Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(4), 473-481
Published Online April 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.124053

格顶点算子超代数的自同构群

崔志广

青岛大学，数学与统计学院，山东 青岛

收稿日期：2022年2月26日；录用日期：2022年3月31日；发布日期：2022年4月7日

摘　要

本文主要研究由正定整格构造的格顶点算子超代数的自同构群的结构，通过正定整格的中心扩张得出的等距自同构和格顶点算子超代数的结构以及李代数的共轭定理，证明出格顶点算子超代数的自同构群是内导子诱导的自同构群与正定整格的等距自同构诱导的自同构群的积。

关键词

正定整格，顶点算子超代数，自同构群

Automorphism Groups of Lattice Vertex Operator Superalgebras

Zhiguang Cui

School of Mathematics and Statistics, Qingdao University, Qingdao Shandong

Received: Feb. 26th, 2022; accepted: Mar. 31st, 2022; published: Apr. 7th, 2022

Abstract

This paper aims to give a total description of the automorphism group of the vertex operator superalgebra associated to a positive definite integral lattice. By the isometries coming from the centrale extension of the positive definite integral lattice, the structure of the lattice vertex operator superalgebra and the conjugacy theorem from Lie algebra, we get that the automorphism group of the lattice vertex operator superalgebra is the product of the automorphism group deduced from inner derivations and the automorphism group deduced from isometries of the lattice.

Keywords

Lattice, Vertex Operator Superalgebra, Automorphism Group

文章引用：崔志广．格顶点算子超代数的自同构群[J]．理论数学, 2022, 12(4): 473-481.
DOI: 10.12677/pm.2022.124053

1. 引言

1986 年，Bocherds 在[1]中首次提出了顶点算子代数(Vertex operator algebra, VOA)的概念，随后 Frenkel-Lepowsky-Meurman 在《Vertex Operator Algebras and the Monster》这本书中系统发展了顶点算子代数的理论[2]。顶点算子代数的概念是在研究最大的离散单群——魔群(Monster)和月光猜想(Moonshine monjecture)才提出来的。最后研究得出魔群同构于月光模(Moonshine module)的自同构群，月光模也叫做月光顶点算子代数(Moonshine VOA) [2]。

对由正定偶格构造的格顶点算子代数 V_L 已经有很多研究：V_L 的所有不可约模[3]，V_L 的正则性[4]，V_L 的一种刻画[5]，格顶点算子代数的自同构群[6]。本文将要确定由正定整格构造的格顶点算子超代数的自同构群。

目前我们已经知道一些顶点算子代数的自同构群的结构，比如：月光顶点算子代数 $V^\natural$ [2]，由正定偶格构造的格顶点算子代数 V_L [6]，V_L 的子代数 V_L^+ [7] [8]，有限生成的顶点算子代数[9]，与仿射李代数最高权表示有关的顶点算子代数[10]，与编码相关的顶点算子代数[11]，汉明码顶点算子代数(Hanming code VOA) [12]，还有一些特殊的例子[13]。

对于格顶点算子超代数也有与格顶点算子代数相对应的结论。设 V 是一个没有负分次、权为零的子空间维数是一的顶点算子超代数，则权为一的子空间是一个李代数，它的李括积定义为 $[u,v]=u_0v$，$u,v\in V$，其中 u_0 是顶点算子 $Y(u,z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}u_nz^{-n-1}$ 的分量。那么就有 $N=\langle e^{u_0}\mid u\in V_1\rangle$ 是 V 的自同构群 $\mathrm{Aut}(V)$ 的正规子群。如果 $\mathrm{Aut}(V)/N$ 确定了，那么 $\mathrm{Aut}(V)$ 也就确定了。本文将证明 $\mathrm{Aut}(V_L)/N$ 同构于正定整格 L 的等距自同构群 $O(L)$ 的一个商群。

本文所证明的格顶点算子超代数的自同构群 $\mathrm{Aut}(V_L)$ 的结构对于理解一般顶点算子超代数的自同构群有重要意义。在文章[9]中有用到格顶点算子代数的自同构群[6]的证明思想最终证明了有限生成顶点算子代数的自同构群。在本文证明格顶点算子超代数的自同构群的结构之后，同样的也可以考虑证明有限生成的顶点算子超代数的自同构群的结构。

本文的结构安排如下。在第 2 节，给出顶点算子超代数及其自同构群的定。整格的中心扩张和格顶点算子超代数的集体构造分别在第 3 节和第 4 节给出。第 5 节主要是为了给出格顶点算子超代数的具体结构。

