

脉冲复杂网络的固定时间聚类同步

庞璐, 于娟

新疆大学, 数学与系统科学学院, 新疆 乌鲁木齐

收稿日期: 2022年3月2日; 录用日期: 2022年4月5日; 发布日期: 2022年4月12日

摘要

本文主要研究脉冲复杂网络的固定时间聚类同步问题。首先根据网络的耦合和聚类表达特性, 提出一类具有脉冲效应的耦合网络模型。其次, 通过设计纯幂律控制策略, 利用脉冲系统的固定时间稳定性理论, 得到脉冲复杂网络的固定时间聚类同步准则, 并有效估计出同步的停息时间。最后通过提供相应的数值实例来验证控制策略和所提同步条件的有效性。

关键词

复杂动态网络, 脉冲, 固定时间, 聚类同步

Fixed-Time Cluster Synchronization for Impulsive Complex Networks

Lu Pang, Juan Yu

College of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang

Received: Mar. 2nd, 2022; accepted: Apr. 5th, 2022; published: Apr. 12th, 2022

Abstract

This paper focuses on the problem of fixed-time cluster synchronization of impulsive complex networks. Firstly, according to the coupling and clustering expression characteristics of networks, a kind of coupling network model with impulsive effect is proposed. Secondly, the fixed-time cluster synchronization criterion of impulsive complex network is obtained by designing a pure power-law control strategy and using the theory of fixed-time stability of impulsive system, and the synchronization settling-time is estimated effectively. Finally, a numerical example is provided to verify the effectiveness of the control strategy and synchronization conditions.

Keywords

Complex Dynamic Networks, Impulse, Fixed-Time, Cluster Synchronization

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

复杂系统——一种由很多子系统相互作用而组成的系统，是 20 世纪 90 年代出现的一门新兴学科。在复杂系统中，如果把子系统抽象为节点，而子系统间的交互作用抽象成节点之间的连边，那么复杂系统就可以抽象成一个复杂网络。研究发现复杂网络模型可以模拟自然界和生物界中相当多真实系统的动态行为，包括电网[1]、通信网络[2]和基因调控网络[3]等。此外，同步作为复杂网络中一个重要且有意义的课题，已经在科学和工程的各个领域受到了广泛的关注，例如化学反应、核磁共振、保密通信、无线传感器等[4]。基于这些事实，探究复杂网络的同步是必要的且具有现实意义。

到目前为止，关于确定性复杂网络的同步研究已有诸多报道[5]。但是，在许多实际系统中总会受到突发噪声、频率变化等引起的各种瞬时干扰，这导致系统在某一时刻的状态会发生突变，我们将这种变化称为脉冲现象。在 1960 年，Miliman 等首次探究了发生脉冲时运动的稳定性[6]，自此脉冲复杂网络引起了不同学科领域的重视，并得到了关于脉冲复杂网络同步的一些成果[7]。值得注意的是，这些研究主要集中在基于传统渐近稳定性理论的渐近或指数同步上，意味着只有当时间趋向于无穷大时，脉冲网络才会达到同步。然而，在通信安全、电网电压调节等实际的物理工程中，为了优化时间和控制成本，往往希望网络可以在有限时间内实现同步。考虑到这一事实，人们提出了各种有限时间控制技术来使脉冲复杂网络实现同步，其中同步时间与网络初始状态、系统参数有关。

遗憾的是，在智能电网、GPS 车辆监控、机器人等许多实际问题中，获取所有系统的初始状态是不现实的，从而就难以判断网络是否可以实现有限时间同步。为了消除对初始状态的依赖，在[8] [9]中相继研究了非线性系统的固定时间稳定性，其中停息时间的上界仅依赖于系统参数。此外，脉冲系统的固定时间稳定性条件也被建立[10]。固定时间同步问题作为固定时间稳定性的一个重要课题，已经引起学者们的关注[11] [12] [13] [14] [15]，与渐近同步相比，固定时间控制方法提高了同步速率，与有限时间同步相比，固定时间控制方法避免了同步时间与初始状态之间的相关性。特别地，在[12]中应用固定时间稳定性理论和固定时间控制协议对脉冲复杂网络的同步进行了分析，其中同步时间的估计比[11]中的更精确。此外，基于 Filipov 解意义分别在实值域[13]和复值域[14]上建立了脉冲忆阻网络的固定时间同步条件。最近，在文献[15]中通过设计长期记忆和短期记忆两种控制方案，研究了脉冲竞争网络的固定时间同步问题。然而，脉冲复杂网络的固定时间同步研究仍处于起步阶段，许多相关的问题仍有待解决。

另外，人类对生物网络、交通网络、社交网络等多种网络的研究中发现，要实现所有节点的完全同步是非常困难的，而且往往也没有必要让所有耦合的节点都趋向于一个相同的状态。因此，这种不完全同步，即聚类同步，引起了学者的广泛关注。近年来，研究人员对复杂网络的聚类同步进行了广泛的研究。例如，在[16]中利用牵制模糊控制器分析了具有非连续子系统和耦合时滞的 T-S 模糊复杂网络的有限时间聚类同步问题。文献[17]中设计了量化控制器，并利用固定时间控制技术研究了复杂网络的聚类随机同步。但显然，上述工作并未考虑脉冲，而实际上脉冲对网络动态行为产生的影响是不可避免的。基于

此, 在[18]中研究了具有延迟耦合且节点不一致的复杂动态网络的指数聚类同步问题。文献[19]利用时滞牵制脉冲控制方法研究了具有噪声和时变时滞的复杂动态网络的聚类同步问题, 成功地解决了存在脉冲输入时延的问题。然而, 脉冲复杂网络的固定时间聚类同步还未被涉及, 有待我们进一步探究。

基于上述分析, 本文将探讨具有脉冲扰动的耦合网络固定时间聚类同步问题。本文的创新点主要体现在两个方面。第一, 基于网络的耦合和聚类表达特性, 提出具有脉冲效应的耦合网络模型, 该模型比[16][17][18][19]中的模型更符合实际。第二, 设计纯幂律的固定时间控制策略, 并通过构造 1-范数意义下的 Lyapunov 函数, 获得脉冲复杂网络固定时间聚类同步的判别准则。

其余工作安排如下。第 2 节给出了脉冲复杂网络的模型和一些相关的定义、引理及假设。第 3 节研究了具有脉冲效应的耦合网络固定时间聚类同步问题。第 4 节通过数值算例验证了理论结果的有效性。最后, 对本文的研究结果进行总结, 并对相关问题进行展望。

符号说明: N_+ 是正整数集; R 表示实数集; R^n 是 n 维 Euclidean 空间; $R^{n \times m}$ 是 $n \times m$ 维实空间; \bar{m} 表示集合 $\{1, 2, \dots, m\}$, $m \in N_+$; 对于矩阵 A , A^T 是矩阵 A 的转置, $\lambda_{\max}(A)$ 是 A 的最大特征值; $\text{diag}\{\cdot\}$ 表示对角阵; $\mathbf{1}_n$ 是 n 维全 1 列向量; I_m 表示 m 维单位矩阵; $\text{sign}(\cdot)$ 是符号函数; 对于任意向量 $z = (z_1, \dots, z_n)^T \in R^n$, 其 1-范数表示为 $\|z\|_1 = |z_1| + \dots + |z_n|$, 且 $[z]^\theta = (\text{sign}(z_1)|z_1|^\theta, \dots, \text{sign}(z_n)|z_n|^\theta)^T, \theta > 0$ 。

