Gamma) z$$

其中 $z = (z_1^T, \dots, z_n^T)^T \in \mathfrak{R}^{nm}$ 满足 $\sum_{i=1}^n z_i = 0$, $z_i \in \mathfrak{R}^m$, $\Gamma \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ 是一个半正定矩阵。

引理 3. [17] 记无权完全图 $\bar{\mathcal{G}}$ 的 Laplacian 矩阵为 $\mathcal{L}_{\bar{\mathcal{G}}} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ 。对于无向连通拓扑图 \mathcal{G} , 其 Laplacian 矩阵 $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}$ 满足 $\lambda_2(\mathcal{L}_{\mathcal{G}}) \mathcal{L}_{\bar{\mathcal{G}}} \leq n \mathcal{L}_{\mathcal{G}}$, 则

$$\lambda_2(\mathcal{L}_{\mathcal{G}}) z^T (\mathcal{L}_{\bar{\mathcal{G}}} \otimes I_m) z \leq n z^T (\mathcal{L}_{\mathcal{G}} \otimes I_m) z, \forall z \in \mathfrak{R}^{nm}.$$

引理 4. [18] 对任意的 $\sigma \in \nu$, 若 $\xi_\sigma \geq 0$, $0 \leq b \leq 1$, $d > 1$, 则

$$\sum_{\sigma=1}^n \xi_\sigma^b \geq \left(\sum_{\sigma=1}^n \xi_\sigma \right)^b, \sum_{\sigma=1}^n \xi_\sigma^d \geq n^{1-d} \left(\sum_{\sigma=1}^n \xi_\sigma \right)^d.$$

引理 5. [19] 若存在一个正定且径向无界函数 $V(z): \mathfrak{R}^m \rightarrow \mathfrak{R}^+$ 使得

$$\frac{d}{dt} V(z(t)) \leq -\alpha V^\gamma(z(t)) - \beta V^\mu(z(t)), z(t) \in \mathfrak{R}^m \setminus \{0\},$$

其中 $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\mu > 1$, $0 < \gamma < 1$, 则 $\dot{z} = f(z)$, $f(0) = 0$ 的系统的原点固定时间稳定, 且停息时间 $T(z(0))$ 估计为,

$$T(z(0)) \leq T = \frac{\pi}{(\mu - \gamma)\alpha} \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^\varepsilon \csc(\varepsilon\pi),$$

其中 $\varepsilon = \frac{1 - \gamma}{\mu - \gamma}$ 。

假设 1. 系统(1)中的图 \mathcal{G} 是无向连通的。

假设 2. 全局成本函数 $f(x)$ 是 ρ -强凸的。

3. 主要结果及证明

我们首先考虑拓扑图上每个智能体的成本函数已知的。相应地，我们给出下面的记号。

令 $\mathcal{L}_A = [L_{ij}^A]_{n \times n}$ 和 $\mathcal{L}_B = [L_{ij}^B]_{n \times n}$ 分别表示权重为 $\tau_{ij}^{\frac{2}{1+\alpha_1}}$ 和 $\tau_{ij}^{\frac{2}{1+\beta_1}}$ 的图 \mathcal{G}_A 和 \mathcal{G}_B 的 Laplace 矩阵，其中

$$L_{ij}^A = \begin{cases} -\tau_{ij}^{\frac{2}{1+\alpha_1}}, & i \neq j, \\ \sum_{i=1, i \neq j}^n \tau_{ij}^{\frac{2}{1+\alpha_1}}, & i = j, \end{cases}$$

$$L_{ij}^B = \begin{cases} -\tau_{ij}^{\frac{2}{1+\beta_1}}, & i \neq j, \\ \sum_{i=1, i \neq j}^n \tau_{ij}^{\frac{2}{1+\beta_1}}, & i = j. \end{cases}$$

定理 1. 基于假设 1 和假设 2，设计如下的分段幂律算法通过分段幂律算法，

$$u_i(t) = \begin{cases} -k_1 \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \tau_{ij} \text{sig}^{\alpha_1}(z_i(t) - z_j(t)) - k_2 \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \tau_{ij} \text{sig}^{\beta_1}(z_i(t) - z_j(t)), & t \in [0, T_1], \\ -c_1 \text{sig}^{\alpha_2}(\nabla f(z_i(t))) - c_2 \text{sig}^{\beta_2}(\nabla f(z_i(t))), & t \in (T_1, +\infty), \end{cases} \quad (4)$$