2. 预备知识

设 $V=V_{\bar{0}}\oplus V_{\bar{1}}$ 是任意的 $\mathbb{Z}_2$-分次向量空间。$V_{\bar{0}}$ (resp。$V_{\bar{1}}$)中的元素分别叫偶的(resp.奇的)。对于任意的 $v\in V_{\bar{i}}, i=0,1$，定义 $\tilde{v}=i$。

定义 2.1 [2] [14] [15]顶点算子超代数(VOSA)是一个四元组 $(V,Y,1,\omega)$ 带有 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ 分次：

$$V=\bigoplus_{n\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}}V_n=V_{\bar{0}}\oplus V_{\bar{1}}$$

其中 $V_{\bar{0}}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}V_n$，$V_{\bar{1}}=\sum_{n\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}}V_n$，满足 $\dim V_n<\infty$ 和当 m 充分小时 $V_m=0$。$\mathbf{1}\in V_0$ 叫做 V 的真空向量(vacuum vector)，$\omega\in V_2$ 叫做 V 的共形向量(conformal vector)，Y 是一个线性映射：

$$V \to (\mathrm{End}\,V)[\![z,z^{-1}]\!],$$

$$v \mapsto Y(v,z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n z^{-n-1}\ \ (v_n \in \mathrm{End}\,V),$$

对于$u,v\in V$ and $m,n\in\mathbb{Z}$，满足以下公理：

1)当n充分大时，$u_n v=0$，

2) $Y(\mathbf{1},z)=\mathrm{id}_V$，

3) $Y(v,z)\mathbf{1}\in V[\![z]\!]$，$\lim\limits_{z\to 0}Y(v,z)\mathbf{1}=v$，

4) $Y(\omega,z)=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}L(n)z^{-n-2}$的分量算子满足中心荷为$c\in\mathbb{C}$的 Virasoro 代数关系式，

$$[L(m),L(n)]=(m-n)L(m+n)+\frac{1}{12}(m^3-m)\delta_{m+n,0}c,$$

$$L(0)\big|_{V_n}=n, n\in\frac{1}{2}\mathbb{Z},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}Y(v,z)=Y(L(-1)v,z),$$

5) Jacobi 恒等式：对于$\mathbb{Z}_2$-齐次元素$u,v\in V$有，

$$z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_1-z_2}{z_0}\right)Y(u,z_1)Y(v,z_2)-(-1)^{\tilde{u}\tilde{v}}\,z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_2-z_1}{-z_0}\right)Y(v,z_2)Y(u,z_1)$$
$$=z_2^{-1}\delta\left(\frac{z_1-z_0}{z_2}\right)Y(Y(u,z_0)v,z_2).$$

其中$\delta(z)=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}z^n$和$(z_i-z_j)^n$展开式规定为$z_j$的非负次数展开。

定义 2.2 [2] [6] [15]顶点算子超代数V的线性自同构，保持$\mathbf{1}$和ω不变，满足g与$Y(v,z)$在V上的作用相容，即

$$gY(v,z)g^{-1}=Y(gv,z)$$

其中$v\in V$，则称g为V的自同构。V的全体自同构的集合记做$\mathrm{Aut}(V)$。

从上述定义中我们不难发现V的自同构保持齐次空间V_n不变，自然也保持$V_{\bar{i}}, i=0,1$不变。注意到顶点算子超代数V总是有一个特殊的自同构$\sigma v=(-1)^{\tilde{v}}v$，这个自同构与$V$的顶点算子超代数结构有关，并且此自同构与其他自同构可交换，这说明σ是$\mathrm{Aut}(V)$的中心元素。

设$l\in\mathbb{Z}_2$，令$(\mathrm{End}\,V)_l=\{F\in\mathrm{End}\,V \mid F(V_j)\subset V_{l+j}, j\in\mathbb{Z}_2\}$。

定义 2.3 [2] [6] [9] [15]顶点算子超代数V的一个自同态$D\in(\mathrm{End}\,V)_l$满足

$$D(u_n v)=(Du)_n v+(-1)^{lj}u_n(Dv),\ u\in V_j, v\in V, n\in\mathbb{Z}$$

和$D(\omega)=0$，则称D为顶点算子超代数的一个导子，导子的全体记为$\mathrm{Der}\,V$。如果$l=0$，则称导子D为偶的，否则称为奇的。偶导子的全体记为$(\mathrm{Der}\,V)_0$。