2. 预备知识

2.1. 模型描述

本节研究包含 N 个不相同节点和 w 个团的具有脉冲效应的复杂动态网络模型:

$$\begin{cases} \dot{z}_q(t) = D^r z_q(t) + f^r(z_q(t)) + s^r \sum_{j \in I_r} c_{qj} \Gamma z_j(t) + \sum_{l=1, l \neq r}^w b^l \sum_{j \in I_l} c_{qj} \Phi^l z_j(t) + u_q(t), t \neq t_k, t \geq 0, \\ \Delta z_q(t_k) = \eta_k^r z_q(t_k^-), k \in N_+, q \in I_r, r \in \bar{w}, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $z_q(t) = (z_{q1}(t), \dots, z_{qn}(t))^T \in R^n$ 表示节点 q 在 t 时的 n 为状态变量; $I_r = \{m_{r-1} + 1, m_{r-1} + 2, \dots, m_r\}$ 是第 r 个团中所有节点的索引集, 且 $m_0 = 0, m_w = N$; $f^r(z_q(t)) = (f_1^r(z_q(t)), \dots, f_n^r(z_q(t)))^T$ 表示 I_r 中的自身动力学; $D^r = \text{diag}\{d_1^r, \dots, d_n^r\}$ 是第 r 个团的自抑制矩阵; $s^r > 0$ 和 $b^l > 0$ 分别代表第 r 个团的内部耦合强度和第 r 个团与第 l 个团之间的耦合强度; $\Gamma = \text{diag}\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\} > 0$ 是第 r 个团内的内部耦合矩阵; $\Phi^l = \text{diag}\{\phi_1^l, \dots, \phi_n^l\} > 0$ 表示第 r 个团与第 l 个团之间的内部耦合矩阵; $C = (c_{ij})_{N \times N}$ 是外部耦合矩阵; $u_q(t)$ 是在第 q 个节点施加的控制输入; $\{t_k, k \in N_+\}$ 是一个严格递增的脉冲时间序列; η_k^r 表示脉冲强度; $\Delta z_q(t_k) = z_q(t_k^+) - z_q(t_k^-)$, $z_q(t_k^+) = \lim_{t \rightarrow t_k^+} z_q(t)$, $z_q(t_k^-) = \lim_{t \rightarrow t_k^-} z_q(t)$, 不失一般性, 我们假设 $z_q(t)$ 在 $t = t_k$ 是右连续的, 即 $z_q(t_k^+) = z_q(t_k)$ 。

耦合网络(1)的同步状态轨迹 $v^r(t)$ 满足如下方程:

$$\begin{cases} \dot{v}^r(t) = D^r v^r(t) + f^r(v^r(t)), t \neq t_k, t \geq 0, \\ \Delta v^r(t_k) = \eta_k^r v^r(t_k^-), k \in N_+, r \in \bar{w}, \end{cases} \quad (2)$$

其中 $v^r(t) = (v_1^r(t), \dots, v_n^r(t))^T \in R^n$ 表示第 r 个团的状态变量。

2.2. 定义、引理及假设

为了得到主要结果, 下面介绍一些必要的定义、引理和假设。

定义 1. [16] 对于矩阵 $C = (c_{ij})_{M \times M}$, 如果 $c_{ij} \geq 0, i \neq j$ 且 $c_{ii} = -\sum_{j=1, j \neq i}^M c_{ij}, i = 1, \dots, M$, 则称 C 属于类 C_1 ,

记为 $C \in \mathbf{C}_1$ 。

此外, 如果不可约矩阵 $C \in \mathbf{C}_1$ 且 $c_{ij} = c_{ji} \geq 0, i \neq j$, 则称 C 属于类 \mathbf{C}_2 , 记为 $C \in \mathbf{C}_2$ 。

定义 2. [16] 对于矩阵 $C = (c_{ij})_{M_1 \times M_2}$, 如果 $\sum_{j=1}^{M_2} c_{ij} = 0, i = 1, \dots, M_1$, 则称 C 属于类 \mathbf{C}_3 , 记为 $C \in \mathbf{C}_3$ 。

记

$$Z(t) = (z_1^T(t), \dots, z_{m_1}^T(t), \dots, z_{m_w-1}^T(t), \dots, z_{m_w}^T(t))^T,$$

$$V(t) = \left(\underbrace{(v^1(t))^T, \dots, (v^1(t))^T}_{m_1}, \dots, \underbrace{(v^w(t))^T, \dots, (v^w(t))^T}_{m_w - m_{w-1}} \right)^T.$$

定义 3. [17] 如果期望状态 $v^r(t)$ 满足

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|v^l(t) - v^r(t)\|_p \neq 0, l, r \in \bar{w}, l \neq r, p = 1, 2,$$

并且对于系统(1)和(2)开始于不同初始值 ζ 和 ϑ 的任意解 $Z(t)$ 和 $V(t)$, 如果存在实数 $T^*(\zeta, \vartheta) \geq 0$ 使得

$$\lim_{t \rightarrow T^*(\zeta, \vartheta)} \sum_{r=1}^w \sum_{q \in I_r} \|z_q(t) - v^r(t)\|_p = 0,$$

$$\sum_{r=1}^w \sum_{q \in I_r} \|z_q(t) - v^r(t)\|_p = 0, t \geq T^*(\zeta, \vartheta),$$

且存在另一个实数 $T_{\max} > 0$ 使得对任意的 $\zeta, \vartheta \in R^{nN}$, $T^*(\zeta, \vartheta) \leq T_{\max}$, 则称脉冲网络(1)在固定时间内同步到其期望状态。另外, 称

$$T(\zeta, \vartheta) = \inf \left\{ T^*(\zeta, \vartheta) \geq 0 : \sum_{r=1}^w \sum_{q \in I_r} \|z_q(t) - v^r(t)\|_p = 0, t \geq T^*(\zeta, \vartheta) \right\}$$

为聚类同步时间。

定义 4. [17] 定义在 R^n 上的标量函数 $V(y(t)) \in \widehat{V}$, 如果(i) 它关于 y 是局部 Lipschitzian 且 $V(0) = 0$; (ii) 它是正定和径向无界的; (iii) 他在区间 $[t_{k-1}, t_k), k \in N_+$ 是连续的, 并且 $\lim_{t \rightarrow t_k^-} V(y(t)) = V(y(t_k^-))$ 。

