Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(4), 525-531
Published Online April 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.124058

Hans汉斯

弱Gorenstein X-投(内)射模

武新文

敦煌市第二中学，甘肃 敦煌

收稿日期：2022年3月2日；录用日期：2022年4月5日；发布日期：2022年4月12日

摘 要

引入弱Gorenstein X-投(内)射模，讨论其基本同调性质，证明在任意环R上，若$lD(R) \le 1$，则Gorenstein X-投(内)射模类、弱Gorenstein X-投(内)射模类、Gorenstein投(内)射模类和弱Gorenstein投(内)射模类是同一个类。

关键词

弱Gorenstein X-投(内)射模，*wGXI*-封闭环

Weak Gorenstein X-Projective (Injective) Modules

Xinwen Wu

Dunhuang No. 2 Middle School, Dunhuang Gansu

Received: Mar. 2nd, 2022; accepted: Apr. 5th, 2022; published: Apr. 12th, 2022

Abstract

Weak Gorenstein X-projective (injective) modules are introduced. The homological properties of the two types of modules are investigated. It is proved that on the ring R, if $lD(R) \le 1$, then the class of Gorenstein X-projective (injective) modules, the class of weak Gorenstein X-projective (injective) modules, the class of Gorenstein projective (injective) modules and the class of weak Gorenstein projective (injective) modules are the same class.

Keywords

Weak Gorenstein X-Projective (Injective) Module, *wGXI*-Closed Ring

文章引用: 武新文. 弱 Gorenstein X-投(内)射模[J]. 理论数学, 2022, 12(4): 525-531.
DOI: 10.12677/pm.2022.124058

1. 引言

1994 年，Fay 等人引入 X-投(内)射模的概念，研究了其同调性质[1]。1995 年，Enochs 等人在一般环上引入 Gorenstein 投(内)射模的概念[2]。随后，以 Gorenstein 投(内)射模为对象的 Gorenstein 相对同调代数得到了广大学者的青睐。2007 年，Bennis 等人引入强 Gorenstein 投(内)射模的概念[3]。2013 年，高增辉引入弱 Gorenstein 投(内)射模[4]。2014 年，Umamaheswaran 等人引入 Gorenstein X-投(内)射模的概念[5]。同年，陈文静等人引入弱 Gorenstein FP-内射模的概念，讨论了凝聚环上 FP-内射模类、Gorenstein FP-内射模类和弱 Gorenstein FP-内射模类三者之间的联系[6] [7]。2021 年，袁倩等人引入弱 Gorenstein FC-投射模的概念，讨论了任意环上 FC-投射模类、Gorenstein FC-投射模类、强 Gorenstein FC-投射模类、弱 Gorenstein FC-投射模类和强泛 Gorenstein FC-投射模类五者之间的联系，并利用弱 Gorenstein FC-投射模对右 Gorenstein FC-半单环进行了刻画[8]。

受以上文献的启发，我们利用 X-投(内)射模，引入弱 Gorenstein X-投(内)射模的概念，讨论其同调性质，并证明当 $lD(R)\le 1$ 时，模类 Gorenstein 投(内)射模类、Gorenstein X-投(内)射模类、弱 Gorenstein 投(内)射模类和弱 Gorenstein X-投(内)射模类是同一个类。

本文中所提到的环均指有单位元的结合环。模均指酉模，除非特别说明，*R*-模指左*R*-模。本文中，我们用*R-Mod*表示左*R*-模范畴；用$\boldsymbol{P}$ ($\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{GP}$, $\boldsymbol{GI}$, $\boldsymbol{SGP}$, $\boldsymbol{SGI}$, $\boldsymbol{wGP}$, $\boldsymbol{wGI}$, $\boldsymbol{GXP}$, $\boldsymbol{GXI}$)表示投射*R*-模类(内射*R*-模类，Gorenstein投射*R*-模类，Gorenstein内射*R*-模类，强Gorenstein投射*R*-模类，强Gorenstein内射*R*-模类，弱Gorenstein投射*R*-模类，弱Gorenstein 内射*R*-模类，Gorenstein X-投射*R*-模类，Gorenstein X-内射*R*-模类)；用$pd(M)$和$id(M)$表示*R*-模*M*的投射维数和内射维数；用$lD(R)$表示环*R*的左整体维数。$\mathbb{N}$ 表示自然数集。未交待的概念和符号，参考文献[5] [8] [9] [10]。