上述定义包含了 D 保持其次空间V_n不变，自然也保持$V_{\bar{i}}, i=0,1$不变。此处有一个简单的事实，若$D\in(\mathrm{Der}\,V)_0$，则e^D在V中收敛，因此它是良定义的。

注记 2.4 通过顶点算子超代数V的自同构的定义可以直接验证e^D ($D\in(\mathrm{Der}\,V)_0$)是V的一个自同构。

如果$u\in V_1$，那么u_0是V的一个偶导子，称这类导子为内导子。从上述注记中可以看出e^{u_0}是一个自

同构。将这类自同构计作 $N=\langle e^{u_0}\mid u\in V_1\rangle$。由于 $\sigma e^{u_0}\sigma^{-1}=\sigma\left(\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n!}u_0^n\right)\sigma^{-1}=\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n!}\left(\sigma u_0\sigma^{-1}\right)^n=e^{(\sigma u)_0}$ 和 $\sigma(u)\in V_1$，其中 $\sigma\in\mathrm{Aut}(V)$，我们得出 N 是 $\mathrm{Aut}(V)$ 的正规子群。

3. 正定整格的中心扩张

设 L 是一个正定整格。设正合列

$$1\to\langle\pm1\rangle\to\hat{L}\to L\to1$$

是由 L 通过循环群 $\langle\pm1\rangle$ 得到的中心扩张，并且有交换子映射(commutator map)，其中 $\alpha,\beta\in L$。选择一个映射(section) $e:L\to\hat{L}$ 使得 $e_0=1$，其中对于 $\alpha\in L$，记 $e_\alpha=e(\alpha)$。设 $\epsilon:L\times L\to\langle\pm1\rangle$ 是对应的 2-循环(2-cocycle)，然后有 $\epsilon(\alpha,\beta)\epsilon(\beta,\alpha)=(-1)^{\langle\alpha,\beta\rangle}$，$\epsilon(\alpha,\beta)\epsilon(\alpha+\beta,\gamma)=\epsilon(\beta,\gamma)\epsilon(\alpha,\beta+\gamma)$ 和 $e_\alpha e_\beta=\epsilon(\alpha,\beta)e_{\alpha+\beta}$，其中 $\alpha,\beta,\gamma\in L$。

设

$$\mathrm{Aut}(c)=\left\{\sigma\in\mathrm{Aut}(L)\mid c(\sigma\alpha,\sigma\beta)=c(\alpha,\beta),\alpha,\beta\in L\right\},$$

则有提升性质[2]

$$1\to\mathrm{Hom}(L,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\to\mathrm{Aut}\left(\hat{L}\right)\xrightarrow{-}\mathrm{Aut}(c)\to1\quad(\text{正合}).\tag{1}$$

事实上，

$$\mathrm{Hom}(L,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\cong(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathrm{rank}(L)}.$$

L 的等距自同构定义为

$$O(L)=\left\{\sigma\in\mathrm{Aut}(L)\mid\langle\sigma\alpha,\sigma\beta\rangle=\langle\alpha,\beta\rangle,\alpha,\beta\in L\right\}.\tag{2}$$

随后可以得到

$$O\left(\hat{L}\right)=\left\{\sigma\in\mathrm{Aut}\left(\hat{L}\right)\mid\bar{\sigma}\in O(L)\right\}\tag{3}$$

是 $\mathrm{Aut}(\hat{L})$ 的子群。

通过(1)我们可以得出 $\mathrm{Hom}(L,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 是 $O\left(\hat{L}\right)$ 的子群，并且

$$1\to\mathrm{Hom}(L,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\to O\left(\hat{L}\right)\xrightarrow{-}O(L)\to1$$

是一个正合列。

4. 格顶点算子超代数的构造

为了构造与正定整格 L 相关的格顶点算子超代数 V_L，需要引入向量空间 $\mathfrak{h}=\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{Z}}L$ 并且将 L 的 $\mathbb{Z}$-双线性型 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 通过 $\mathbb{C}$-线性拓展到 $\mathfrak{h}$。将 $\mathfrak{h}$ 看作是一个可交换的李代数，再考虑其仿射李代数

$$\hat{\mathfrak{h}}=\mathfrak{h}\otimes\mathbb{C}\left[t,t^{-1}\right]\oplus\mathbb{C}c.$$

