Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(4), 590-597
Published Online April 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.124066

Hans汉斯

闭区间套定理的应用及其特点

刘 丹[1]，吴小腊[2]，方明亮[3*]

[1]华南农业大学，数学与信息学院，广东 广州
[2]华南农业大学，珠江学院，广东 广州
[3]杭州电子科技大学，理学院，浙江 杭州

收稿日期：2022年3月11日；录用日期：2022年4月14日；发布日期：2022年4月21日

摘 要

闭区间套定理是实数完备性理论中的一个重要定理，理解该定理，并掌握其证明其他结论的关键技巧和方法对于理解实数理论都有着重要意义。首先，论文给出了闭区间套定理在实数完备性理论中六大基本定理的等价性证明和闭区间上连续函数性质证明中的应用。其次，论文分析和总结了应用闭区间套定理证明数学命题的特点：基于直接法或反证法，选择适当的“遗传性质”并构造闭区间套，将闭区间上的整体性质“遗传”到每一个闭子区间，使得在所“套出的点”的局部区域上保持该性质，进而证明或者反证相关的命题。论文的研究结论对理解闭区间套定理和实数完备性理论，掌握应用该定理证明数学分析问题的方法，以及教学都具有较好的参考价值。

关键词

闭区间套定理，实数的完备性，数学分析

On the Nested Intervals Theorem and Its Applications

Dan Liu[1], Xiaola Wu[2], Mingliang Fang[3*]

[1]College of Mathematics and Information, South China Agricultural University, Guangzhou Guangdong
[2]Zhujiang College, South China Agricultural University, Guangzhou Guangdong
[3]College of Sciences, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou Zhejiang

Received: Mar. 11th, 2022; accepted: Apr. 14th, 2022; published: Apr. 21st, 2022

Abstract

As a matter of fact, nested intervals theorem is one of the important theorems in the theory of the

*通讯作者。

文章引用: 刘丹, 吴小腊, 方明亮. 闭区间套定理的应用及其特点[J]. 理论数学, 2022, 12(4): 590-597.
DOI: 10.12677/pm.2022.124066

completeness of real numbers. It is showed in this article how to use the nested intervals theorem to prove the results in mathematical analysis. We think the key point in proof is to choose the appropriate hereditary property. Through building proper nested intervals, the overall property can be transferred to the local, and then the result can be proved.

Keywords

Nested Intervals, Theorem Completeness of Real Numbers, Mathematical Analysis

1. 引言

数学分析讨论的问题都是在实数范围内进行，其中实数完备性是整个数学分析的基础。所谓实数的完备性，又称实数的连续性，从几何角度来看，是指实数充满了整个实数轴且没有“缝隙”。实数的完备性可以从不同的角度加以刻画，通常表现为实数完备性的六大基本定理：确界原理、柯西收敛准则、单调有界准则、闭区间套定理、聚点原理和有限覆盖定理，它们共同奠基了数学分析中实数理论的基础。众所周知，这六大基本定理是等价的，大多数数学分析教材以其中之一为基础，采取轮流证明的方式完成其等价性的证明。如华东师范大学数学系编的《数学分析》[1]以确界原理为基础，证明了它们之间的等价性。

实数完备性是数学分析教学的难点，也是学生学习的难点。本文认为，在这六大基本定理中，闭区间套定理具有易理解和易构造等特点，应用闭区间套定理能轻松地完成其余五大定理的等价证明，并且在闭区间上连续函数性质的证明中，闭区间套定理也有很好的应用。因此，在数学分析的教学与学习中，理解和掌握闭区间套定理的特点及其应用技巧，将闭区间套定理作为理解实数完备性理论的一个“支点”，有助于学生突破实数完备性理论学习难点，也有助于学生抽象思维能力和问题解决能力的提高。

本文讨论闭区间套定理在实数完备性理论中六大基本定理等价性证明中的应用，分析和总结应用闭区间套定理的特点和关键，进而给出闭区间套定理在闭区间上连续函数性质证明中的应用。通过具体例题的分析和证明过程，帮助学生掌握应用闭区间套定理证明相关命题的技巧，也为教师提高数学分析教学质量提供参考。

