Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(4), 532-539
Published Online April 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.124059

Hans汉斯

复矩阵的上三角化

刘思彤，贾思怡*，李 然

辽宁师范大学，数学学院，辽宁 大连

收稿日期：2022年3月5日；录用日期：2022年4月7日；发布日期：2022年4月14日

摘 要

本文主要研究复矩阵的上三角化问题。通过酉矩阵自身的定义以及矩阵的每个位置构造酉矩阵，再根据该矩阵的两个不同酉矩阵，构造出一列酉矩阵，使得任意复矩阵在这组酉矩阵下酉等价于不同的上三角矩阵。

关键词

复矩阵，酉矩阵，酉等价

Upper Triangulation of Complex Matrices

Sitong Liu, Siyi Jia*, Ran Li

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Mar. 5th, 2022; accepted: Apr. 7th, 2022; published: Apr. 14th, 2022

Abstract

In this paper, the problem of upper triangulation of complex matrices is studied. Through the definition of unitary matrix itself and each position of the unitary matrix, a series of unitary matrices are constructed according to two different unitary matrices of the unitary matrix, so that any complex matrix under these unitary matrices is unitarily equivalent to the upper triangular matrix.

Keywords

Complex Matrix, Unitary Matrix, Unitary Equivalence

*通讯作者。

文章引用: 刘思彤, 贾思怡, 李然. 复矩阵的上三角化[J]. 理论数学, 2022, 12(4): 532-539.
DOI: 10.12677/pm.2022.124059

1. 引言

矩阵是研究物理模型的重要工具。矩阵在电路学、力学、光学和量子物理中都有应用。计算机科学中，三维动画制作也需要用到矩阵。矩阵的运算是数值分析领域的重要问题，我们常将一般的矩阵转化为特殊的形式，如转化为阶梯形矩阵、上三角矩阵等，以简化计算。对于矩阵上三角化，在高等代数和线性代数中已经介绍了几种方法。这里做一些简单的回顾。对于一般的分块矩阵，可以通过分块初等矩阵将其化为上三角矩阵，只要分块乘法能进行，就可以对分块矩阵进行相应的初等变换。如当矩阵 A 可逆时，可以对

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

进行初等变换将其变为上三角矩阵，具体方法如下：

$$\begin{pmatrix} E_m & 0 \\ -CA^{-1} & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix},$$

其中 E_m, E_n 分别是 m,n 阶单位矩阵。

另一种将矩阵上三角化的方法就是实对称矩阵对角化。具体步骤如下：

1) 求出 A 的特征值，设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_t$ 是 A 的全部不同特征值。

2) 对于每个 λ_i，解齐次线性方程组

$$(\lambda_i E-A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=0,$$

并求出一个基础解系，这就是 A 的特征子空间 V_{λ_i} 的一组基。将该组基进行施密特正交化，再进行单位化，得到一组标准正交基 $\eta_{i1},\cdots,\eta_{ik_i}$。

3) 因为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_t$ 两两不同，向量组 $\eta_{11},\cdots,\eta_{1k_1},\cdots,\eta_{r1},\cdots,\eta_{rk_r}$ 是两两正交的，它们的个数等于空间的维数。因此，它们构成 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基，且是 A 的特征向量。由此得到了正交矩阵 T。

因为对角矩阵是一种特殊的上三角矩阵，所以该方法也可以将矩阵化为上三角矩阵。

此外，复正规矩阵可以酉对角化[1]。文献[2] [3] [4]指出 Hermite 矩阵属于正规矩阵，并研究了其在插值问题中的应用。文献[5]给出了正规矩阵可以对角化，且对角阵的对角元素为该正规矩阵特征值的结论。