其中控制增益 $k_1, k_2 > 0$ ， $c_1, c_2 > 0$ ，幂律参数 $0 < \alpha_1 < 1$ ， $\beta_1 > 1$ ， $0 < \alpha_2 < 1$ ， $\beta_2 > 1$ ，则优化问题(2)可以在时间 $\hat{T}_1 = T_1 + T_2$ 内完成，且

$$T_1 = \frac{\pi}{k_1 (\lambda_2(\mathcal{L}_A))^{\frac{\alpha_1+1}{2}} (\beta_1 - \alpha_1)} \csc\left(\frac{1-\alpha_1}{\beta_1 - \alpha_1} \pi\right) \times \left(\frac{k_1 (\lambda_2(\mathcal{L}_A))^{\frac{\alpha_1+1}{2}}}{k_2 (n(n-1))^{\frac{1-\beta_1}{2}} (\lambda_2(\mathcal{L}_B))^{\frac{\beta_1+1}{2}}} \right)^{\frac{1-\alpha_1}{\beta_1 - \alpha_1}},$$

$$T_2 = \frac{\pi}{c_1 \rho(\beta_2 - \alpha_2)} \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{\frac{1-\alpha_2}{\beta_2 - \alpha_2}} \csc\left(\frac{1-\alpha_2}{\beta_2 - \alpha_2} \pi\right).$$

证明: 显然，对任意的 $t \in [0, T_1]$ ，闭环系统(2)在控制器(4)下可改写为

$$\dot{z}_i(t) = -k_1 \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \tau_{ij} \text{sig}^{\alpha_1}(z_i(t) - z_j(t)) - k_2 \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \tau_{ij} \text{sig}^{\beta_1}(z_i(t) - z_j(t)), i \in \mathcal{V}.$$

定义

$$\begin{cases} e_i(t) = z_i(t) - \bar{z}(t), e(t) = (e_1^T(t), \dots, e_n^T(t))^T, \\ \bar{z}(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n z_j(t), \end{cases} \quad (5)$$

那么

$$\dot{e}_i(t) = -k_1 \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \tau_{ij} \text{sig}^{\alpha_1}(z_i(t) - z_j(t)) - k_2 \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \tau_{ij} \text{sig}^{\beta_1}(z_i(t) - z_j(t)) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \dot{z}_j(t), i \in \mathcal{V}.$$

构造 Lyapunov 函数

$$V_1(e(t)) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n e_i^T(t) e_i(t).$$

对任意的 $e(t) \in \mathfrak{R}^{nm} \setminus \{0^{nm}\}$,

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(e(t)) &= \sum_{i=1}^n e_i^T \dot{e}_i(t) \\ &= -k_1 \sum_{i=1}^n \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \tau_{ij} e_i^T(t) \operatorname{sig}^{\alpha_1}(z_i(t) - z_j(t)) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n e_i^T(t) \dot{z}_j(t) \\ &\quad - k_2 \sum_{i=1}^n \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \tau_{ij} e_i^T(t) \operatorname{sig}^{\beta_1}(z_i(t) - z_j(t)). \end{aligned}$$

根据(5)式, $\sum_{i=1}^n e_i(t) = 0$ 且

$$-\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n e_i^T(t) \dot{z}_j(t) = -\frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n e_i(t) \right)^T \left(\sum_{j=1}^n \dot{z}_j(t) \right) = 0.$$

利用引理 4, 且 $0 < \frac{1+\alpha_1}{2} < 1$, $\frac{1+\beta_1}{2} > 1$,

$$\begin{aligned} &-k_1 \sum_{i=1}^n \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \tau_{ij} e_i^T(t) \operatorname{sig}^{\alpha_1}(z_i(t) - z_j(t)) \\ &= -k_1 \sum_{i=1}^n \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \tau_{ij} e_i^T(t) \operatorname{sig}^{\alpha_1}(e_i(t) - e_j(t)) \\ &= -\frac{k_1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \tau_{ij} (e_i(t) - e_j(t))^T \operatorname{sig}^{\alpha_1}(e_i(t) - e_j(t)) \\ &= -\frac{k_1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \tau_{ij} \|e_i(t) - e_j(t)\|^{\alpha_1+1} \\ &\leq -\frac{k_1}{2} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \tau_{ij}^{\frac{2}{1+\alpha_1}} \|e_i(t) - e_j(t)\|^2 \right)^{\frac{\alpha_1+1}{2}}. \end{aligned}$$