全文共分为四部分：第一节引言；第二节罗列本文所需概念和基本事实；第三节引入弱 Gorenstein X-投(内)射模，讨论其基本同调性质；第四节利用模的 X-投(内)射维数，证明当 $lD(R)\le 1$ 时，模类 Gorenstein 投(内)射模类、Gorenstein X-投(内)射模类、弱 Gorenstein 投(内)射模类和弱 Gorenstein X-投(内)射模类是同一个类。

2. 预备知识

定义 2.1 [1]设 $\boldsymbol{X}$ 是 *R*-模类，称 *R*-模 *M* 是 X-投射模，如果对任意 $N\in\boldsymbol{X}$， $\mathrm{Ext}_R^1(M,N)=0$。我们将 X-投射模记作 $\boldsymbol{XP}$。对偶地，可定义 $\boldsymbol{XI}$。

定义 2.2 [2]称投射 *R*-模的正合列 $\boldsymbol{P}=\cdots\to P_1\to P_0\to P_{-1}\to P_{-2}\to\cdots$ 是完全投射分解，如果对任意投射 *R*-模 *Q*，序列 $\mathrm{Hom}_R(\boldsymbol{P},Q)$ 正合。称 *R*-模 *M* 是 Gorenstein 投射模，如果存在一个完全投射分解 $\boldsymbol{P}$ 使得 $M\cong\mathrm{Ker}(P_{-1}\to P_{-2})$。我们将 Gorenstein 投射模记作 $\boldsymbol{GP}$。对偶地，可定义 $\boldsymbol{GI}$。

定义 2.3 [3]称 *R*-模 *M* 是强 Gorenstein 投射模，如果存在投射 *R*-模的正合列 $\Theta=\cdots\to P\to P\to P\to P\to\cdots$，使得 $M\cong\mathrm{Ker}(P\to P)$，并且对任意投射 *R*-模 *Q*，序列 $\mathrm{Hom}_R(\Theta,Q)$ 正合。我们将强 Gorenstein 投射模记作 $\boldsymbol{SGP}$。对偶地，可定义 $\boldsymbol{SGI}$。

定义 2.4 [4]称 *R*-模 *M* 是弱 Gorenstein 投射模，如果存在投射 *R*-模的正合列 $\Theta=\cdots\to P_1\to P_0\to P^0\to P^1\to\cdots$，使得 $M\cong\mathrm{Ker}(P^0\to P^1)$。此时，称序列 Θ 是 *M* 的弱完全投射分解。

我们将弱 Gorenstein 投射模记作 ***wGP***。对偶地，可定义 ***wGI***。

定义 2.5 [5]设 $\boldsymbol{X}$ 是 R-模类，称 R-模 M 是 Gorenstein X-投射模，如果存在投射模 R-模的正合列 $\Phi = \cdots \to P_1 \to P_0 \to P^0 \to P^1 \to \cdots$，使得 $M \cong \mathrm{Ker}\left(P^0 \to P^1\right)$，并且对任意 $Q \in \boldsymbol{X}$，序列 $\mathrm{Hom}_R\left(\Phi, Q\right)$ 正合。我们将 Gorenstein X-投射模记作 ***GXP***。对偶地，可定义 ***GXI***。