而什么样的矩阵可以对角化呢?我们在文献[6] [7]中整理出六种方法。对于 n 维复线性空间 V 上的线性变换 φ：

1) φ 可对角化的充要条件是 φ 有 n 个线性无关的特征向量。

2) 若 φ 有个不同的特征值，则 φ 可对角化。

3) φ 可对角化的充要条件是 V 是 φ 的特征子空间的直和。

4) φ 可对角化的充要条件是 φ 有完全的特征向量系，即对 φ 的任一特征值，其几何重数等于代数重数。

5) φ 可对角化的充要条件是 φ 的极小多项式无重根。

6) φ 可对角化的充要条件是 φ 的 Jordan 块都是一阶的，或等价地，φ 的初等因子都是一次多项式。

矩阵可对角化问题是矩阵理论中的一个基本问题。在以往关于矩阵可对角化的判定条件的基础上，利用矩阵可以对角化的判定，以及求矩阵的线性无关的特征向量完全可以归纳为矩阵乘法的原理，使得矩阵的特征值与特征向量同步求解，从而得出矩阵可对角化更为直接的简单判定[8]。

以上我们讨论了矩阵上三角化或对角化的几种方法。更一般地，对于复矩阵，如何将其上三角化和公式化。本文首先根据上三角矩阵中第一列性质得到上三角矩阵对角线第一个位置是原 2×2 复矩阵的特征值，其对应的特征向量单位化便是对应酉矩阵的第一列，然后根据酉矩阵的定义 $UU^*=U^*U=I$，得到酉矩阵的两个列向量是单位向量且两向量正交，这样我们得到了酉矩阵列向量需要满足的三个条件，同理行向量也需要满足三个条件。最后根据条件构造出该矩阵的两个酉矩阵，通过酉矩阵相乘构造出一列酉矩阵，使得任意 2×2 复矩阵在这组酉矩阵下酉等价于上三角矩阵。

2. 任意 2 × 2 矩阵可以酉等价于上三角矩阵

定理 1： 对于复矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，$c\neq 0$，存在酉矩阵 $U=\begin{pmatrix} \frac{m}{\sqrt{|m|^2+1}} & -\frac{1}{\sqrt{|m|^2+1}} \\ \frac{1}{\sqrt{|m|^2+1}} & \frac{\bar{m}}{\sqrt{|m|^2+1}} \end{pmatrix}$，其中 $m=\dfrac{a-d+\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2c}$，使得 U^*AU 是上三角矩阵。

证明：设任意复矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

我们构造酉矩阵 U，使得

$$AU=UB,$$

其中

$$B=\begin{pmatrix} e & f \\ 0 & g \end{pmatrix}.$$

设

$$U=(\alpha_1 \quad \alpha_2),$$

其中 α_1,α_2 均为单位向量。

则由 U 为酉矩阵可知，

$$U^*U=\begin{pmatrix} \overline{\alpha}_1 \\ \overline{\alpha}_2 \end{pmatrix}(\alpha_1 \quad \alpha_2)=I,$$

即

$$\alpha_1\overline{\alpha}_1=\alpha_2\overline{\alpha}_2=1,$$
$$\alpha_1\overline{\alpha}_2=\alpha_2\overline{\alpha}_1=0,$$

故得到 α_1,α_2 均为单位向量，且 $\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle=0$。

又因为

$$UU^*=I,$$

故设

$$U=\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix},$$

则同理可得η_1,η_2均为单位向量，且$\langle\eta_1,\eta_2\rangle=0$。

将$U=(\alpha_1\quad\alpha_2)$代入$AU=UB$有

$$A\alpha_1=e\alpha_1,$$

这样我们得到α_1是矩阵A的特征向量，矩阵B中的e为矩阵A的特征值。

将$U=\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix}$代入$UA=BU$有

$$\eta_1A=g\eta_1,$$

同理得到η_1是矩阵A的特征向量，矩阵B中的g为矩阵A的特征值。

对于

$$U=(\alpha_1\quad\alpha_2),U=\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix}$$