2. 闭区间套的定义和闭区间套定理

定义 1 [1] 设闭区间列 $\{[a_n,b_n]\}$ 具有如下性质：

i) $[a_n,b_n]\supset[a_{n+1},b_{n+1}]$，$n=1,2,\cdots$；

ii) $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n-a_n)=0$，

则称 $\{[a_n,b_n]\}$ 为闭区间套，或简称区间套。

定理 1 (闭区间套定理) 若 $\{[a_n,b_n]\}$ 是一个区间套，则在实数系中存在唯一的一点 ξ，使得 $a_n\le\xi\le b_n$，$n=1,2,\cdots$。

注： 闭区间套定理要求各个区间都是闭区间，才能保证定理结论的成立。如对于开区间列 $\left\{\left(0,\dfrac{1}{n}\right)\right\}$，虽然满足前一个区间套着后一个区间，且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n}-0\right)=0$，但不存在属于所有开区间的公共点。

由闭区间套定理，容易证得如下推论：

推论 1 若$\xi\in[a_n,b_n](n=1,2,\cdots)$是闭区间套所确定的点，则对任意$\varepsilon>0$，存在$N>0$，使得当$n>N$时有$[a_n,b_n]\subset U(\xi,\delta)$。

3. 应用闭区间套定理证明数学命题的特点

大体上，应用闭区间套定理证明数学命题的特点是：基于直接法或反证法，选择合适的性质，构造适当的闭区间套，通过闭区间套，将闭区间的整体性质“遗传”到每个闭子区间。在构造区间套时，第一个闭区间所具有的性质可以传递给后面所有的闭子区间，从而使得构造出来的区间套的每个区间都具有该性质，我们把这样的性质称为闭区间套的“遗传性质”。具体而言，应用闭区间套定理证明数学命题，主要抓住两个特点：

其一，构造的闭区间套必须满足“闭、缩、套”三个特征，即闭区间列$\{[a_n,b_n]\}$满足：

i) $[a_n,b_n]\supset[a_{n+1},b_{n+1}]$，$n=1,2,\cdots$；

ii) $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n-a_n)=0$。

这是闭区间套定理应用的基本要求，它保证了闭区间列$\{[a_n,b_n]\}$ $(n=1,2,\cdots)$存在唯一公共点ξ，并且把证明整个闭区间$[a,b]$上的某种性质的问题归结为证明ξ点邻域$U(\xi,\delta)$上的性质，实现整体性质向局部性质的转化。一般采用“二分法”或“三分法”构造闭区间套。

其二，选择闭区间上恰当的“遗传性质”。遗传性质的选择主要依据所证明问题的性质和命题的条件，且该性质能通过闭区间套传递下去。在实际应用中，通常可选择“无数个”、“无界”、“不可数”等作为“遗传性质”。

4. 闭区间套定理在实数完备性理论中的应用

本节根据闭区间套定理的应用特点证明了三个完备性等价定理，探索闭区间套定理在实数完备性理论中的应用。

4.1. 证明海涅-博雷尔有限覆盖定理

定理 2 [1] (海涅-博雷尔定理) 设H为闭区间$[a,b]$的一个无限开覆盖，则从H中可选出有限个开区间来覆盖$[a,b]$。

分析 采用反证法，选择“不能被有限个开区间覆盖”作为“遗传性质”进行区间套构造。假设该闭区间不能被有限个开区间覆盖，把该区间二等分，必有一个子区间不能被有限个开区间覆盖，再将这个子区间二等分，重复上述过程可构造一个闭区间套。该区间套具有性质：所有区间都不能被有限个开区间覆盖，因此，存在一个公共点，满足该公共点的邻域能够覆盖闭区间套中的某些闭区间，从而得出矛盾。

证明 用反证法证明。假设定理的结论不成立，即闭区间$[a,b]$不能被H中的有限个开区间覆盖。记$[a_1,b_1]=[a,b]$，则不能选取H中的有限个开区间覆盖$[a_1,b_1]$。

将$[a_1,b_1]$二等分为两个子区间，则至少存在一个子区间不能被H中的有限个开区间覆盖，记这个子区间为$[a_2,b_2]$，则不能选取H中的有限个开区间覆盖$[a_2,b_2]$，且

$$[a_2,b_2]\subset[a_1,b_1]，\quad b_2-a_2=\frac{b-a}{2}。$$

将$[a_2,b_2]$二等分为两个子区间，则至少存在一个子区间不能被H中的有限个开区间覆盖，记这个子区间为$[a_3,b_3]$，则不能选取H中的有限个开区间覆盖$[a_3,b_3]$，且