定义 2.6 [9]称R-模类$\boldsymbol{X}$是投射可解类，如果 $\boldsymbol{P} \subseteq \boldsymbol{X}$，且对任意$\boldsymbol{X}$中的正合列 $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$，其中 $X'' \in \boldsymbol{X}$，则 $X' \in \boldsymbol{X} \Leftrightarrow X \in \boldsymbol{X}$。对偶地，可定义内射可解类。

3. 弱 Gorenstein X-投射模

本部分我们引入弱 Gorenstein X-投(内)射模，讨论其基本同调性质。

定义 3.1 设$\boldsymbol{X}$是R-模类，称R-模M是是弱Gorenstein X-投射模，如果存在正合列

$$\Psi = \cdots \to P_1 \to P_0 \to P^0 \to P^1 \to \cdots,$$

其中 $P_i, P^i \in \boldsymbol{XP}\left(i \in \mathbb{N}\right)$，使得 $M \cong \mathrm{Ker}\left(P^0 \to P^1\right)$。此时，称正合列 Ψ 是M的弱完全X-投射分解。

对偶地，称R-模M是是弱Gorenstein X-内射模，如果存在正合列

$$\Omega = \cdots \to E_1 \to E_0 \to E^0 \to E^1 \to \cdots,$$

其中 $E_i, E^i \in \boldsymbol{XI}\left(i \in \mathbb{N}\right)$，使得 $M \cong \mathrm{Ker}\left(P^0 \to P^1\right)$。此时，称正合列 Ω 是M的弱完全X-内射分解。

我们将弱Gorenstein X-投(内)射R-模类记为***wGXP***(***wGXI***)。

关于定义，我们注意到

注记 3.2 1) $\boldsymbol{P} \subseteq \boldsymbol{XP} \subseteq \boldsymbol{wGXP}$； $\boldsymbol{I} \subseteq \boldsymbol{XI} \subseteq \boldsymbol{wGXI}$；

2) $\boldsymbol{P} \subseteq \boldsymbol{GXP} \subseteq \boldsymbol{wGXP}$； $\boldsymbol{I} \subseteq \boldsymbol{GXI} \subseteq \boldsymbol{wGXI}$；

3) 由对称性可知，定义 3.1 中的正合列 Ψ （Ω）中所有同态的像、核和余核都是弱Gorenstein X-投(内)射模；

4) ***wGXP***(***wGXI***)关于直和(直积)封闭。

例 3.3 1) 当$\boldsymbol{X}$ = R-*Mod*时，***wGXP*** = ***wGP***，***wGXI*** = ***wGI***；

2) 当$\boldsymbol{X}$是有限表示R-模类时，弱Gorenstein X-内射模就是文献[6]中的弱Gorenstein FP-内射模；

3) 当 $\boldsymbol{X}$ 是有限余表示 R-模类时，弱 Gorenstein X-投射模就是文献[8]中的弱 Gorenstein FC-投射模。

下面首先给出弱Gorenstein X-投射模的一些等价刻画，关于弱Gorenstein X-内射模，均有对偶结论。

命题 3.4 设 M 是一 R-模，则以下等价：

1) $M \in \boldsymbol{wGXP}$；

2) 存在正合列 $0 \to M \to P^0 \to P^1 \to \cdots$，其中 $P^i \in \boldsymbol{XP}\left(i \in \mathbb{N}\right)$；

3) 存在正合列 $0 \to M \to P \to N \to 0$，其中 $P \in \boldsymbol{XP}$， $N \in \boldsymbol{wGXP}$。

证明 (1)$\Rightarrow$(2)，(1)$\Rightarrow$(3)由定义 3.1 易得。

(3)$\Rightarrow$(2)因为 $N \in \boldsymbol{wGXP}$，所以存在 N 的弱完全 X-投射分解

$$\Psi = \cdots \to P_1 \to P_0 \to P^0 \to P^1 \to \cdots,$$

其中 $P_i, P^i \in \boldsymbol{XP}\left(i \in \mathbb{N}\right)$，使得 $N \cong \mathrm{Ker}\left(P^0 \to P^1\right)$，故存在正合列 $0 \to M \to P \to P^0 \to P^1 \to \cdots$，其中$P$和 $P^i \in \boldsymbol{XP}\left(i \in \mathbb{N}\right)$。