类似地,

$$\begin{aligned} &-k_2 \sum_{i=1}^n \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \tau_{ij} e_i^T(t) \operatorname{sig}^{\beta_1}(z_i(t) - z_j(t)) \\ &\leq -\frac{k_2}{2} (n(n-1))^{\frac{1-\beta_1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \tau_{ij}^{\frac{2}{1+\beta_1}} \|e_i(t) - e_j(t)\|^2 \right)^{\frac{\beta_1+1}{2}}. \end{aligned}$$

结合引理 2,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \tau_{ij}^{\frac{2}{1+\alpha_1}} \|e_i(t) - e_j(t)\|^2 = 2e^T(t) (\mathcal{L}_A \otimes I_m) e(t) \geq 2\lambda_2(\mathcal{L}_A) e^T(t) e(t),$$

和

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \tau_{ij}^{\frac{2}{1+\beta_1}} \|e_i(t) - e_j(t)\|^2 = 2e^T(t) (\mathcal{L}_B \otimes I_m) e(t) \geq 2\lambda_2(\mathcal{L}_B) e^T(t) e(t).$$

因此, 对任意的 $e(t) \in \mathfrak{R}^{nm} \setminus \{0^{nm}\}$,

$$\dot{V}_1(e(t)) \leq -\frac{k_1}{2} (4\lambda_2(\mathcal{L}_A))^{\frac{\alpha_1+1}{2}} V_1(e(t))^{\frac{\alpha_1+1}{2}} - \frac{k_2}{2} (n(n-1))^{\frac{1-\beta_1}{2}} (4\lambda_2(\mathcal{L}_B))^{\frac{\beta_1+1}{2}} V_1(e(t))^{\frac{\beta_1+1}{2}}.$$

利用引理 5, 系统(1)可以在固定时间 T_1 内达到一致, 且对任意的 $i \in \nu$ 和 $t \geq T_1$ 都有 $z_i(t) = \bar{z}(t)$ 成立。

下面证明对所有的 $t \geq T_1 + T_2$, $\lim_{t \rightarrow T_1+T_2} \bar{z}(t) = z^*$ 和 $\bar{z}(t) = z^*$ 都成立。

对于 $t \geq T_1$, $\hat{z}(t) = \bar{z}(t) - z^*$,

$$\hat{f}(t) = f(\hat{z}(t)) = f(\bar{z}(t)) - f(z^*) = f(\hat{z}(t) + z^*) - f(z^*).$$

根据系统(1)和算法(4)的第二部分,

$$\dot{\hat{z}}(t) = -c_1 \text{sig}^{\alpha_2}(\nabla \hat{f}(t)) - c_2 \text{sig}^{\beta_2}(\nabla \hat{f}(t)). \tag{6}$$

构造 Lyapunov 函数:

$$V_2(\hat{z}(t)) = \frac{1}{2} \|\nabla \hat{f}(t)\|^2.$$

根据假设 2,

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(\hat{z}(t)) &= (\nabla \hat{f}(t))^T \nabla^2 \hat{f}(t) \left[-c_1 \text{sig}^{\alpha_2}(\nabla \hat{f}(t)) - c_2 \text{sig}^{\beta_2}(\nabla \hat{f}(t)) \right] \\ &\leq -\rho c_1 \|\nabla \hat{f}(t)\|^{\alpha_2+1} - \rho c_2 \|\nabla \hat{f}(t)\|^{\beta_2+1} \\ &= -\rho c_1 2^{\frac{\alpha_2+1}{2}} V_2(\hat{z}(t))^{\frac{\alpha_2+1}{2}} - \rho c_2 2^{\frac{\beta_2+1}{2}} V_2(\hat{z}(t))^{\frac{\beta_2+1}{2}}. \end{aligned}$$