$\hat{\mathfrak{h}}$ 的李括积定义为

$$\left[\alpha\otimes t^m,\beta\otimes t^n\right]=\langle\alpha,\beta\rangle m\delta_{m+n,0}c,$$

$$[c,\mathfrak{h}]=0,$$

其中 $\alpha,\beta\in\mathfrak{h}$，$m,n\in\mathbb{Z}$。

令

$$\hat{\mathfrak{h}}^{+}=\mathfrak{h}\otimes t\mathbb{C}[t],\hat{\mathfrak{h}}^{-}=\mathfrak{h}\otimes t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}].$$

我们注意到$\hat{\mathfrak{h}}^{+}$和$\hat{\mathfrak{h}}^{-}$是$\hat{\mathfrak{h}}$的两个交换子代数。

$\hat{\mathfrak{h}}$的子代数

$$\hat{\mathfrak{h}}_{\mathbb{Z}}=\hat{\mathfrak{h}}^{+}\oplus\hat{\mathfrak{h}}^{-}\oplus\mathbb{C}c$$

是一个 Heisenberg 代数。设$U(\mathfrak{h}^{-})$和$S(\mathfrak{h}^{-})$分别是$\mathfrak{h}^{-}$的范包络代数与对称代数，则有代数同构$U(\mathfrak{h}^{-})\cong S(\mathfrak{h}^{-})$。

下一步，把$\mathbb{C}$看作是一维$\mathfrak{h}\otimes\mathbb{C}[t]\oplus\mathbb{C}c$-模，其中$\mathfrak{h}\otimes\mathbb{C}[t]$在$\mathbb{C}$的作用是平凡的，$c$在$\mathbb{C}$的作用是乘1。这样我们就可以构造诱导$\hat{\mathfrak{h}}$-模

$$M(1)=U(\hat{\mathfrak{h}})\otimes_{\mathfrak{h}\otimes\mathbb{C}[t]\oplus\mathbb{C}c}\mathbb{C}\cong S(\hat{\mathfrak{h}}^{-})\ (\text{linearly}).$$

$M(1)$的顶点算子代数结构由

$$Y(h(-1),z)=h(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}h(n)z^{-n-1}$$

决定，其中$h\in\mathfrak{h}$。对于$M(1)$中一般元素$u=h_1(-n_1-1)h_2(-n_2-1)\cdots h_s(-n_s-1)$，顶点算子定义为

$$Y(u,z)=Y_{(M(1))}(u,z)=\mathop{\circ}\limits^{\circ}\partial_{n_1}h_1(z)\cdots\partial_{n_s}h_s(z)\mathop{\circ}\limits^{\circ},$$

其中$\partial_{n_i}=\dfrac{1}{n_i!}\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^{n_i}$，$i=0,\cdots,s$，$\mathop{\circ}\limits^{\circ}\ \mathop{\circ}\limits^{\circ}$是正规序(the normal order) [2]。

设$\hat{L}$是L通过循环群$\langle\pm1\rangle$中心扩张得到的群。构造诱导$\hat{L}$-模

$$\mathbb{C}\{L\}=\mathbb{C}[\hat{L}]\otimes_{\langle\pm1\rangle}\mathbb{C}\cong\mathbb{C}[L]\ (\text{linearly}),$$

其中-1在$\mathbb{C}$的作用是乘-1，$\mathbb{C}[L]$是L的群代数。对于$\mathbb{C}\{L\}$中的元素$a\otimes1$，我们用$\iota(a)$表示，其中$a\in\hat{L}$。

现在我们可以定义$\hat{L}$和$\mathfrak{h}$在$\mathbb{C}\{L\}$的作用了。定义$a\cdot\iota(b)=\iota(ab)$，$h\cdot\iota(a)=\langle h,\bar{a}\rangle\iota(a)$，其中$a,b\in\hat{L},h\in\mathfrak{h}$。不仅如此，还需要将$-1$和$z^h$在$\mathbb{C}\{L\}$上的作用定义为$-1\cdot\iota(a)=\iota(-a)$和$z^h\cdot\iota(a)=z^{\langle h,\bar{a}\rangle}\iota(a)$，其中$a\in\hat{L},h\in\mathfrak{h}$。

本文研究的主要对象格顶点算子超代数V_L的定义现在可以给出了：

$$V_L=M(1)\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}\{L\},$$

它的顶点算子定义为

$$Y(h(-1),z)=h(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}h(n)z^{-n-1},$$

$$Y(\iota(a),z)=\exp\left(-\sum_{n<0}\frac{\bar{a}(n)}{n}z^{-n}\right)\exp\left(-\sum_{n>0}\frac{\bar{a}(n)}{n}z^{-n}\right)az^{\bar{a}}.$$