(2)$\Rightarrow$(1)任取 M 的一个投射分解 $\cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$，与条件中序列首尾相接就得到 M 的弱完全 X-投射分解

$$\Psi = \cdots \to P_1 \to P_0 \to P^0 \to P^1 \to \cdots,$$

使得 $M \cong \operatorname{Ker}\left(P^0 \to P^1\right)$，故 $M \in \boldsymbol{wGXP}$ 。

下面我们证明 $\boldsymbol{wGXP}$ 是投射可解类，并且关于直和项封闭。

命题 3.5 设 R 是环，则 $\boldsymbol{wGXP}$ 关于扩张封闭当且仅当 $\boldsymbol{wGXP}$ 是投射可解类。

证明($\Leftarrow$)显然。

($\Rightarrow$)设 $0 \to A \to B \to C \to 0$ 是 R-模的正合列，只需证当 $B, C \in \boldsymbol{wGXP}$ 时, $A \in \boldsymbol{wGXP}$ 即可。因为 $B \in \boldsymbol{wGXP}$，所以由命题 3.4 可知存在正合列 $0 \to B \to P \to N \to 0$，其中 $P \in \boldsymbol{XP}$， $N \in \boldsymbol{wGXP}$ 。考虑推出图

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & P \arrow[r] \arrow[d] & Q \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & N \arrow[r, equal] \arrow[d] & N \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

因为 $C, N \in \boldsymbol{wGXP}$， 所以 $Q \in \boldsymbol{wGXP}$ 。对中间行用命题 3.4 可得 $A \in \boldsymbol{wGXP}$ 。

定义 3.6 称环 R 是左 $\boldsymbol{wGXP}$ 封闭环，如果 $\boldsymbol{wGXP}$ 关于扩张封闭。

推论 3.7 设 R 是左 $\boldsymbol{wGXP}$ 封闭环，则 $\boldsymbol{wGXP}$ 关于直和项封闭。

证明 由文献([9]，命题 1.4)易得。

命题 3.8 设 R 是左 $\boldsymbol{wGXP}$ 封闭环，$0 \to N \to M \to P \to 0$ 是 R-模的正合列，其中 $P \in \boldsymbol{P}$，则 $M \in \boldsymbol{wGXP}$ $\Leftrightarrow$ $N \in \boldsymbol{wGXP}$ 。

证明 由注记 3.2 和推论 3.7 易得。

引理 3.9 $\boldsymbol{XP}$ **关于扩张与直和项封闭。**

证明 设 $\boldsymbol{X}$ 是 R-模类， $0 \to A \to B \to C \to 0$ 是 R-模的正合列，其中 $A, C \in \boldsymbol{XP}$ 。下证 $B \in \boldsymbol{XP}$ 。任取 $N \in \boldsymbol{X}$ ， 存在长正合列 $\cdots \to \operatorname{Ext}_R^1(C, N) \to \operatorname{Ext}_R^1(B, N) \to \operatorname{Ext}_R^1(A, N) \to \cdots$ 。因为 $A, C \in \boldsymbol{XP}$， 所以 $\operatorname{Ext}_R^1(A, N) = 0$， $\operatorname{Ext}_R^1(C, N) = 0$ 。于是 $\operatorname{Ext}_R^1(B, N) = 0$，故 $B \in \boldsymbol{XP}$， 即 $\boldsymbol{XP}$ 关于扩张。