引理 1. [7] 假设 $\phi, \psi \in R^n$ 且常数 $\nu > 0$, 那么

$$2\phi^T \psi \leq \nu \phi^T \phi + \frac{1}{\nu} \psi^T \psi.$$

引理 2. [15] 假设对任意的 $q \in \bar{n}$, $x_q \geq 0$, $\omega > 1$, 则

$$\sum_{q \in \bar{n}} x_q^\nu \geq \left(\sum_{q \in \bar{n}} x_q \right)^\nu, \quad \sum_{q \in \bar{n}} x_q^\omega \geq n^{1-\omega} \left(\sum_{q \in \bar{n}} x_q \right)^\omega.$$

考虑如下脉冲系统

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = h(y(t)), & t \neq t_k, \\ \Delta y(t_k) = \Phi(y(t_k^-)), & k \in N_+, \end{cases} \quad (3)$$

其中 $y \in R^n$, $h: R^n \rightarrow R^n$ 和 $\Phi: R^n \rightarrow R^n$ 是连续函数, $h(0) = 0$ 且 $\Phi(0) = 0$ 。

引理 3. [17]考虑系统(3), 假设存在函数 $V(y(t)) \in \widehat{V}$, $\xi, \pi > 0$, $\rho > 1$ 和 $\sigma, \eta \in (0, 1)$, 使得

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}V(y(t)) \leq -\xi V^\rho(y(t)) - \pi V^\sigma(y(t)), t \neq t_k, t \geq 0, \\ V(y(t_k)) \leq \eta V(y(t_k^-)), k \in N_+, \end{cases}$$

那么对任意的 $t \geq T_1$, $y(t) = 0$, 其中

$$T_1 = \frac{\tau_{\max}}{(1-\sigma)\ln \eta} \ln \left(\frac{\pi \tau_{\min}}{\pi \tau_{\min} - \eta^{\sigma-1} \ln \eta} \right) + \frac{\tau_{\max}}{(1-\rho)\ln \eta} \ln \left(1 - \frac{\eta^{1-\rho} \ln \eta}{\xi \tau_{\max}} \right).$$

引理 4. 对于系统(3), 假设存在函数 $V(y(t)) \in \widehat{V}$, $0 < \kappa < \min\{\xi, \pi\}$, $\rho > 1$ 和 $\sigma, \eta \in (0, 1)$, 使得

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}V(y(t)) \leq \kappa V(y(t)) - \xi V^\rho(y(t)) - \pi V^\sigma(y(t)), t \neq t_k, t \geq 0, \\ V(y(t_k)) \leq \eta V(y(t_k^-)), k \in N_+, \end{cases}$$

那么对任意的 $t \geq T_2$, $y(t) = 0$, 且停息时间 T_2 满足

$$T_2 = \frac{\tau_{\max}}{(1-\sigma)\ln \eta} \ln \left(\frac{(\pi - \kappa) \tau_{\min}}{(\pi - \kappa) \tau_{\min} - \eta^{\sigma-1} \ln \eta} \right) + \frac{\tau_{\max}}{(1-\rho)\ln \eta} \ln \left(1 - \frac{\eta^{1-\rho} \ln \eta}{(\xi - \kappa) \tau_{\max}} \right).$$

证明: 当 $t \neq t_k$ 时, 记 $\Xi(V) = -\kappa V + \xi V^\rho + \pi V^\sigma$, 由条件 $0 < \kappa < \min\{\xi, \pi\}$ 有

$$\begin{cases} \Xi(V) \geq \xi V^\rho + (\pi - \kappa) V^\sigma > 0, 0 < V \leq 1, \\ \Xi(V) \geq (\xi - \kappa) V^\rho + \pi V^\sigma > 0, V > 1, \end{cases}$$

这说明对所有 $V > 0$, 有 $\xi(V) > 0$ 。类似于引理 3 的证明可知, 对任意的 $t \geq T_2$, 有 $V(y(t)) = 0$ 和 $y(t) = 0$ 。

假设 1. 耦合矩阵 C 满足

$$C = \begin{pmatrix} C^{11} & C^{12} & \dots & C^{1w} \\ C^{21} & C^{22} & \dots & C^{2w} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C^{w1} & C^{w2} & \dots & C^{ww} \end{pmatrix},$$

其中 $C^{rr} \in R^{(m_r - m_{r-1}) \times (m_r - m_{r-1})}$ 属于 C_2 , $C^{rl} \in R^{(m_r - m_{r-1}) \times (m_l - m_{l-1})}$ 属于 C_3 , $r, l \in \bar{w}$ 且 $r \neq l$ 。

假设 2. 对 $p = 1, 2$, 存在正实数 ϖ_p^r 且使得对任意的 $\mu, \nu \in R^n$, 有

$$\|f^r(\mu) - f^r(\nu)\|_p \leq \varpi_p^r \|\mu - \nu\|_p.$$

3. 主要结果及证明

在本节中, 我们提出了一些新的充分条件来保证网络(1)的固定时间聚类同步。首先, 从假设 1 可以很容易看出 $\sum_{j \in I_r} c_{qj} \Gamma v^r(t) = \sum_{j \in I_l} c_{qj} \Phi^l v^l(t) = \mathbf{0}_n$ 。对任意的 $q \in I_r, r \in \bar{w}$, 我们定义同步误差为

$\varepsilon_q^r(t) = z_q(t) - v^r(t) = (\varepsilon_{q1}^r(t), \dots, \varepsilon_{qn}^r(t))^T$ 。因此得到

$$\sum_{j \in I_r} c_{qj} \Gamma z_j(t) = \sum_{j \in I_r} c_{qj} \Gamma ((z_j(t) - v^r(t)) + v^r(t)) = \sum_{j \in I_r} c_{qj} \Gamma \varepsilon_j^r(t),$$

和

$$\sum_{l=1, l \neq r}^w b^l \sum_{j \in I_l} c_{qj} \Phi^l z_j(t) = \sum_{l=1, l \neq r}^w b^l \sum_{j \in I_l} c_{qj} \Phi^l \varepsilon_j^l(t).$$

然后从(1)和(2)得出

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_q^r(t) = D^r \varepsilon_q^r(t) + f^r(\varepsilon_q^r(t)) + s^r \sum_{j \in I_r} c_{qj} \Gamma \varepsilon_j^r(t) + \sum_{l=1, l \neq r}^w b^l \sum_{j \in I_l} c_{qj} \Phi^l \varepsilon_j^l(t) + u_q(t), & t \neq t_k, t \geq 0, \\ \varepsilon_q^r(t_k) = (1 + \eta_k^r) \varepsilon_q^r(t_k^-), & k \in N_+, q \in I_r, r \in \bar{w}, \end{cases} \quad (4)$$

其中 $f^r(\varepsilon_q^r(t)) = f^r(z_q(t)) - f^r(v^r(t))$ 。

为了实现(1)的固定时间聚类同步, 设计一个简单的控制策略:

$$u_q(t) = -\beta_1 [\varepsilon_q^r(t)]^{\theta_1} - \beta_2 [\varepsilon_q^r(t)]^{\theta_2}, \quad q \in I_r, r \in \bar{w}, \quad (5)$$