对于V_L中的一般形式元素$u=h_1(-n_1-1)h_2(-n_2-1)\cdots h_s(-n_s-1)\otimes\iota(a)$，顶点算子$Y(u,z)$定义为：

$$Y(u,z)=\mathop{\circ}\limits^{\circ}\partial_{n_1}h_1(z)\cdots\partial_{n_s}h_s(z)Y(\iota(a),z)\mathop{\circ}\limits^{\circ}$$

其中$\partial_{n_i}=\dfrac{1}{n_i!}\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^{n_i}$，$1\le i\le s$。

设 $\{\alpha_i \mid i=1,\cdots,d\}$ 为 L 的一组正交基，令

$$\omega=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\alpha_i(-1)^2\mathbf{1}$$

与

$$Y(\omega,z)=L(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}L(n)z^{-n-2},$$

则 $\omega_n=L(n-1)$。然后我们可以通过算子 $L(0)$ 来定义 V_L 的分次：

$$V_L=\bigoplus_{n\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}_+}(V_L)_n,\ (V_L)_n=\{v\in V_L \mid L(0)v=nv\}.$$

如果 $v\in(V_L)_n$，则 $\mathrm{wt}v=n$。例如：$\mathrm{wt}(h(-n)\mathbf{1})=n, \mathrm{wt}(\iota(a))=\frac{1}{2}\langle\bar{a},\bar{a}\rangle$。注意到 $\dim(V_L)_n<\infty$。现在可以称 $(V_L,Y,\mathbf{1},\omega)$ 是一个顶点算子超代数，它的真空向量和共形向量分别为 $\mathbf{1}=\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}$ 和 $\omega\in V_2$ [2] [14] [15]。

5. 格顶点算子超代数的自同构群

在第 4 节，已经得到了关于 L 和 $\hat{L}$ 的自同构群：

$$O(L)=\{\sigma\in\mathrm{Aut}(L) \mid \langle\sigma\alpha,\sigma\beta\rangle=\langle\alpha,\beta\rangle,\alpha,\beta\in L\}$$

与

$$O(\hat{L})=\{\sigma\in\mathrm{Aut}(\hat{L}) \mid \bar{\sigma}\in O(L)\},$$

还有正合列

$$1\to\mathrm{Hom}(L,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\to O(\hat{L})\xrightarrow{-}O(L)\to 1.$$

首先考虑由 $O(\hat{L})$ 提升得到的关于 V_L 的自同构。具体来说，对任意的 $\sigma\in O(\hat{L})$ 可以通过下面的方式得到 V_L 的一个自同构，还计作 σ，

$$\sigma(\alpha_1(-n_1)\cdots\alpha_k(-n_k)\otimes\iota(a))=(\bar{\sigma}\alpha_1)(-n_1)\cdots(\bar{\sigma}\alpha_k)(-n_k)\otimes\iota(\sigma a),$$

其中 $\alpha_i\in\mathfrak{h}$，$n_i>0$，$a\in\hat{L}$。由于以上原因，$O(\hat{L})$ 可以看作 $\mathrm{Aut}(V_L)$ 的一个子群，并且它保持 $M(1)$ 不变。

我们需要以下与[6]类似的引理来证明顶点算子超代数 V_L 的自同构群的结构。

引理 5.1 设 $0\neq v\in V_L$。如果存在 $0\neq\alpha\in\mathfrak{h}$ 使得 $h(0)v=\langle h,\alpha\rangle v$，$\forall h\in\mathfrak{h}$，则有 $\alpha\in L$，并且存在 $c_\alpha\in M(1)$ 使得 $v=c_\alpha\iota(e_\alpha)$。

证明：由于 $\mathfrak{h}$ 作用到 V_L 上是半单的，并且有

$$V_L=\bigoplus_{\beta\in L}M(1)\otimes\iota(e_\beta).$$

可以看出 $M(1)\otimes\iota(e_\beta)=\{v\in V \mid h(0)v=\langle h,\beta\rangle v\}$，引理结论立即成立。

令 V_L 的子空间 $\mathfrak{h}(-1)=\mathfrak{h}\otimes t^{-1}\mathbf{1}$。然后 V_L 的保持 $\mathfrak{h}(-1)$ 不变的自同构可以看作是 $\mathfrak{h}$ 的线性自同构。