根据引理 5, 在时间 $T_1 + T_2$ 内, $\bar{z}(t) \rightarrow z^*$. 因此, 基于算法(4), 在时间 $\hat{T}_1 = T_1 + T_2$ 内优化问题(2)可以被解决。

证毕。

注 1. 基于多智能体系统的分布式优化问题在[9]中已经有所研究, 证明了多智能体系统可以在固定时间内实现一致性, 然而固定时间实现优化没有实现。不同于上述结果, 本文设计的算法(4)不仅可以在固定时间内实现一致还可以解决优化问题, 这从本质上解决了上述问题。

为了研究系统(1)的分布式指定时间优化, 我们提出如下的分段幂律算法:

$$u_i(t) = \begin{cases} -\frac{T_1}{\sigma T_p} \left(k_1 \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \tau_{ij} \text{sig}^{\alpha_1}(z_i(t) - z_j(t)) k_2 \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \tau_{ij} \text{sig}^{\beta_1}(z_i(t) - z_j(t)) \right), t \in [0, \sigma T_p], \\ -\frac{T_2}{(1-\sigma)T_p} (c_1 \text{sig}^{\alpha_2}(\nabla f(z_i(t))) c_2 \text{sig}^{\beta_2}(\nabla f(z_i(t))))), t \in (\sigma T_p, +\infty), \end{cases} \tag{7}$$

其中 $0 < \sigma < 1$, 其它参数的定义和定理 1 中相同, $T_p > 0$ 是指定时间。

定理 2. 基于假设 1, 假设 2 和控制协议(7), 问题(2)可以在指定时间 T_p 内实现优化。

证明: 类似于定理 1 中的证明, 对任意的 $e(t) \in \mathfrak{R}^{nm} \setminus \{0^{nm}\}$, 下式成立

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(z(t)) &\leq -\frac{k_1}{2} \frac{T_1}{\sigma T_p} (4\lambda_2(\mathcal{L}_A))^{\frac{\alpha_1+1}{2}} V_1(e(t))^{\frac{\alpha_1+1}{2}} \\ &\quad - \frac{k_2}{2} \frac{T_1}{\sigma T_p} (n(n-1))^{\frac{1-\beta_1}{2}} (4\lambda_2(\mathcal{L}_B))^{\frac{\beta_1+1}{2}} V_1(e(t))^{\frac{\beta_1+1}{2}}. \end{aligned}$$

根据引理 5, 问题(2)实现了有限时间实现一致, 且时间可以估计为

$$T'_1 = \frac{\pi\sigma T_p}{k_1(\lambda_2(\mathcal{L}_A))^{\frac{\alpha_1+1}{2}}(\beta_1-\alpha_1)T_1} \operatorname{csc}\left(\frac{1-\alpha_1}{\beta_1-\alpha_1}\pi\right) \times \left(\frac{k_1(\lambda_2(\mathcal{L}_A))^{\frac{\alpha_1+1}{2}}}{k_2(n(n-1))^{\frac{1-\beta_1}{2}}(\lambda_2(\mathcal{L}_B))^{\frac{\beta_1+1}{2}}}\right)^{\frac{1-\alpha_1}{\beta_1-\alpha_1}} = \sigma T_p.$$

对 $t \geq T'_1$, 令 $V_2(\hat{z}(t)) = \frac{1}{2}\|\nabla f(t)\|^2$, 因此

$$\dot{V}_2(\hat{z}(t)) \leq -c_1\theta \frac{T_2}{(1-\sigma)T_p} 2^{\frac{\alpha_2+1}{2}} V_2(\hat{z}(t))^{\frac{\alpha_2+1}{2}} - c_2\theta \frac{T_2}{(1-\sigma)T_p} 2^{\frac{\beta_2+1}{2}} V_2(\hat{z}(t))^{\frac{\beta_2+1}{2}}.$$