其中 $\beta_1, \beta_2 > 0, 0 < \theta_1 < 1, \theta_2 > 1$ 。

此外, 还需引入以下记号:

$$\begin{aligned} e_\ell(t) &= (|e_{1\ell}(t)|, \dots, |e_{m_1\ell}(t)|, \dots, |e_{(m_{w-1}+1)\ell}(t)|, \dots, |e_{N\ell}(t)|)^T \\ &= (|\varepsilon_{1\ell}^1(t)|, \dots, |\varepsilon_{m_1\ell}^1(t)|, \dots, |\varepsilon_{(m_{w-1}+1)\ell}^w(t)|, \dots, |\varepsilon_{m_w\ell}^w(t)|)^T, \\ \hat{E} &= \text{diag} \left\{ \sqrt{|e_{1\ell}(t)|}, \dots, \sqrt{|e_{N\ell}(t)|} \right\}, \quad \check{E} = \left(\sqrt{|e_{1\ell}(t)|}, \dots, \sqrt{|e_{N\ell}(t)|} \right)^T, \\ Y &= \left(\sqrt{|e_{1\ell}(t)|} \sum_{q=1}^N \tilde{c}_{q1}, \dots, \sqrt{|e_{N\ell}(t)|} \sum_{q=1}^N \tilde{c}_{qN} \right)^T, \\ \tilde{C} &= \begin{pmatrix} \tilde{C}^{11} & \tilde{C}^{12} & \dots & \tilde{C}^{1w} \\ \tilde{C}^{21} & \tilde{C}^{22} & \dots & \tilde{C}^{2w} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{C}^{w1} & \tilde{C}^{w2} & \dots & \tilde{C}^{ww} \end{pmatrix} = (\tilde{c}_{qj})_{N \times N}, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{qj} &= \begin{cases} s^r c_{qj}, & q \in I_r, j \in I_r, \\ \frac{b^l \phi^l}{\gamma} |c_{qj}|, & q \in I_r, j \in I_l, r \neq l, \end{cases} \\ d &= \max_{r \in \bar{w}, \ell \in \bar{n}} \{d_\ell^r\}, \quad \varpi_1 = \max_{r \in \bar{w}} \{\varpi_1^r\}, \quad \phi^l = \max_{\ell \in \bar{n}} \{\phi_\ell^l\}, \\ \gamma &= \min_{\ell \in \bar{n}} \{\gamma_\ell\}, \quad \bar{\kappa} = \max_{j \in N, \ell \in \bar{n}} \left\{ d + \varpi_1 + \frac{1}{2\nu} \gamma_\ell \left(\sum_{q=1}^N \tilde{c}_{qj} \right)^2 + \frac{\nu}{2} \gamma_\ell \right\}, \\ \bar{\xi} &= \beta_2 (nN)^{1-\theta_2}, \quad \bar{\eta} = \sup_{r \in \bar{w}, k \in N_+} \{1 + \eta_k^r\}. \end{aligned}$$

定理 1. 基于假设 1~2 和控制协议(5), 如果 $0 < \bar{\eta} < 1$, 那么系统(1)和系统(2)是固定时间聚类同步的, 并且同步时间估计为

$$T(\zeta, \vartheta) = \begin{cases} \bar{T}_1 = \frac{\tau_{\max}}{(1-\theta_1)\ln \bar{\eta}} \ln \left(\frac{\beta_1 \tau_{\min}}{\beta_1 \tau_{\min} - \bar{\eta}^{\theta_1-1} \ln \bar{\eta}} \right) \\ \quad + \frac{\tau_{\max}}{(1-\theta_2)\ln \bar{\eta}} \ln \left(1 - \frac{\bar{\eta}^{1-\theta_2} \ln \bar{\eta}}{\bar{\xi} \tau_{\max}} \right), \bar{\kappa} \leq 0, \\ \bar{T}_2 = \frac{\tau_{\max}}{(1-\theta_1)\ln \bar{\eta}} \ln \left(\frac{(\beta_1 - \bar{\kappa}) \tau_{\min}}{(\beta_1 - \bar{\kappa}) \tau_{\min} - \bar{\eta}^{\theta_1-1} \ln \bar{\eta}} \right) \\ \quad + \frac{\tau_{\max}}{(1-\theta_2)\ln \bar{\eta}} \ln \left(1 - \frac{\bar{\eta}^{1-\theta_2} \ln \bar{\eta}}{(\bar{\xi} - \bar{\kappa}) \tau_{\max}} \right), 0 < \bar{\kappa} < \min\{\bar{\xi}, \beta_1\}. \end{cases}$$

证明: 构造如下 Lyapunov 函数

$$V(\varepsilon(t)) = \sum_{r=1}^w \sum_{q \in I_r} \|\varepsilon_q^r(t)\|.$$

根据误差系统(4)可知, 当 $t \neq t_k$ 时, 对任意的 $\varepsilon(t) \in R^{nw} \setminus \{0\}$, 有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(\varepsilon(t)) &= \sum_{r=1}^w \sum_{q \in I_r} \text{sign}^T(\varepsilon_q^r(t)) \left(D^r \varepsilon_q^r(t) + f^r(\varepsilon_q^r(t)) + s^r \sum_{j \in I_r} c_{qj} \Gamma \varepsilon_j^r(t) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=1, l \neq r}^w b^l \sum_{j \in I_l} c_{qj} \Phi^l \varepsilon_j^l(t) - \beta_1 [\varepsilon_q^r(t)]^{\theta_1} - \beta_2 [\varepsilon_q^r(t)]^{\theta_2} \right). \end{aligned} \tag{6}$$

下面, 同步不等式技巧逐一分析(6)式右端各项. 首先,

$$\begin{aligned} &\sum_{r=1}^w \sum_{q \in I_r} \text{sign}^T(\varepsilon_q^r(t)) D^r \varepsilon_q^r(t) \\ &= \sum_{r=1}^w \sum_{q \in I_r} \sum_{\ell=1}^n d_\ell^r |\varepsilon_{q\ell}^r(t)| \\ &\leq d \sum_{r=1}^w \sum_{q \in I_r} \sum_{\ell=1}^n |\varepsilon_{q\ell}^r(t)| \\ &= d \sum_{j=1}^N \sum_{\ell=1}^n |e_{j\ell}(t)|. \end{aligned} \tag{7}$$

从假设 2 可知,

$$\begin{aligned} &\sum_{r=1}^w \sum_{q \in I_r} \text{sign}^T(\varepsilon_q^r(t)) f^r(\varepsilon_q^r(t)) \\ &\leq \sum_{r=1}^w \sum_{q \in I_r} \varpi_1^r \|\varepsilon_q^r(t)\| \\ &\leq \varpi_1 \sum_{r=1}^w \sum_{q \in I_r} \sum_{\ell=1}^n |\varepsilon_{q\ell}^r(t)| \\ &= \varpi_1 \sum_{j=1}^N \sum_{\ell=1}^n |e_{j\ell}(t)|. \end{aligned} \tag{8}$$