引理 5.2 设 $\sigma\in\mathrm{Aut}(V_L)$，$\sigma(\mathfrak{h}(-1))=\mathfrak{h}(-1)$，则有 $\sigma(L)\subset L$，并且存在 $c_\alpha\in\mathbb{C}$ 使得 $\sigma(\iota(e_\alpha))=c_\alpha\iota(e_{\sigma(\alpha)})$，$\forall\alpha\in L$。

证明：从引理假设条件可以得出$\sigma^{-1}h(-1)\in\mathfrak{h}(-1)$，$\forall h\in\mathfrak{h}$。把$\mathfrak{h}(-1)$当作$\mathfrak{h}$。$\mathfrak{h}$上的双线性型取作$\langle u,v\rangle=u(1)v$，其中$u,v\in\mathfrak{h}$，则$\mathfrak{h}$上的双线性型是$\sigma$-不变的。又因为$\sigma^{-1}(h)(0)\iota(e_\alpha)=\langle\alpha,\sigma^{-1}(h)\rangle\iota(e_\alpha)$。因此，

$$\begin{aligned}h(0)\sigma\iota(e_\alpha)&=(\sigma\sigma^{-1}(h))(0)\sigma\iota(e_\alpha)\\&=\sigma(\sigma^{-1}(h)(0)\iota(e_\alpha))\\&=\sigma(\langle\alpha,\sigma^{-1}(h)\rangle\iota(e_\alpha))\\&=\langle\alpha,\sigma^{-1}(h)\rangle\sigma\iota(e_\alpha)\\&=\langle h,\sigma(\alpha)\rangle\sigma\iota(e_\alpha).\end{aligned}$$

若$\sigma\iota(e_\alpha)\neq 0$，通过引理 3.3.1 可以得出存在$c_\alpha\in M(1)$使得$\sigma\iota(e_\alpha)=c_\alpha\iota(e_{\sigma(\alpha)})$，其中$\sigma(\alpha)\in L$。所以$\sigma(L)\subset L$。然而$\mathbb{C}\{L\}=\{v\in V_L\mid h(n)v=0,n\neq 0\ \forall h\in\mathfrak{h}\}$并且$\mathbb{C}\{L\}$是$\sigma$-不变的。因此$\sigma\iota(e_\alpha)=c_\alpha\iota(e_{\sigma(\alpha)})\in\mathbb{C}\{L\}$，$c_\alpha\in\mathbb{C}$。

注记 5.3 在引理 5.2 的证明中，V_L中的元素$\iota(e_\alpha)$和$e_{\sigma(\alpha)}$的权一样。又因为$\sigma(L)\subset L$，所以σ诱导出L的等距自同构。

引理 5.4 设$\sigma\in\mathrm{Aut}(V_L)$，使得$\sigma|_{\mathfrak{h}(-1)}=\mathrm{id}$，则存在$h\in\mathfrak{h}$使得$\sigma=\mathrm{e}^{h(0)}$。

证明：由引理条件可知$\sigma|_L=\mathrm{id}$与$\sigma|_{M(1)}=\mathrm{id}$。由引理 5.2 知存在$c_\alpha\in\mathbb{C}$使得$\sigma\iota(e_\alpha)=c_\alpha\iota(e_{\sigma(\alpha)})$，$\forall\alpha\in L$。对于任意的$\alpha,\beta\in L$，有$\iota(e_\alpha)_{-\langle\alpha,\beta\rangle-1}\iota(e_\beta)=\epsilon(\alpha,\beta)\iota(e_{\alpha+\beta})$。因为

$$\begin{aligned}\sigma\iota(e_{\alpha+\beta})&=\epsilon(\alpha,\beta)^{-1}\sigma\iota(e_\alpha)_{-\langle\alpha,\beta\rangle-1}\sigma\iota(e_\beta)\\&=\epsilon(\alpha,\beta)^{-1}c_\alpha c_\beta\iota(e_\alpha)_{-\langle\alpha,\beta\rangle-1}\iota(e_\beta)\\&=c_\alpha c_\beta\iota(e_{\alpha+\beta}).\end{aligned}$$