根据引理 5, 在时间 T'_2 内 $\hat{z}(t) \rightarrow 0$, 其中

$$T'_2 = \frac{\pi(1-\sigma)T_p}{c_1\theta(\beta_2-\alpha_2)T_2} \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{\frac{1-\alpha_2}{\beta_2-\alpha_2}} \operatorname{csc}\left(\frac{1-\alpha_2}{\beta_2-\alpha_2}\pi\right) = (1-\sigma)T_p.$$

因此, 在算法(7)下优化问题(2)可以在时间 $\hat{T}_2 = T'_1 + T'_2$ 内被解决。

证毕。

注 2. 目前, 基于多智能体系统的渐近、有限时间和固定时间优化问题已经被广泛研究[11] [17] [19]。然而, 据我们所知, 指定时间优化问题还没有被研究。基于文献[13]给出的指定时间稳定性的工作, 我们提出了分段算法(7)来实现指定时间优化, 这一指定时间协议改进了以前具有无限控制增益的协议, 有效地避免了在固定时间优化中频繁调整控制参数的问题, 从而可以在理想时间达到最优。

注 3. 与[19]中研究的有限时间优化问题不同, 本文提出的固定时间和指定时间优化算法允许多智能体系统中的每个智能体初始值可以任意选择, 这也证明了我们的算法具有更好的鲁棒性和实用性。

4. 数值模拟

考虑图 1 所示的具有 5 个节点的无向图, 其中每个智能体对应的局部成本函数为

$$f_i(z) = \frac{1}{2}(z_1 - i)^2 + \frac{4}{5}(z_2 + i)^2, \quad i = 1, 2, \dots, 5,$$

其中 $z = (z_1, z_2)^T$ 。本节考虑如下的优化问题

$$\min f(z) = \sum_{i=1}^5 \left(\frac{1}{2}(z_1 - i)^2 + \frac{4}{5}(z_2 + i)^2 \right).$$

通过计算, $\rho = 0.8$ 函数 $f(z^*) = 13$ 在 $z^* = (3, -3)^T$ 处取得最优值。在下面的数值模拟中, 系统(1)的初始值 $(z_{i1}, z_{i2})^T$ 在范围 $[-3, 3]$ 内随机选择。

例 1. 首先, 基于算法(5)考虑固定时间优化问题。通过计算, $\lambda_2(\mathcal{L}_A) = 1.7662$, $\lambda_2(\mathcal{L}_B) = 1.8949$ 。选择 $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.4$, $\beta_1 = \beta_2 = 1.5$, $k_1 = k_2 = 6$, $c_1 = c_2 = 6$ 。根据定理 1, 优化问题在时间 $\hat{T}_1 = 1.1876$ 内被解决。相应的数值模拟结果在图 2~4 中, 系统(1)随时间的变化在图 2, 成本函数 $f(x)$ 和状态变量的演化分别见图 3 和图 4。

例 2. 与例 1 中条件相同, 我们考虑指定时间优化问题。在算法(7)中, 设计参数和例 1 中的相同, 并且令 $\sigma = 0.6$, 优化问题的完成时间指定为 $T_p = 0.8$ 。根据定理 2, 优化问题在指定时间 $T_p = 0.8$ 内完成, 如图 5~7 所示。