$$[a_3,b_3]\subset[a_2,b_2]，\ b_3-a_3=\frac{b-a}{2^2}。$$

重复上述步骤，可得一个闭区间列$\{[a_n,b_n]\}$，满足

1) $[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n],n=1,2,3,\cdots$；

2) $b_n-a_n=\dfrac{b-a}{2^{n-1}}\to 0,(n\to\infty)$；

3) 不能选取 H 中的有限个开区间覆盖$[a_n,b_n]$, $n=1,2,3,\cdots$

由闭区间套定理，存在唯一的点$\xi\in[a_n,b_n]$, $n=1,2,3,\cdots$。由于 H 是$[a_n,b_n]$的一个开覆盖，由推论 1 可知，存在邻域$U(\xi,\delta)\subset H$，当 n 充分大时，有$[a_n,b_n]\subset U(\xi,\delta)$。这与闭区间列$\{[a_n,b_n]\}$的性质(3)矛盾，因此假设错误。命题得证。

4.2. 证明魏尔斯特拉斯聚点定理

定理 3 [1] [2] (魏尔斯特拉斯聚点原理) 实轴上的任一有界无限点集至少有一个聚点。

分析 采用直接法，选择“含有无穷个点”作为“遗传性质”构造区间套。对有界无限点集 S，存在闭区间$[a,b]$，使得$S\subset[a,b]$。把区间$[a,b]$二等分，则至少有一个子区间包含 S 中的无限个点，重复上述步骤，得到一个闭区间套，则闭区间套中每个子区间都“遗传”了“含包含 S 中无穷个点”的性质。由闭区间套定理可“套出”一个公共点，即为聚点。

证明 设 S 是有界无限点集，则存在$M>0$，使得$S\subset[-M,M]$。记$[a_1,b_1]=[-M,M]$，则$[a_1,b_1]$中含有集合 S 中的无穷个点。

将$[a_1,b_1]$二等分为两个子区间，由于 S 是无穷点集，则至少存在一个子区间含有 S 中的无穷多个点，记该子区间为$[a_2,b_2]$，则$[a_2,b_2]\subset[a_1,b_1]$，$b_2-a_2=\dfrac{b_1-a_1}{2}=M$。

同理，将$[a_2,b_2]$二等分为两个子区间，则至少存在一个子区间含有 S 中的无穷多个点，记该子区间为$[a_3,b_3]$，则$[a_3,b_3]\subset[a_2,b_2]$，$b_3-a_3=\dfrac{b_2-a_2}{2}=\dfrac{M}{2}$，$[a_3,b_3]$含有 S 中无穷个点。

将上述步骤重复进行下去，得到一个闭区间列$\{[a_n,b_n]\}$，满足

1) $[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]$, $n=1,2,3,\cdots$；

2) $b_n-a_n=\dfrac{M}{2^{n-2}}\to 0,\ (n\to\infty)$；

3) $[a_n,b_n]$含有 S 中无穷个点，$n=1,2,3,\cdots$

由闭区间套定理，存在唯一的点$\xi\in[a_n,b_n]$, $n=1,2,3,\cdots$。由推论 1 可知，存在ξ的邻域$U(\xi,\delta)$满足：当 n 充分大时，有$[a_n,b_n]\subset U(\xi,\delta)$，即$U(\xi,\delta)$中含有 S 中的无穷多个点，因此ξ为 S 的聚点。

4.3. 证明柯西收敛准则

定理 4 [1] [3] (柯西收敛准则) 数列$\{x_n\}$存在极限的充要条件是对$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当$n,m>N$时，有$|x_n-x_m|<\varepsilon$。

分析 与定理 3 的证明类似，采用直接法，选择“含有无穷个点”作为“遗传性质”构造区间套。

证明 (充分性)首先构造闭区间套。取$\varepsilon=1$，则存在自然数$N>0$，当$n>N$，$m=N+1$时有，$|x_n-x_{N+1}|<\varepsilon$，于是$|x_n|=|x_n-x_{N+1}+x_{N+1}|<1+|x_{N+1}|$，$n=N+1,N+2,\cdots$。

因此，对任意自然数$n=1,2,\cdots$，$|x_n|\le\max\{|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_N|,1+|x_N|\}$。

记$\max\{|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_N|,1+|x_N|\}=M$，$[a_1,b_1]=[-M,M]$，则$[a_1,b_1]$中含有数列$\{x_n\}$中的无穷多项。将