设 $\{M_i\}_{i\in I}$ 是一簇 X-投射模，任意 R-模 $N \in \boldsymbol{X}$ ，由同构式 $\operatorname{Ext}_R^1\left(\oplus_{i\in I} M_i, N\right) \cong \prod_{i\in I} \operatorname{Ext}_R^1\left(M_i, N\right)$ 可得 $\boldsymbol{XP}$ 关于直和项封闭。

于是，结合引理 3.9，下面我们弱化命题 3.8。

命题 3.10 设 R 是左 $\boldsymbol{wGXP}$ 封闭环， $0 \to N \to M \to X \to 0$ 是 R-模的正合列，其中 $X \in \boldsymbol{XP}$， 则 $M \in \boldsymbol{wGXP}$ $\Leftrightarrow$ $N \in \boldsymbol{wGXP}$ 。

DOI: 10.12677/pm.2022.124058

证明 $(\Rightarrow)$设$M\in \boldsymbol{wGXP}$，则由命题 3.4 可知存在正合列$0\to M\to P\to K\to 0$，其中$P\in \boldsymbol{XP}$，$K\in \boldsymbol{wGXP}$。考虑推出图

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & M \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & P \arrow[r] \arrow[d] & Q \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & K \arrow[r, equal] \arrow[d] & K \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

因为$X\in \boldsymbol{XP}\subseteq \boldsymbol{wGXP}$，$K\in \boldsymbol{wGXP}$，所以$Q\in \boldsymbol{wGXP}$，则对中间行用命题 3.4 可得$N\in \boldsymbol{wGXP}$。

$(\Leftarrow)$设$N\in \boldsymbol{wGXP}$，则由命题 3.4 可知存在正合列$0\to N\to P'\to K'\to 0$，其中$P'\in \boldsymbol{XP}$，$K'\in \boldsymbol{wGXP}$。考虑推出图

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & P' \arrow[r] \arrow[d] & Q' \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] & 0 \\
 & K' \arrow[r, equal] \arrow[d] & K' \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

因为$P',X\in \boldsymbol{XP}$，所以由引理 3.9 可知$Q'\in \boldsymbol{XP}$，则对中间列用命题 3.4 可得$M\in \boldsymbol{wGXP}$。

命题 3.11 设R是环，M是一R-模，则以下等价：

1) 若$M\in R\text{-}Mod$，则$M\in \boldsymbol{wGXP}$；

2) 若$M\in \boldsymbol{wGI}$，则$M\in \boldsymbol{wGXP}$；

3) 若$M\in \boldsymbol{GI}$，则$M\in \boldsymbol{wGXP}$；

4) 若$M\in \boldsymbol{SGI}$，则$M\in \boldsymbol{wGXP}$；

5) 若$M\in \boldsymbol{I}$，则$M\in \boldsymbol{wGXP}$；

6) 若$M\in \boldsymbol{I}$，则$M\in \boldsymbol{XP}$。

证明 (1)$\Rightarrow$(2)$\Rightarrow$(3)$\Rightarrow$(4)$\Rightarrow$(5)，(6)$\Rightarrow$(5)显然。

(5)$\Rightarrow$(6)设 $M \in \boldsymbol{I}$，则由条件可知 $M \in \boldsymbol{wGXP}$。于是由命题 3.4 可知存在正合列 $0 \to M \to P \to N \to 0$，其中 $P \in \boldsymbol{XP}$，$N \in \boldsymbol{wGXP}$。因为 $M \in \boldsymbol{I}$，所以正合列 $0 \to M \to P \to N \to 0$ 可裂，因此由引理 3.9 可知 $M \in \boldsymbol{XP}$。

(6)$\Rightarrow$(1) $M \in R\text{-}Mod$，取 M 的投射分解和内射分解相连接，则存在正合列

$$\cdots \to P_1 \to P_0 \to E_0 \to E_1 \to \cdots$$

其中 $P_i \in \boldsymbol{P} \subseteq \boldsymbol{XP}$，$E_i \in \boldsymbol{I} \subseteq \boldsymbol{XP}(i \in \mathbb{N})$，故 $M \in \boldsymbol{wGXP}$。