1) $\alpha_1,\alpha_2,\eta_1,\eta_2$是单位向量；

2) α_1,α_2正交，η_1,η_2正交；

3) α_1是矩阵A的特征向量，e为矩阵A的特征值；η_1是矩阵A的特征向量，g为矩阵A的特征值。

由

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a & -b\\ -c & \lambda-d\end{vmatrix}=\lambda^2-(a+d)\lambda+ad-bc,$$

即得A的特征值为

$$\lambda_1=\frac{a+d+\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2},\ \lambda_2=\frac{a+d-\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2}.$$

要注意的是，因为a,b,c,d是复数，所以λ_1,λ_2实际上都分别有两个值。

从而λ_1的特征向量为

$$\xi_1=\begin{pmatrix}\dfrac{a-d+\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2c}\\ 1\end{pmatrix},$$

再将其单位化，得

$$\alpha_1=\frac{\xi_1}{|\xi_1|}=\begin{pmatrix}\dfrac{\dfrac{a-d+\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2c}}{\sqrt{\left|\dfrac{a-d+\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2c}\right|^2+1}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{\left|\dfrac{a-d+\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2c}\right|^2+1}}\end{pmatrix},$$

令

$$\frac{a-d+\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2c}=m,$$

则

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}\frac{m}{\sqrt{|m|^2+1}}\\ \frac{1}{\sqrt{|m|^2+1}}\end{pmatrix}.$$

那么由条件(1) (2) (3)，不妨设

$$\alpha_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{|m|^2+1}}\\ \frac{\bar{m}}{\sqrt{|m|^2+1}}\end{pmatrix},$$

故存在酉矩阵

$$U=\begin{pmatrix}\frac{m}{\sqrt{|m|^2+1}} & -\frac{1}{\sqrt{|m|^2+1}}\\ \frac{1}{\sqrt{|m|^2+1}} & \frac{\bar{m}}{\sqrt{|m|^2+1}}\end{pmatrix},$$

使得 B 为上三角矩阵，即对于任意复矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix},$$

有

$$\begin{aligned}U^*AU&=\begin{pmatrix}\frac{\bar{m}}{\sqrt{|m|^2+1}} & \frac{1}{\sqrt{|m|^2+1}}\\ -\frac{1}{\sqrt{|m|^2+1}} & \frac{m}{\sqrt{|m|^2+1}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{m}{\sqrt{|m|^2+1}} & -\frac{1}{\sqrt{|m|^2+1}}\\ \frac{1}{\sqrt{|m|^2+1}} & \frac{\bar{m}}{\sqrt{|m|^2+1}}\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\frac{|m|^2a+mc+\bar{m}b+d}{|m|^2+1} & \frac{-\bar{m}a-c+(\bar{m})^2b+\bar{m}d}{|m|^2+1}\\ 0 & \frac{a-cm-b\bar{m}+d|m|^2}{|m|^2+1}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

证毕。

注释 1：对于任意复矩阵酉等价于上三角矩阵，酉矩阵并不是唯一的。

在定理证明中，对于 λ_2 的特征向量为

$$\xi_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{a-d-\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2c} \\ 1 \end{pmatrix},$$

再将其单位化得

$$\beta_1 = \frac{\xi_2}{|\xi_2|} = \begin{pmatrix} \dfrac{\dfrac{a-d-\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2c}}{\sqrt{\left|\dfrac{a-d-\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2c}\right|^2+1}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{\left|\dfrac{a-d-\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2c}\right|^2+1}} \end{pmatrix},$$

令

$$\frac{a-d-\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2c} = n,$$

则

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{n}{\sqrt{|n|^2+1}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{|n|^2+1}} \end{pmatrix}.$$

那么由条件(1) (2) (3)，不妨设

$$\beta_2 = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{|n|^2+1}} \\ \dfrac{\bar{n}}{\sqrt{|n|^2+1}} \end{pmatrix},$$