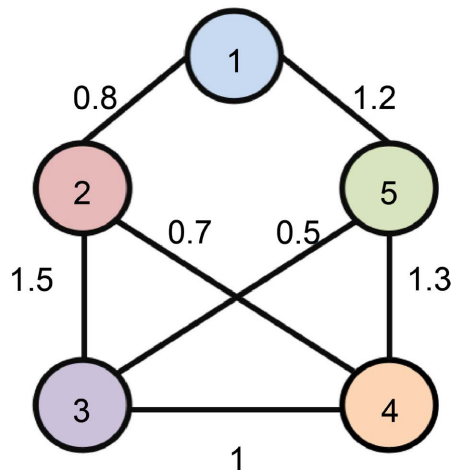


Figure 1. Topological structure of system (1)
图 1. 系统(1)的拓扑结构

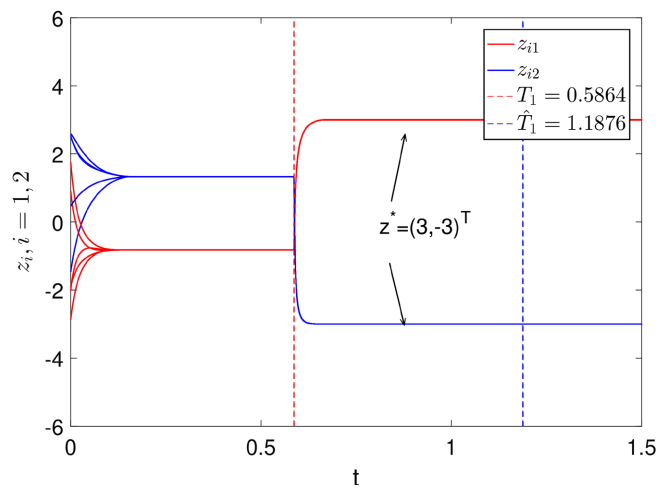


Figure 2. The trajectory of system (1) based on algorithm (4)
图 2. 基于算法(4)系统(1)的轨迹

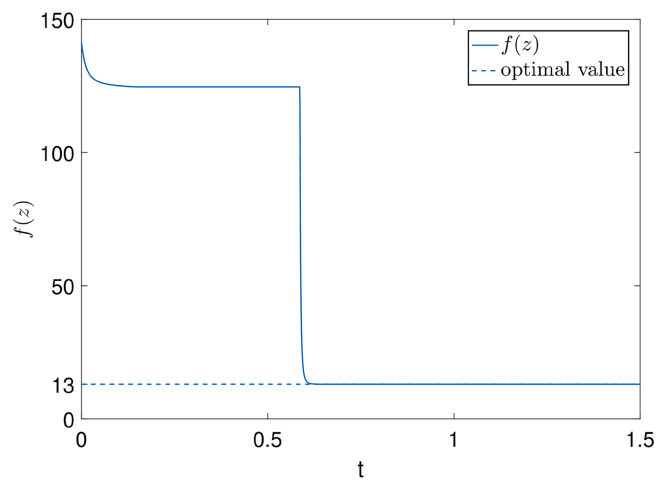


Figure 3. The evolution of global cost function under algorithm (4)
图 3. 基于算法(4)全局成本函数的变化轨迹

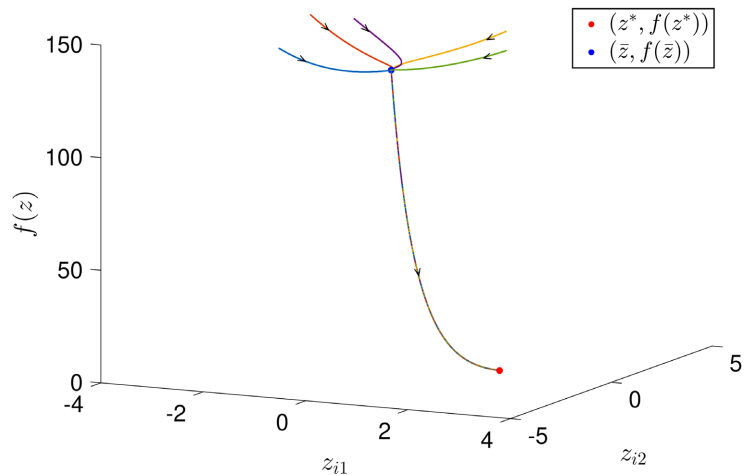


Figure 4. The evolution of global cost function with state variables under algorithm (4)
图 4. 基于算法(4)全局成本函数随状态变量的轨迹

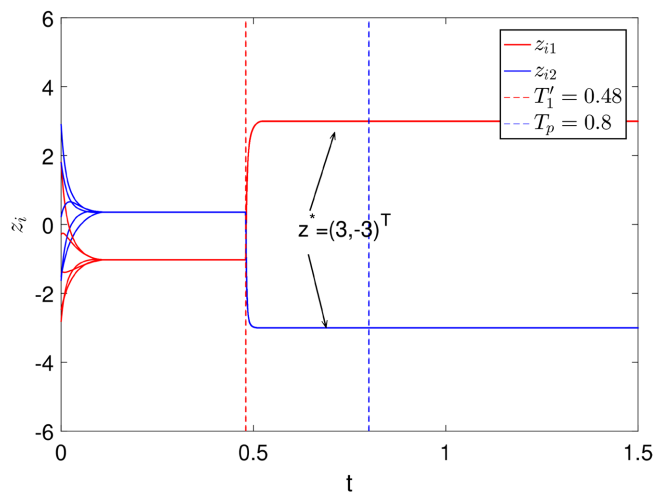


Figure 5. The trajectory of system (1) based on algorithm (7)
图 5. 基于算法(7)系统(1)的轨迹