$[a_1,b_1]$ 二等分为两个子区间，则至少存在一个子区间中含有数列 $\{x_n\}$ 中的无穷多项，记该子区间为 $[a_2,b_2]$，则 $[a_2,b_2]\subset[a_1,b_1]$，$b_2-a_2=\frac{b_1-a_1}{2}=M$。

再将 $[a_2,b_2]$ 二等分为两个子区间，则至少存在一个子区间含有数列 $\{x_n\}$ 中的无穷多项，记该子区间为 $[a_3,b_3]$，则 $[a_3,b_3]\subset[a_2,b_2]$，$b_3-a_3=\frac{b_2-a_2}{2}=\frac{M}{2}$，$[a_3,b_3]$ 含有数列 $\{x_n\}$ 中的无穷多项。

重复上述步骤，得到一个闭区间列 $\{[a_n,b_n]\}$，满足

1) $[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n],\ n=1,2,3,\cdots$；

2) $b_n-a_n=\frac{M}{2^{n-2}}\to 0,(n\to\infty)$；

3) $[a_n,b_n]$ 含有数列 $\{x_n\}$ 中的无穷多项，$n=1,2,3,\cdots$

由闭区间套定理，存在唯一的点 $\xi\in[a_n,b_n],\ n=1,2,3,\cdots$。由已知，对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N_1>0$，当 $n,m>N_1$ 时，有 $|x_n-x_m|<\frac{\varepsilon}{2}$。由闭区间套定理，对上述 $\varepsilon>0$，$\exists N_2>0$，当 $n>N_2$ 时，有 $[a_n,b_n]\subset\left(\xi-\frac{\varepsilon}{2},\xi+\frac{\varepsilon}{2}\right)$。取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，则当 $n>N$ 时，在 $[a_n,b_n]$ 中选取 x_m，使得当 $m>N$ 时，有 $|x_n-\xi|=|x_n-x_m|+|x_m-\xi|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$，于是证得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$。

(必要性证明略)

5. 闭区间套定理在闭区间上连续函数性质证明中的应用

本节讨论如何应用闭区间套定理证明闭区间上连续函数的性质，进一步拓展闭区间套定理的应用范围。本节主要基于反证法，从而选择合适的“遗传性质”，并构造相应的区间套。

5.1. 证明闭区间上连续函数的有界性定理

定理 5 [1] 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界。

证明 (反证法)假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无界，记 $[a_1,b_1]=[a,b]$，即 $f(x)$ 在 $[a_1,b_1]$ 上无界。将 $[a_1,b_1]$ 二等分为两个子区间，则至少存在一个子区间，使得 $f(x)$ 在该子区间上无界，记该子区间为 $[a_2,b_2]$，则 $[a_2,b_2]\subset[a_1,b_1]$，$b_2-a_2=\frac{b_1-a_1}{2}=\frac{b-a}{2}$。

再将 $[a_2,b_2]$ 二等分为两个子区间，则至少存在一个子区间，使得 $f(x)$ 在该子区间上无界，记该子区间为 $[a_3,b_3]$，则 $[a_3,b_3]\subset[a_2,b_2]$，$b_3-a_3=\frac{b_2-a_2}{2}=\frac{b-a}{2^2}$，$f(x)$ 在 $[a_3,b_3]$ 上无界。

重复上述步骤，可得一个闭区间列 $\{[a_n,b_n]\}$，满足

1) $[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n],\ n=1,2,3,\cdots$；

2) $b_n-a_n=\frac{b-a}{2^{n-1}}\to 0,\ (n\to\infty)$；

3) $f(x)$ 在 $[a_n,b_n]$ 上无界，$n=1,2,3,\cdots$

由闭区间套定理，存在唯一的点 $\xi\in[a_n,b_n]\subset[a,b],\ n=1,2,3,\cdots$。由 $f(x)$ 在 $x=\xi$ 连续可知，对 $\varepsilon=1$，存在 $\delta>0$，当 $|x-\xi|<\delta$ 时，有 $|f(x)-f(\xi)|<1$，故 $|f(x)|<|f(\xi)|+1$，即 $f(x)$ 在 $(\xi-\delta,\xi+\delta)$ 上有界。当 n 充分大时，有 $[a_n,b_n]\subset(\xi-\delta,\xi+\delta)$，故 $f(x)$ 在 $[a_n,b_n]$ 上有界，矛盾。所以假设错误，即 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界。

5.2. 证明闭区间连续函数的零点定理

定理 6 [1] [4] 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)f(b)<0$，则存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)=0$。