此外,

$$\begin{aligned}
 & \sum_{r=1}^w \sum_{q \in I_r} \sum_{j \in I_r} s^r \text{sign}^T(\varepsilon_q^r(t)) c_{qj} \Gamma \varepsilon_j^r(t) + \sum_{r=1}^w \sum_{q \in I_r} \sum_{l=1, l \neq r}^w \sum_{j \in I_l} b^l \text{sign}^T(\varepsilon_q^r(t)) c_{qj} \Phi^l \varepsilon_j^l(t) \\
 &= \sum_{r=1}^w \sum_{q \in I_r} \sum_{j \in I_r} s^r c_{qj} \gamma_\ell \text{sign}(\varepsilon_{q\ell}^r(t)) \varepsilon_{j\ell}^r(t) + \sum_{r=1}^w \sum_{q \in I_r} \sum_{l=1, l \neq r}^w \sum_{j \in I_l} b^l c_{qj} \phi_\ell^l \text{sign}(\varepsilon_{q\ell}^r(t)) \varepsilon_{j\ell}^l(t) \\
 &\leq \sum_{r=1}^w \sum_{q \in I_r} \sum_{j \in I_r} s^r \gamma_\ell c_{qj} |\varepsilon_{j\ell}^r(t)| + \sum_{r=1}^w \sum_{q \in I_r} \sum_{l=1, l \neq r}^w \sum_{j \in I_l} b^l \phi_\ell^l |c_{qj}| |\varepsilon_{j\ell}^l(t)| \\
 &\leq \sum_{\ell=1}^n \gamma_\ell \sum_{r=1}^w \sum_{q \in I_r} \sum_{j \in I_r} s^r c_{qj} |\varepsilon_{j\ell}^r(t)| + \sum_{\ell=1}^n \gamma_\ell \sum_{r=1}^w \sum_{q \in I_r} \sum_{l=1, l \neq r}^w \sum_{j \in I_l} \frac{b^l \phi_\ell^l}{\gamma} |c_{qj}| |\varepsilon_{j\ell}^l(t)| \\
 &= \sum_{\ell=1}^n \gamma_\ell \sum_{r=1}^w \sum_{q \in I_r} \sum_{l=1}^n \sum_{j \in I_l} \tilde{c}_{qj} |\varepsilon_{j\ell}^l(t)| = \sum_{\ell=1}^n \gamma_\ell \sum_{q=1}^N \sum_{j=1}^N \tilde{c}_{qj} |e_{j\ell}(t)| \\
 &= \sum_{\ell=1}^n \gamma_\ell \mathbf{1}_N^T \tilde{C} e_\ell(t) = \sum_{\ell=1}^n \gamma_\ell (\hat{E} \tilde{C}^T \mathbf{1}_N)^T \tilde{E} \\
 &\leq \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^n \gamma_\ell \left(\frac{1}{\nu} (\hat{E} \tilde{C}^T \mathbf{1}_N)^T \hat{E} \tilde{C}^T \mathbf{1}_N + \nu \sum_{q=1}^N |e_{q\ell}(t)| \right) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^n \gamma_\ell \left(\frac{1}{\nu} Y^T Y + \nu \sum_{q=1}^N |e_{q\ell}(t)| \right) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^n \gamma_\ell \left(\frac{1}{\nu} \sum_{j=1}^N |e_{j\ell}(t)| \left(\sum_{q=1}^N \tilde{c}_{qj} \right)^2 + \nu \sum_{q=1}^N |e_{q\ell}(t)| \right) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{\ell=1}^n \gamma_\ell |e_{j\ell}(t)| \left(\frac{1}{\nu} \left(\sum_{q=1}^N \tilde{c}_{qj} \right)^2 + \nu \right).
 \end{aligned} \tag{9}$$

另外, 从引理 2 可以得到

$$\begin{aligned}
 & -\beta_1 \sum_{r=1}^w \sum_{q \in I_r} \text{sign}^T(\varepsilon_q^r(t)) [\varepsilon_q^r(t)]^{\theta_1} \\
 &= -\beta_1 \sum_{r=1}^w \sum_{q \in I_r} \sum_{\ell=1}^n |\varepsilon_{q\ell}^r(t)|^{\theta_1} \\
 &\leq -\beta_1 \left(\sum_{r=1}^w \sum_{q \in I_r} \sum_{\ell=1}^n |\varepsilon_{q\ell}^r(t)| \right)^{\theta_1} \\
 &= -\beta_1 V^{\theta_1}(\varepsilon(t)),
 \end{aligned} \tag{10}$$

和

$$\begin{aligned}
 & -\beta_2 \sum_{r=1}^w \sum_{q \in I_r} \text{sign}^T(\varepsilon_q^r(t)) [\varepsilon_q^r(t)]^{\theta_2} \\
 &= -\beta_2 \sum_{r=1}^w \sum_{q \in I_r} \sum_{\ell=1}^n |\varepsilon_{q\ell}^r(t)|^{\theta_2} \\
 &\leq -\beta_2 (nN)^{1-\theta_2} V^{\theta_2}(\varepsilon(t)).
 \end{aligned} \tag{11}$$

因此,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(\varepsilon(t)) &\leq \sum_{j=1}^N \sum_{\ell=1}^n \left(d + \varpi_1 + \frac{1}{2\nu} \gamma_\ell \left(\sum_{q=1}^N \tilde{c}_{qj} \right)^2 + \frac{\nu}{2} \gamma_\ell \right) |e_{j\ell}(t)| \\ &\quad - \beta_1 V^{\theta_1}(\varepsilon(t)) - \beta_2 (nN)^{1-\theta_2} V^{\theta_2}(\varepsilon(t)) \\ &\leq \bar{\kappa} V(\varepsilon(t)) - \beta_1 V^{\theta_1}(\varepsilon(t)) - \bar{\xi} V^{\theta_2}(\varepsilon(t)). \end{aligned}$$

另外, 对于 $t = t_k$ 时, 我们有

$$V(\varepsilon(t_k)) = \sum_{r=1}^w \sum_{q \in I_r} \left\| (1 + \eta_{qk}^r) \varepsilon_q^r(t_k^-) \right\| \leq \bar{\eta} V(\varepsilon(t_k^-)).$$

基于上述的讨论, 如果 $\bar{\kappa} \leq 0$, 那么根据引理 3 可知系统(1)在固定时间 \bar{T}_1 内可以实现聚类同步。当 $0 < \bar{\kappa} < \min\{\bar{\xi}, \beta_1\}$ 时, 利用引理 4 可以确保网络(1)在固定时间 \bar{T}_2 内聚类同步到系统(2)。证毕。

4. 数值模拟

考虑一类由 12 个节点和 3 个集群组成的耦合脉冲网络, 其动力学行为描述为:

$$\begin{cases} \dot{z}_q(t) = D^r z_q(t) + f^r(z_q(t)) + s^r \sum_{j \in I_r} c_{qj} \Gamma z_j(t) + \sum_{l=1, l \neq r}^3 b^l \sum_{j \in I_l} c_{qj} \Phi^l z_j(t) + u_q(t), & t \neq t_k, t \geq 0, \\ \Delta z_q(t_k) = \eta_k^r z_q(t_k^-), & k \in N_+, q \in I_r, r=1,2,3, \end{cases} \quad (12)$$