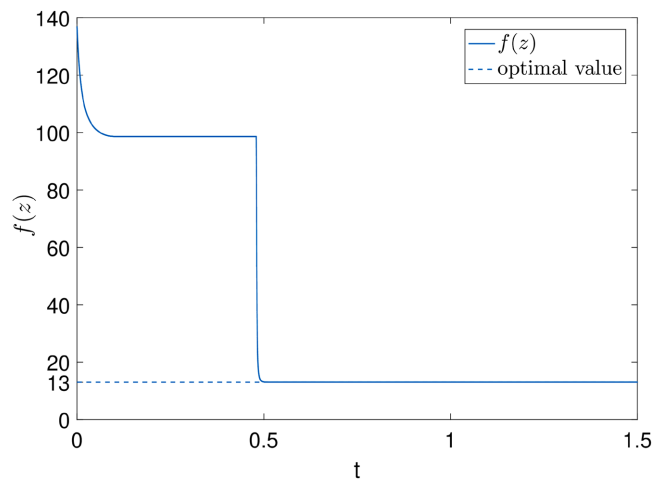


Figure 6. The evolution of global cost function under algorithm (7)
图 6. 基于算法(7)全局成本函数的变化轨迹

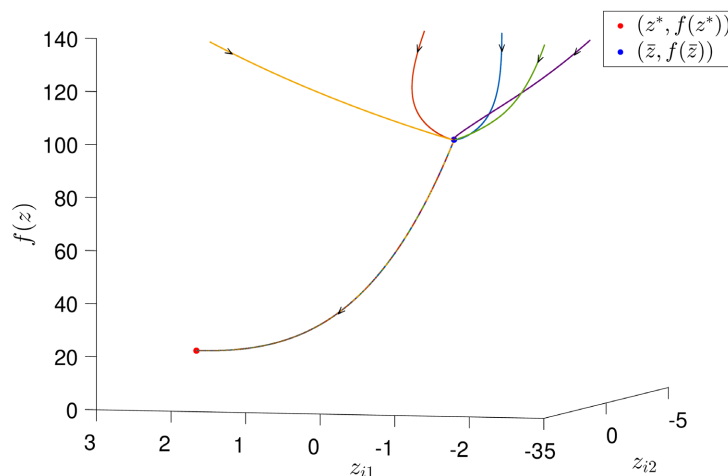


Figure 7. The evolution of global cost function with state variables under algorithm (7)
图 7. 基于算法(4)全局成本函数随状态变量的轨迹

5. 结论

通过设计分布式分段幂律控制协议, 利用 Lyapunov 稳定性理论、图理论和零梯度和性质研究了多智能体系统的固定时间和指定时间优化问题。证明了在我们提出的算法下智能体可以在固定时间内先达到一致再实现优化。此外, 还提出了控制增益有限的分段幂律算法, 实现了多智能体系统的时间预分配优化, 保证了在规定的时间内能够提前达到优化。有效地避免了在多智能体系统中频繁地调整控制参数, 且能在期望时间内达到最优。本文的方法还可以进一步拓展到具有有向拓扑结构的多智能体系统的固定时间和指定时间优化问题。此外, 基于切换拓扑且有时滞的多智能体系统的优化问题也值得我们在未来工作中进一步探讨。