证明 (反证法)假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上没有零点，即 $\forall x\in[a,b]$， $f(x)\neq 0$。

记 $[a_1,b_1]=[a,b]$，即 $f(x)$ 在 $[a_1,b_1]$ 上没有零点。由于 $f(a)f(b)<0$，不妨设 $f(a)>0$， $f(b)<0$，即 $f(a_1)>0$， $f(b_1)<0$。

将 $[a_1,b_1]$ 二等分为两个闭子区间，由于 $f\left(\dfrac{b-a}{2}\right)\neq 0$，故至少存在一个子区间，使得 $f(x)$ 在这个子区间的端点处异号，记这个子区间为 $[a_2,b_2]$，且 $[a_2,b_2]\subset[a_1,b_1]$， $b_2-a_2=\dfrac{b_1-a_1}{2}=\dfrac{b-a}{2}$， $f(a_2)>0$， $f(b_2)<0$。

再将 $[a_2,b_2]$ 二等分为两个子区间，则至少存在一个子区间， $f(x)$ 在这个子区间的端点处异号，记这个子区间为 $[a_3,b_3]$，且 $[a_3,b_3]\subset[a_2,b_2]$， $b_3-a_3=\dfrac{b_2-a_2}{2}=\dfrac{b-a}{2^2}$， $f(a_3)>0$， $f(b_3)<0$。

将上述步骤无限进行下去，得到一个闭区间列 $\{[a_n,b_n]\}$，满足

1) $[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n],\ n=1,2,3,\cdots$；

2) $b_n-a_n=\dfrac{b-a}{2^{n-1}}\to 0,\ (n\to\infty)$；

3) $f(a_n)>0,\ f(b_n)<0$， $n=1,2,3,\cdots$

由闭区间套定理，存在唯一的点 $\xi\in[a_n,b_n]\subset[a,b],\ n=1,2,3,\cdots$。

由于 $f(x)$ 在 $x=\xi$ 连续，则 $f(\xi)=\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)\geq 0$， $f(\xi)=\lim\limits_{n\to\infty}f(b_n)\leq 0$，故 $f(\xi)=0$，这与 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上没有零点矛盾，故假设错误。

所以存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)=0$。

5.3. 证明闭区间连续函数的一致连续定理

定理 7 [1] 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续。

证明 (反证法)假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不一致连续，则存在 $\varepsilon_0>0$，对任意 $\delta>0$，存在 $x_{\delta,1},x_{\delta,2}\in[a,b]$，虽然 $|x_{\delta,1}-x_{\delta,2}|<\delta$，但有 $|f(x_{\delta,1})-f(x_{\delta,2})|\geq\varepsilon_0$。

分别取 $\delta=\dfrac{1}{n}>0$，则存在 $x_{n,1},x_{n,2}\in[a,b]$，虽然 $|x_{n,1}-x_{n,2}|<\dfrac{1}{n}$，但有 $|f(x_{n,1})-f(x_{n,2})|\geq\varepsilon_0$， $n=1,2,3,\cdots$。故无穷数列 $\{x_{n,k}\}$ 满足，对 $\forall n>0$，存在 $x_{n,1},x_{n,2}\in[a,b]$，虽然 $|x_{n,1}-x_{n,2}|<\dfrac{1}{n}$，但是 $|f(x_{n,1})-f(x_{n,2})|\geq\varepsilon_0$， $n=1,2,3,\cdots$。

记 $[a_1,b_1]=[a,b]$，即 $[a_1,b_1]$ 含有数列 $\{x_{n,k}\}$ 中的无穷多项。

将 $[a_1,b_1]$ 二等分为两个闭子区间，故至少存在一个子区间，记这个子区间为 $[a_2,b_2]$， $[a_2,b_2]$ 含有数列 $\{x_{n,k}\}$ 中的无穷多项，且

$$[a_2,b_2]\subset[a_1,b_1]，\ b_2-a_2=\frac{b_1-a_1}{2}=\frac{b-a}{2}。$$

再将 $[a_2,b_2]$ 二等分为两个闭子区间，则至少存在一个子区间，记这个子区间为 $[a_3,b_3]$， $[a_3,b_3]$ 含有数列 $\{x_{n,k}\}$ 中的无穷多项，且