其中 $z_q(t) = (z_{q1}(t), z_{q2}(t), z_{q3}(t))^T$, $I_1 = \{1, 2, 3, 4\}$, $I_2 = \{5, 6, 7, 8\}$, $I_3 = \{9, 10, 11, 12\}$, $D^1 = \text{diag}\{-1, -1, -3\}$, $D^2 = -E_3$, $D^3 = \text{diag}\{-5, -4, -3\}$, $s^1 = 0.5$, $s^2 = 1$, $s^3 = 0.8$, $b^1 = 2.6$, $b^3 = 2.8$, $\Gamma = E_3$, $\Phi^1 = 1.5E_3$, $\Phi^2 = 2E_3$, $\Phi^3 = E_3$, η_k^r 从 $(-2, -1) \cup (-1, 0)$ 中任意取值。此外, I_1 的自身动力学为:

$$f^1(z_q(t)) = A g(z_q(t)) = A(g_1(z_{q1}(t)), g_2(z_{q2}(t)), g_3(z_{q3}(t)))^T,$$

其中 $g_\ell(v) = 0.5(|v+1| - |v-1|)$, $\ell = 1, 2, 3$, 且

$$A = \begin{pmatrix} -1.25 & -3.2 & -3.2 \\ -3.2 & 1.1 & -4.4 \\ -3.2 & 4.4 & 1 \end{pmatrix}.$$

I_2 的自身动力学为:

$$f^2(z_q(t)) = \begin{pmatrix} -2.2z_{q1}(t) - 5z_{q2}(t) + h(z_{q1}(t)) \\ 2z_{q1}(t) - z_{q2}(t) + z_{q3}(t) \\ z_{q1}(t) - z_{q2}(t) \end{pmatrix},$$

其中 $h(v) = 2.95(|v+1| - |v-1|)$ 。 I_3 的自身动力学为:

$$f^3(z_q(t)) = B \rho(z_q(t)) = B(\rho_1(z_{q1}(t)), \rho_2(z_{q2}(t)), \rho_3(z_{q3}(t)))^T,$$

其中 $\rho_\ell(v) = \tanh(v)$, $\ell = 1, 2, 3$, 且

$$B = \begin{pmatrix} 2.2 & 3.2 & -0.1 \\ -3 & 1 & -3.7 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

网络(12)的拓扑结构及其耦合权重如图 1 所示。

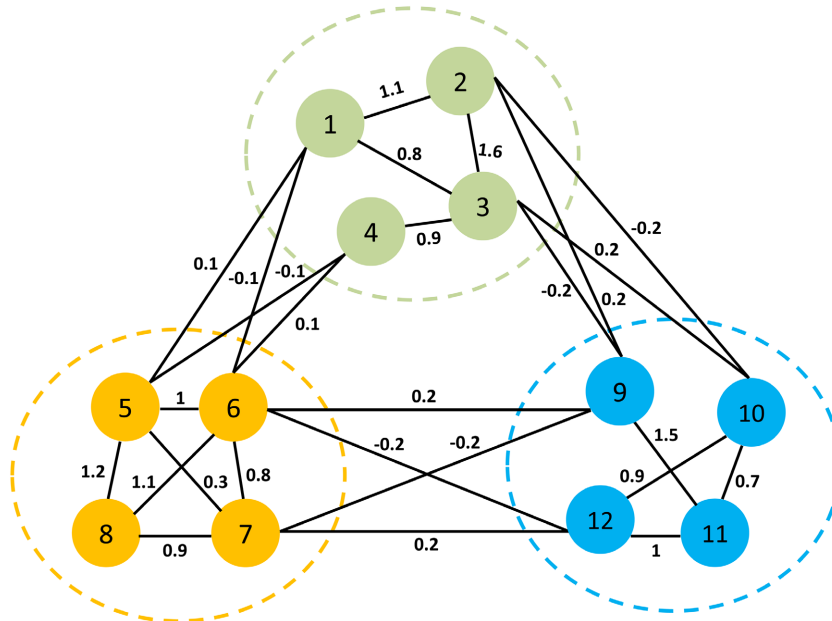


Figure 1. Curve: Topology structure of impulsive network
图 1. 脉冲网络(12)的拓扑结构

期望状态的动力学行为表示为:

$$\begin{cases} \dot{v}^r(t) = D^r v^r(t) + f^r(v^r(t)), & t \neq t_k, t \geq 0, \\ \Delta v^r(t_k) = \eta_k^r v^r(t_k^-), & k \in N_+, r = 1, 2, 3, \end{cases} \quad (13)$$

并且其相图如图 2~4 所示, 其中初始状态分别为 $v^1(0) = (-0.3, 0.1, 0.2)^T$, $v^2(0) = (-0.8, 0.5, -1.1)^T$ 和 $v^3(0) = (1.3, -0.7, 1.1)^T$ 。

如果没有对网络(12)施加控制, 即 $u_q(t) = 0$, 那么 $z_q(t)$ 的演化过程如图 5~7 所示, 这说明系统(12)不能实现聚类同步。之后, 我们将基于控制方案(5)来考虑系统(12)和系统(13)的固定时间聚类同步。由简单的计算可知, $\omega_1^1 = 8.7$, $\omega_1^2 = 7$, $\omega_1^3 = 8.2$, $\bar{\kappa} = 11.94$ 。选取参数 $\beta_1 = 12$, $\beta_2 = 25$, $\theta_1 = 0.7$, $\theta_2 = 1.2$, $\tau_{\min} = 0.08$, $\tau_{\max} = 0.1$, 则条件 $0 < \bar{\kappa} < \min\{\bar{\xi}, \beta_1\}$ 满足。那么根据定理 1 可知, 系统(12)和系统(13)将在固定时间 $\bar{t}_2 = 3.1512$ 内实现聚类同步。仿真结果如图 8~10 所示。