故存在酉矩阵

$$U_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{n}{\sqrt{|n|^2+1}} & -\dfrac{1}{\sqrt{|n|^2+1}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{|n|^2+1}} & \dfrac{\bar{n}}{\sqrt{|n|^2+1}} \end{pmatrix},$$

使得 B 为上三角矩阵，即对于任意复矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

有

$$U_1^*AU_1=\begin{pmatrix}\frac{\bar{n}}{\sqrt{|n|^2+1}} & \frac{1}{\sqrt{|n|^2+1}}\\ -\frac{1}{\sqrt{|n|^2+1}} & \frac{n}{\sqrt{|n|^2+1}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{n}{\sqrt{|n|^2+1}} & -\frac{1}{\sqrt{|n|^2+1}}\\ \frac{1}{\sqrt{|n|^2+1}} & \frac{\bar{n}}{\sqrt{|n|^2+1}}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{|n|^2a+nc+\bar{n}b+d}{|n|^2+1} & \frac{-\bar{n}a-c+(\bar{n})^2b+\bar{n}d}{|n|^2+1}\\ 0 & \frac{a-cn-b\bar{n}+d|n|^2}{|n|^2+1}\end{pmatrix}.$$

令

$$U_2=UU_1^*U,$$

显然有U_2为酉矩阵，则有$U_2^*AU_2$为上三角矩阵。

因此对于任意复矩阵，只要找出两个不同的酉矩阵使其酉等价于上三角矩阵，我们就可以得到一列酉矩阵，使得任意复矩阵在这些酉矩阵下酉等价于上三角矩阵。

例 1：将$A=\begin{pmatrix}1 & 2i\\ 3i & 4\end{pmatrix}$上三角化。

由定理 1 可知对应于 A 存在酉矩阵

$$U=\begin{pmatrix}\frac{3i+\sqrt{15}}{2\sqrt{15}} & \frac{-3}{\sqrt{15}}\\ \frac{3}{\sqrt{15}} & \frac{\sqrt{15}-3i}{2\sqrt{15}}\end{pmatrix},$$

使得 A 酉等价于上三角矩阵

$$B=U^*AU=\begin{pmatrix}\frac{5+\sqrt{15}i}{2} & \frac{\sqrt{15}-5i}{2}\\ 0 & \frac{5-\sqrt{15}i}{2}\end{pmatrix}.$$

致　谢

从主题的确定到内容的制定，我们要特别感谢指导教师的耐心讲解和悉心指导。通过这次科研经历，我们提高了自己的逻辑思维的严谨性，克服了种种困难，锻炼了团队协作能力。希望得到学校 2022 年教师指导本科生科研训练项目的支持。

基金项目

辽宁省教育厅青年项目 LQ2019017。

参考文献

[1] 谢启鸿. 可对角化的其他判定准则及其应用[J]. 大学数学, 2021, 37(5): 78-83.

[2] Hu, Y.-J. and Chen, G.-N. (2009) On Rank Variation of Block Matrices Generated by Nevanlinna Matrix Functions. *Mathematische Nachrichten*, **282**, 611-631. https://doi.org/10.1002/mana.200610759

[3] 秦建国, 陈公宁, 何红亚. Cauchy 矩阵及其相关的插值问题[J]. 数学的实践与认识, 2006, 36(9): 233-237.
[4] 马明玥, 付志慧. Hermitian 随机矩阵特征值[J]. 吉林大学学报(理学版), 2016, 54(3): 513-517.
[5] 陈公宁. 矩阵理论与应用[M]. 北京: 科学出版社, 2007.
[6] 姚慕生, 吴泉水, 谢启鸿. 高等代数学[M]. 第 3 版. 上海: 复旦大学出版社, 2014.
[7] 姚慕生, 谢启鸿. 大学数学学习方法指导丛书: 高等代数[M]. 第 3 版. 上海: 复旦大学出版社, 2015.
[8] 朱靖红, 朱永生. 矩阵对角化的相关问题[J]. 辽宁师范大学学报(自然科学版), 2005, 28(3): 383-384.