所以$c_{\alpha+\beta}=c_\alpha c_\beta$。

设$\{\alpha_i\mid i=1,\cdots,d\}$是$L$的一组基，$\alpha=\sum_{i=1}^d k_i\alpha_i$，其中$k_i\in\mathbb{Z}$，则有$c_\alpha=c_{\alpha_1}^{k_1}c_{\alpha_2}^{k_2}\cdots c_{\alpha_d}^{k_d}$。又因为存在$h\in\mathfrak{h}$使得$\mathrm{e}^{\langle h,\alpha_i\rangle}=c_{\alpha_i}$，$\forall i=1,2,\cdots,d$ （$\langle\ ,\ \rangle$非退化）。所以有$\mathrm{e}^{h(0)}\iota(e_{\alpha_i})=c_{\alpha_i}\iota(e_{\alpha_i})$与

$$\mathrm{e}^{h(0)}\iota(e_\alpha)=\mathrm{e}^{\langle h,\alpha\rangle}\iota(e_\alpha)=c_\alpha\iota(e_\alpha).$$

因此$\sigma=\mathrm{e}^{h(0)}$。

有了上边的引理之后，我们可以的得出本文的主要定理。

定理 5.5 设L是一个正定整格，则有顶点算子超代数V_L的自同构群的结构如下：

$$\mathrm{Aut}(V_L)=N\cdot O(\hat{L}),$$

其中$N=\{\mathrm{e}^{u_0}\mid u\in V_1\}$是$\mathrm{Aut}(V_L)$的正规子群。还有$\mathrm{Hom}(L,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$是$N\cap O(\hat{L})$的子群，$\mathrm{Aut}(V_L)/N$同构于$O(L)$的一个商群。

证明：考虑V_L权为 1 的子空间：

$$\mathfrak{g}=(V_L)_1=\mathfrak{h}(-1)\oplus\sum_{\langle\alpha,\alpha\rangle=2}\mathbb{C}\iota(e_\alpha).$$

它是一个简约李代数[16]，李括积定义为$[u,v]=u_0v$，$u,v\in\mathfrak{g}$，Cartan 子代数为$\mathfrak{h}(-1)$。

设$\sigma \in \mathrm{Aut}(V_L)$，则$\sigma$限制到$\mathfrak{g}$上是一个李代数的自同构。注意到$\mathfrak{g}$的内自同构群是$N$在$\mathfrak{g}$上的限制。由李代数的共轭定理[17]，存在$\phi \in N$使得$\phi^{-1}\sigma(\mathfrak{h}(-1)) = \mathfrak{h}(-1)$。然后由引理5.2和注记5.3知，$\nu = \phi^{-1}\sigma$诱导了$L$的等距自同构，并且对于$\alpha \in L$，有$\nu\iota(e_\alpha) = c_\alpha \iota(e_{\nu\alpha})$和$c_\alpha \in \mathbb{C}$。令$\tau \in O(\hat{L})$使得$\bar{\tau} = \nu$，则有$\nu\tau^{-1}\big|_{\mathfrak{h}(-1)} = \mathrm{id}$。由引理5.4知，存在$\psi \in N$使得$\nu\tau^{-1} = \psi$。有了这些之后，可以得出$\sigma = \phi\psi\tau \in N \cdot O(\hat{L})$，其中$\phi\psi \in N$，这说明$\mathrm{Aut}(V_L) = N \cdot O(\hat{L})$。

对于$\lambda \in \mathrm{Hom}(L, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$可以诱导出$\hat{L}$的自同构[2]：$a \mapsto a(-1)^{\lambda(\bar{a})}$，其中$a \in \hat{L}$。通过引理5.4的证明可以看出，存在$h \in \mathfrak{h}$使得$\mathrm{e}^{\langle h,\alpha\rangle} = (-1)^{\lambda(\alpha)}$，其中$\alpha \in L$。作为$V_L$的自同构，$\mathrm{e}^{h(0)} = \lambda$，这样$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$就可以看作是$N$的子群。

因为$\mathrm{Aut}(V_L)/N \cong O(\hat{L})/N \cap O(\hat{L})$，$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \subset O(\hat{L})$和(3)，可以得出$\mathrm{Aut}(V_L)/N$是$O(L)$的一个商群。

6. 结论与展望

本文通过整格的中心扩张将L的等距自同构$O(L)$提升到$\hat{L}$的等距自同构$O(\hat{L})$，再由此诱导出格顶点算子超代数的自同构$O(\hat{L})$，再考虑由格顶点算子超代数的内导子诱导出其内自同构群$N = \{\mathrm{e}^{u_0} \mid u \in V_1\}$，并通过对格顶点算子超代数结构的观察和李代数中共轭定理的应用，最后证明了格顶点算子超代数的自同构群$\mathrm{Aut}(V_L) = N \cdot O(\hat{L})$。