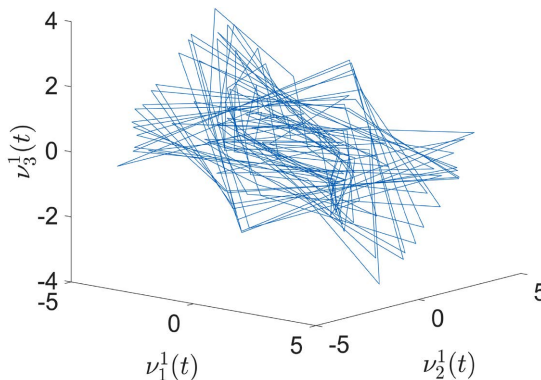


Figure 2. Curve: Phase diagram of $v^1(t)$
图 2. $v^1(t)$ 的相图

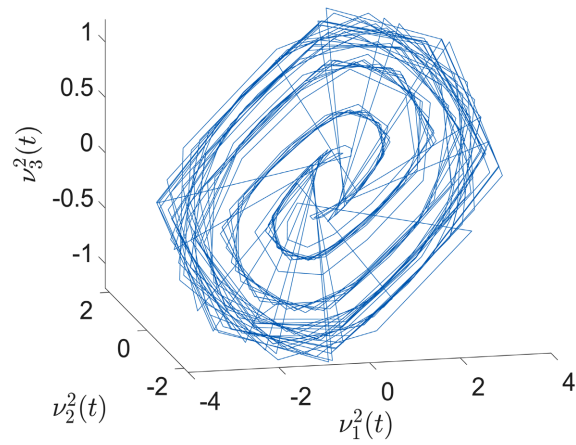


Figure 3. Curve: Phase diagram of $v^2(t)$

图 3. $v^2(t)$ 的相图

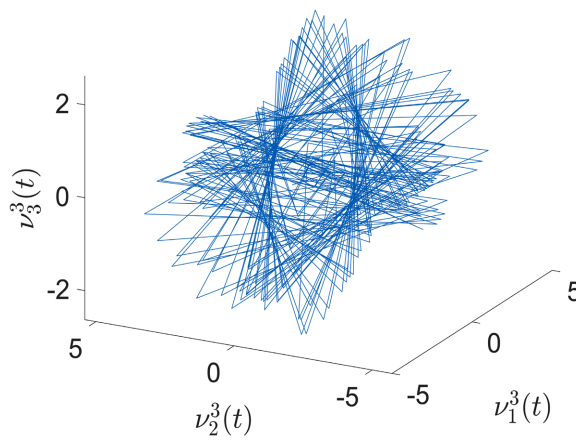


Figure 4. Curve: Phase diagram of $v^3(t)$

图 4. $v^3(t)$ 的相图

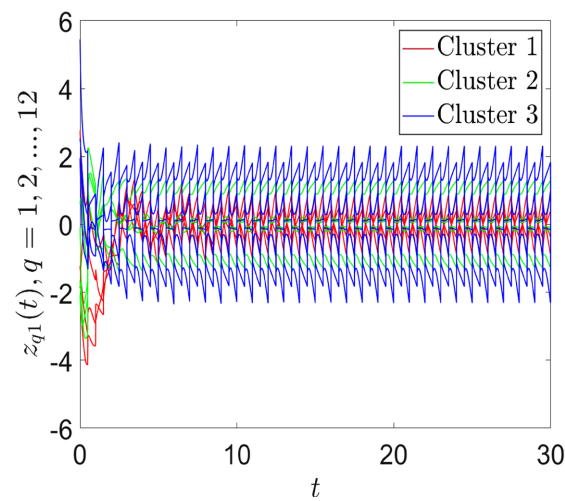


Figure 5. Curve: Evolution trajectory of $z_{q1}(t)$ without controller

图 5. 无控制器时 $z_{q1}(t)$ 的演化轨迹

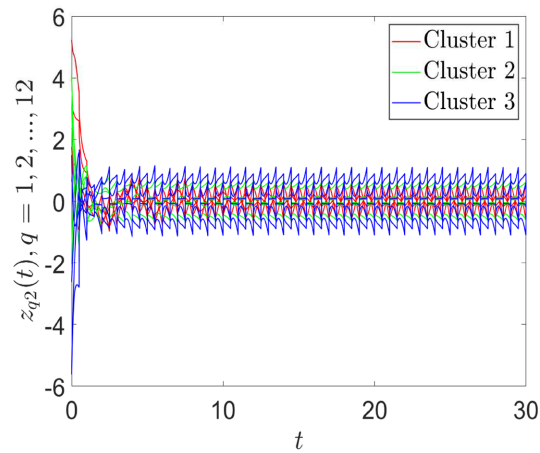


Figure 6. Curve: Evolution trajectory of $z_{q_2}(t)$ without controller

图 6. 无控制器时 $z_{q_2}(t)$ 的演化轨迹

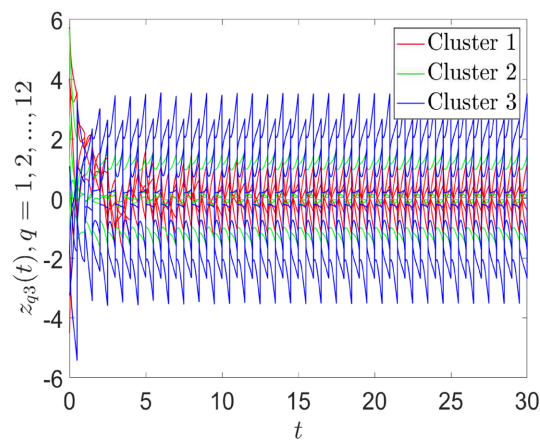


Figure 7. Curve: Evolution trajectory of $z_{q_3}(t)$ without controller

图 7. 无控制器时 $z_{q_3}(t)$ 的演化轨迹

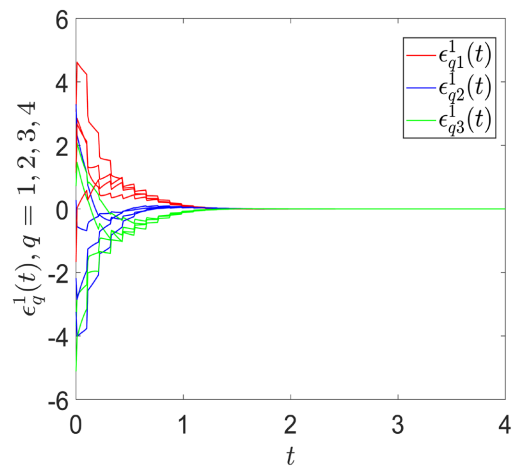


Figure 8. Curve: The fixed-time synchronization of the first cluster in (12) when $0 < \bar{\kappa} < \min\{\bar{\xi}, \beta_1\}$

图 8. 当 $0 < \bar{\kappa} < \min\{\bar{\xi}, \beta_1\}$ 时, (12)中第一个集群的固定时间同步

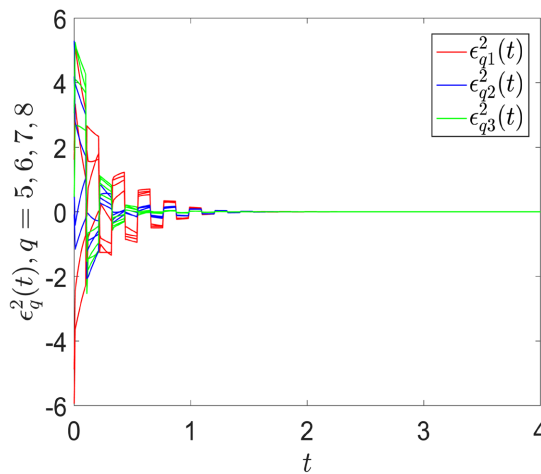


Figure 9. Curve: The fixed-time synchronization of the second cluster in (12) when $0 < \bar{\kappa} < \min\{\bar{\xi}, \beta_1\}$