参考文献

- [1] Kashyap, A., Basar, T. and Srikant, R. (2007) Quantized Consensus. *Automatica*, **43**, 1192-1203. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2007.01.002>
- [2] Jadbabaie, A., Lin, J. and Morse, A.S. (2003) Coordination of Groups of Mobile Autonomous Agents Using Nearest Neighbor Rules. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **48**, 988-1001. <https://doi.org/10.1109/TAC.2003.812781>
- [3] Boyd, S., Parikh, N., Chu, E., Peleato, B. and Eckstein, J. (2011) Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers. *Foundations and Trends in Machine Learning*, **3**, 1-122. <https://doi.org/10.1561/22000000016>
- [4] Tsitsiklis, J., Bertsekas, D. and Athans, M. (1986) Distributed Asynchronous Deterministic and Stochastic Gradient Optimization Algorithms. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **31**, 803-812. <https://doi.org/10.1109/TAC.1986.1104412>
- [5] Nedic, A. and Ozdaglar, A. (2009) Distributed Subgradient Methods for Multi-Agent Optimization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **54**, 48-61. <https://doi.org/10.1109/TAC.2008.2009515>
- [6] Nedic, A., Ozdaglar, A. and Parrilo, P.A. (2010) Constrained Consensus and Optimization in Multi-Agent Networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **55**, 922-938. <https://doi.org/10.1109/TAC.2010.2041686>
- [7] Polyakov, A. (2012) Nonlinear Feedback Design for Fixed-Time Stabilization of Linear Control Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **57**, 2106-2110. <https://doi.org/10.1109/TAC.2011.2179869>
- [8] Hu, C., Yu, J., Chen, Z.H., Jiang, H.J. and Huang, T.W. (2017) Fixed-Time Stability of Dynamical Systems and Fixed-Time Synchronization of Coupled Discontinuous Neural Networks. *Neural Networks*, **89**, 74-83. <https://doi.org/10.1016/j.neunet.2017.02.001>
- [9] Ning, B.D., Han, Q.L. and Zuo, Z.Y. (2019) Distributed Optimization for Multiagent Systems: An Edge-Based Fixed-Time Consensus Approach. *IEEE Transactions on Cybernetics*, **49**, 122-132.

-
- <https://doi.org/10.1109/TCYB.2017.2766762>
- [10] Chen, G. and Li, Z.Y. (2018) A Fixed-Time Convergent Algorithm for Distributed Convex Optimization in Multi-Agent Systems. *Automatica*, **95**, 539-543. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2018.05.032>
- [11] Wang, X.Y., Wang, G.D. and Li, S.H. (2020) A Distributed Fixed-Time Optimization Algorithm for Multi-Agent Systems. *Automatica*, **122**, Article No. 109289. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2020.109289>
- [12] Wang, Y.J., Song, Y.D., Hill, J.D. and Kristic, M. (2019) Prescribed-Time Consensus and Containment Control of Networked Multiagent Systems. *IEEE Transactions on Cybernetics*, **49**, 1138-1147. <https://doi.org/10.1109/TCYB.2017.2788874>
- [13] Hu, C., He, H.B. and Jiang, H.J. (2021) Fixed/Preassigned-Time Synchronization of Complex Networks via Improving Fixed-Time Stability. *IEEE Transactions on Cybernetics*, **51**, 2882-2892. <https://doi.org/10.1109/TCYB.2020.2977934>
- [14] Boyd, S. and Vandenberghe, L. (2004) Convex Optimization. Cambridge University Press, New York. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511804441>
- [15] Nesterov, Y. (2004) Introductory Lectures on Convex Optimization: A Basic Course. Springer-Verlag, New York.
- [16] Qin, J., Gao, H. and Zheng, W.X. (2014) Exponential Synchronization of Complex Networks of Linear Systems and Nonlinear Oscillators: A Unified Analysis. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, **26**, 510-521. <https://doi.org/10.1109/TNNLS.2014.2316245>
- [17] Lu, J. and Tang, C.Y. (2012) Zero-Gradient-Sum Algorithms for Distributed Convex Optimization: The Continuous-Time Case. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **57**, 2348-2354. <https://doi.org/10.1109/TAC.2012.2184199>
- [18] Hardy, G., Littlewood, J. and Polya, G. (1952) Inequalities. Cambridge University Press, Cambridge.
- [19] Feng, Z., Hu, G.Q. and Cassandras, C.G. (2020) Finite-Time Distributed Convex Optimization for Continuous-Time Multiagent Systems with Disturbance Rejection. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, **7**, 686-698. <https://doi.org/10.1109/TCNS.2019.2939642>