$$[a_3,b_3]\subset[a_2,b_2]，\ b_3-a_3=\frac{b_2-a_2}{2}=\frac{b-a}{2^2}。$$

将上述步骤无限进行下去，得到一个闭区间列$\{[a_n,b_n]\}$，满足

1) $[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]$, $n=1,2,3,\cdots$；

2) $b_n-a_n=\dfrac{b-a}{2^{n-1}}\to 0,\ (n\to\infty)$；

3) $[a_n,b_n]$含有数列$\{x_{n,k}\}$中的无穷多项，$n=1,2,3,\cdots$

由闭区间套定理，存在唯一的点$\xi\in[a_n,b_n]\subset[a,b]$, $n=1,2,3,\cdots$。

由于$f(x)$在$x=\xi$连续，则对上述$\varepsilon_0>0$，存在$\delta>0$，当$|x-\xi|<\delta$时，有$|f(x)-f(\xi)|<\dfrac{\varepsilon_0}{2}$。

当n充分大时，有$[a_n,b_n]\subset(\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon)$，且$\dfrac{1}{n}<\dfrac{\delta}{2}$。

在$[a_n,b_n]$中取出$x_{n,1}$，$x_{n,2}$，则$x_{n,1},x_{n,2}\in(\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon)$，于是有$|f(x_{n,1})-f(x_{n,2})|\le|f(x_{n,1})-f(x_\xi)|+|f(x_{n,2})-f(x_\xi)|<\varepsilon_0$，这与$|f(x_{n,1})-f(x_{n,2})|\ge\varepsilon_0$矛盾。故假设错误，于是$f(x)$在$[a,b]$上一致连续。

6. 结论

上文，我们利用闭区间套定理证明了实数完备性理论中的定理和数学分析中的一些重要的定理。通过上述各命题的证明过程，可以总结出一些利用闭区间套定理证明数学命题的规律和步骤[5]：如果命题要证明的是某个性质p或找到一个具有某种性质p的数，可以通过构造闭区间套，把这个数“套”出来。一般证明的步骤如下：1) 构造一个具有性质p^*的闭区间，性质p^*要根据性质p来确定，并且这个选择出来的性质p^*是可以通过闭区间套遗传下去的；2) 通常采用二分法，将闭区间二等分，则至少有一个闭区间具有性质p^*；重复不断地使用二等分法，构造出一个满足闭区间套条件和具有性质p^*的闭区间列，根据闭区间套定理“套”出数ξ，或者数ξ就是证明所要寻找的点，或者得出具有性质p^*的ξ点的邻域$U(\xi,\delta)$，从而将整个闭区间上所具有性质p^*的问题归结为点ξ邻域$U(\xi,\delta)$的性质，进而证明性质p (往往是得到矛盾)。

闭区间套定理的重要作用在于保持“遗传性质”：通过闭区间套，将闭区间上的整体性质“遗传”到其每一个闭子区间，从而在所“套出”点的局部区域保持这个性质。因而，选择合适的性质作为遗传性质是非常重要的。“无界性”、“无限多个”、“可列性”、“没有零点”等性质是比较适合作为“遗传性质”的。根据问题的需要，我们也经常使用反证法证明诸如“有界”、“一致收敛”等问题，构造具有“无界”、“不一致收敛”等性质的闭区间列。在给定的闭区间上构造闭区间套，常常使用二等分法，也可以使用其他诸如“三等分法”，因此在构造闭区间列时要根据具体情况来定。在数学分析教学和学习的过程中，通过典型例题的讲解，帮助学生掌握构造闭区间套的技巧，选择合适“遗传性质”的方法，从而掌握利用闭区间套定理证明数学命题的方法。

基金项目

国家自然科学基金面上项目(NNSF12171127)；
广东省教育科学规划课题(高等教育专项) (2021GXJK481)；
华南农业大学教育教学研究和改革项目(JG19074)；粤港澳数学中心项目(2020B1515310020)。

参考文献

[1] 华东师范大学数学系. 数学分析(上册) [M]. 第4版. 北京: 高等教育出版社, 2009.

[2] 杨小远, 孙玉泉, 薛玉梅, 等. 闭区间套定理教学研究与实践[J]. 高等数学研究, 2013, 16(4): 83-86.
[3] 万骏. 实数系完备性基本定理的等价性分析[J]. 数学学习与研究, 2019(11): 7.
[4] 郭改慧, 李兵方. 闭区间套定理及其应用[J]. 高师理科学刊, 2014, 34(6): 7-9.
[5] 张珅. 应用闭区间套定理的步骤及方法[J]. 新课程学习(上), 2010(4): 91-92.