图 9. 当 $0 < \bar{\kappa} < \min\{\bar{\xi}, \beta_1\}$ 时, (12)中第二个集群的

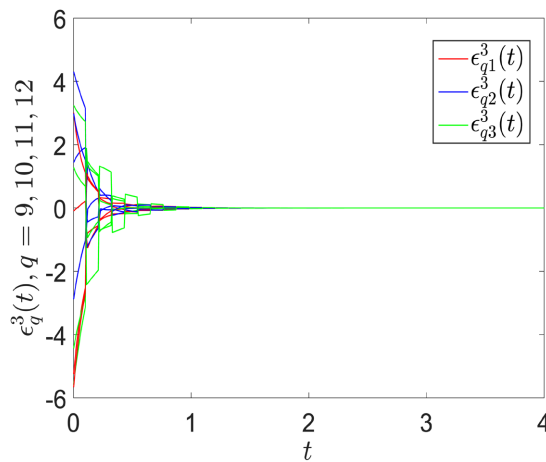


Figure 10. Curve: The fixed-time synchronization of the third cluster in (12) when $0 < \bar{\kappa} < \min\{\bar{\xi}, \beta_1\}$

图 10. 当 $0 < \bar{\kappa} < \min\{\bar{\xi}, \beta_1\}$ 时, (12)中第三个集群的

5. 结论

本文研究了具有脉冲扰动的耦合网络固定时间聚类同步问题。首先, 设计了纯幂律的控制方案。之后通过构造 Lyapunov 函数并运用脉冲系统的固定时间稳定性理论, 探究了网络实现聚类同步的判别条件。本文的研究是对网络中所有节点施加控制, 然而当网络中节点数量特别大时, 对所有节点都施加控制会使得控制成本非常高, 而且也很难实现。在研究中我们发现牵制控制是一种有效的控制手段, 仅需要控制网络中的部分节点就可以使网络实现同步, 但对于脉冲复杂网络, 如何根据其网络结构设计有效的牵制控制策略来实现固定时间聚类同步还有待进一步的探究。

参考文献

- [1] Pagani, G.A. and Aiello, M. (2013) The Power Grid as a Complex Network: A Survey. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, **392**, 2688-2700. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2013.01.023>
- [2] Tang, J.J., Wang, Y.H. and Liu, F. (2013) Characterizing Traffic Time Series Based on Complex Network Theory.

- Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, **392**, 4192-4201. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2013.05.012>
- [3] Huang, C.D., Cao, J.D. and Xiao, M. (2016) Hybrid Control on Bifurcation for a Delayed Fractional Gene Regulatory Network. *Chaos, Solitons & Fractals*, **87**, 19-29. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2016.02.036>
- [4] Chine, T.I. and Liao, T.L. (2005) Design of Secure Digital Communication Systems Using Chaotic Modulation, Cryptography and Chaotic Synchronization. *Chaos, Solitons & Fractals*, **24**, 241-255. [https://doi.org/10.1016/S0960-0779\(04\)00542-9](https://doi.org/10.1016/S0960-0779(04)00542-9)
- [5] Hu, C., He, H.B. and Jiang, H.J. (2020) Synchronization of Complex-Valued Dynamic Networks with Intermittently Adaptive Coupling: A Direct Error Method. *Automatica*, **112**, Article ID: 108675. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2019.108675>
- [6] Milman, V. and Myshkis, A. (1960) On the Stability of Motion in Presence of Impulses. *Siberian Mathematical Journal*, **1**, 233-237.
- [7] Yang, X.S., Li, X.D., Lu, J.Q. and Cheng, Z.S. (2020) Synchronization of Time-Delayed Complex Networks with Switching Topology via Hybrid Actuator Fault and Impulsive Effects Control. *IEEE Transactions on Cybernetics*, **50**, 4043-4052. <https://doi.org/10.1109/TCYB.2019.2938217>
- [8] Polayakov, A. (2012) Nonlinear Feedback Design for Fixed-Time Stabilization of Linear Control Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **57**, 2106-2110. <https://doi.org/10.1109/TAC.2011.2179869>
- [9] Hu, C., Yu, J., Chen, Z.H., Jiang, H.J. and Huang, T.W. (2017) Fixed-Time Stability of Dynamical Systems and Fixed-Time Synchronization of Coupled Discontinuous Neural Networks. *Neural Networks*, **89**, 74-83. <https://doi.org/10.1016/j.neunet.2017.02.001>
- [10] Li, H.F., Li, C.D., Huang, T.W. and Zhang, W.L. (2018) Fixed-time Stabilization of Impulsive Cohen-Grossberg BAM Neural Networks. *Neural Networks*, **98**, 203-211. <https://doi.org/10.1016/j.neunet.2017.11.017>
- [11] Yang, X.S., Lam, J., Ho, D.W.C. and Feng, Z.G. (2017) Fixed-Time Synchronization of Complex Networks with Impulsive Effects via Nonchattering Control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **62**, 5511-5521. <https://doi.org/10.1109/TAC.2017.2691303>
- [12] Li, N., Wu, X.Q. and Yang, Q.R. (2020) Fixed-Time Synchronization of Complex Dynamical Network with Impulsive Effects. *IEEE Access*, **8**, 33072-33079. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.2970789>
- [13] Wei, R.Y., Cao, J.D. and Aliaedi, A. (2018) Fixed-time Synchronization of Memristive Cohen-Grossberg Neural Networks with Impulsive Effects. *International Journal of Control Automation and Systems*, **16**, 2214-2224. <https://doi.org/10.1007/s12555-017-0788-5>
- [14] Zhang, Y.L. and Deng, S.F. (2020) Fixed-Time Synchronization of Complex-Valued Memristor-Based Neural Networks with Impulsive Effects. *Neural Processing Letters*, **52**, 1263-1290. <https://doi.org/10.1007/s11063-020-10304-w>
- [15] Aouiti, C., Assali, E.A., Cherif, F. and Zeglouai, A. (2020) Fixed-Time Synchronization of Competitive Neural Networks with Proportional Delays and Impulsive Effect. *Neural Computing and Applications*, **32**, 13245-13254. <https://doi.org/10.1007/s00521-019-04654-3>
- [16] Yang, X.S., Ho, D.W.C., Lu, J.Q. and Song, Q. (2015) Finite-time Cluster Synchronization of T-S Fuzzy Complex Networks with Discontinuous Subsystems and Random Coupling Delays. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, **23**, 2302-2316. <https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2015.2417973>
- [17] Zhang, W.L., Li, C.D., Li, H.F. and Yang, X.S. (2020) Cluster Stochastic Synchronization of Complex Dynamical Networks via Fixed-Time Control Scheme. *Neural Networks*, **124**, 12-19. <https://doi.org/10.1016/j.neunet.2019.12.019>
- [18] Wang, X., She, K., Zhong, S.M. and Yang, H.L. (2017) Pinning Cluster Synchronization of Delayed Complex Dynamical Networks with Nonidentical Nodes and Impulsive Effects. *Nonlinear Dynamics*, **88**, 2771-2782. <https://doi.org/10.1007/s11071-017-3410-8>
- [19] Ling, G., Liu, X.Z., Ge, M.F. and Wu, Y.H. (2021) Delay-Dependent Cluster Synchronization of Time-Varying Complex Dynamical Networks with Noise via Delayed Pinning Impulsive Control. *Journal of the Franklin Institute*, **358**, 3193-3214. <https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2021.02.004>