本文是对由正定偶格构造的格顶点算子超代数的自同构群结构的研究，但是对其他顶点算子超代数自同构群的研究具有启发性，甚至对一般的有限生成的顶点算子超代数的自同构群的研究也有帮助。另一方面，本文定义的格顶点算子超代数的自同构要求保持共形向量，也可以研究不保持共形向量的自同构，那么这类自同构的自同构群的结构也值得研究。

参考文献

[1] Borcherds, R.E. (1986) Vertex Algebras, Kac-Moody Algebras, and the Monster. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **83**, 3068-3071. https://doi.org/10.1073/pnas.83.10.3068

[2] Frenkel, I., Lepowsky, J. and Meurman, A. (1988) Vertex Operator Algebras and the Monster. Academic Press, New York. https://doi.org/10.1142/9789812798411_0010

[3] Dong, C.Y. (1993) Vertex Algebras Associated with Even Lattices. *Journal of Algebra*, **161**, 245-265. https://doi.org/10.1006/jabr.1993.1217

[4] Dong, C.Y., Li, H.S. and Mason, G. (1997) Regularity of Rational Vertex Operator Algebras. *Advances in Mathematics*, **132**, 148-166. https://doi.org/10.1006/aima.1997.1681

[5] Li, H.S. and Xu, X.P. (1995) A Characterization of Vertex Algebras Associated to Even Lattices. *Journal of Algebra*, **173**, 253-270. https://doi.org/10.1006/jabr.1995.1087

[6] Dong, C.Y. and Nagatomo, K. (1998) Automorphism Groups and Twisted Modules for Lattice Vertex Operator Algebra. *Contemporary Mathematics*, **268**, 117-133. https://doi.org/10.1090/conm/248/03821

[7] Dong, C.Y. and Griess, R.L. (1998) Rank One Lattice Type Vertex Operator Algebras and Their Automorphism Groups. *Journal of Algebra*, **208**, 262-275. https://doi.org/10.1006/jabr.1998.7498

[8] Dong, C.Y., Griess, R.L. and Ryba, A. (1997) Rank One Lattice Type Vertex Operator Algebras and Their Automorphism Groups, II E-Series. *Journal of Algebra*, **217**, 701-710. https://doi.org/10.1006/jabr.1999.7853

[9] Dong, C.Y. and Griess, R.L. (2001) Automorphism Groups and Derivation Algebras of Finitely Generated Vertex Operator Algebras. *Michigan Mathematical Journal*, **50**, 227-239. https://doi.org/10.1307/mmj/1028575732

[10] Dong, C.Y., Lam, C. and Yamada, H. (1999) Decomposition of the Vertex Operator Algebra. *Journal of Algebra*, **222**, 500-510. https://doi.org/10.1006/jabr.1999.8019

[11] Miyamoto, M. (1996) Binary Codes and Vertex Operator (Super) Algebras. *Journal of Algebra*, **181**, 207-222. https://doi.org/10.1006/jabr.1996.0116

[12] Matsuo, A. and Matsuo, M. (2000) The Automorphism Group of the Hamming Code Vertex Operator Algebra. *Jour-*

nal of Algebra, **228**, 204-226. https://doi.org/10.1006/jabr.1999.8255

[13] Griess, R.L. (1998) A Vertex Operator Algebra Related to E_8 with Automorphism Group $O^+(10, 2)$. In: *The Monster and Lie Algebras*, Walter de Gruyter, New York, 43-58. https://doi.org/10.1515/9783110801897.43

[14] Lepowsky, J. and Li, H.S. (2004) Introduction to Vertex Operator Algebras and Their Representations. Springer Science and Business Media, New York. https://doi.org/10.1007/978-0-8176-8186-9

[15] Xu, X.P. (1998) Introduction to Vertex Operator Superalgebras and Their Modules. Kluwer Academic, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-015-9097-6

[16] Dong, C.Y. and Mason, G. (2004) Rational Vertex Operator Algebras and the Effective Central Charge. *International Mathematics Research Notices*, **56**, 2989-3008. https://doi.org/10.1155/S1073792804140968

[17] Humphreys, J.E. (1972) Introduction to Lie Algebras and Representation Theory. Springer, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-6398-2