推论 3.12 设 R 是环，M 是一 R-模，考虑下面 R-模的正合列

$$0 \to G_n \to G_{n-1} \to \cdots \to G_0 \to M \to 0$$

和

$$0 \to H_n \to H_{n-1} \to \cdots \to H_0 \to M \to 0,$$

其中 $G_0,\cdots,G_{n-1},H_0,\cdots,H_{n-1} \in \boldsymbol{wGXP}$。若 $\boldsymbol{wGXP}$ 关于扩张封闭，则 $G_n \in \boldsymbol{wGXP}$ 当且仅当 $H_n \in \boldsymbol{wGXP}$。

证明 类似于文献([10]，引理 2.1)的证明。

4. X-投(内)射维数

本部分我们引入模 M 的 X-投(内)射维数，讨论在任意环上 ***GXP***(***GXI***)、***wGXP***(***wGXI***)、***GP***(***GI***)和 ***wGP***(***wGI***)四者之间的联系。

定义 4.1 设 R 是环，M 是一 R-模，我们如下定义模 M 的 X-投射维数：

$X\text{-}pd(M) = inf\{n \in \mathbb{N} |$ 存在正合列 $0 \to X_n \to X_{n-1} \to \cdots \to X_0 \to M \to 0$，其中 $X_i \in \boldsymbol{XP}$，$i = 0,1,\cdots,n\}$。

若上述集合为空集，则规定 $X\text{-}pd(M) = \infty$。

如下定义模 M 的 X-内射维数：

$X\text{-}id(M) = inf\{n \in \mathbb{N} |$ 存在正合列 $0 \to M \to X_0 \to \cdots \to X_{n-1} \to X_n \to 0$，其中 $X_i \in \boldsymbol{XI}$，$i = 0,1,\cdots,n\}$。

若上述集合为空集，则规定 $X\text{-}id(M) = \infty$。

下面我们讨论模 M 的 X-投射维数的相关结论，关于模 M 的 X-内射维数，均有对偶结论。

命题 4.2 设 R 是环，$lD(R) < \infty$，M 是一 R-模，若 $X\text{-}pd(M) \le 1$，则以下等价：

1) $M \in \boldsymbol{wGP}$；
2) $M \in \boldsymbol{wGXP}$；
3) $M \in \boldsymbol{GP}$；
4) $M \in \boldsymbol{GXP}$；

证明 由文献([5]，命题 2.1.1)可知(1)$\Leftrightarrow$(2)，(3)$\Leftrightarrow$(4)。

(3)$\Rightarrow$(1)显然。

(1)$\Rightarrow$(3) 设 $M \in \boldsymbol{wGP}$，则存在投射模的正合列 $\Psi = \cdots \to P_1 \to P_0 \to P^0 \to P^1 \to \cdots$，使得 $M \cong \mathrm{Ker}(P^0 \to P^1)$。只需证对任意投射模$Q$，序列 $\mathrm{Hom}_R(\Psi,Q)$ 正合即可。设 $id(Q) = n < \infty$，我们对n进行数学归纳。当 $n = 0$ 时，序列 $\mathrm{Hom}_R(\Psi,Q)$ 显然正合。设 $n \ge 1$，则对模Q存在正合列 $0 \to Q \to E \to L \to 0$，其中 $E \in \boldsymbol{I}$，$id(L) = n-1$。因此存在正合列 $0 \to \mathrm{Hom}_R(\Psi,Q) \to \mathrm{Hom}_R(\Psi,E) \to \mathrm{Hom}_R(\Psi,L) \to 0$。由归纳假设可得，序列 $\mathrm{Hom}_R(\Psi,L)$ 正合。显然序列 $\mathrm{Hom}_R(\Psi,E)$ 也正合，故序列 $\mathrm{Hom}_R(\Psi,Q)$ 正合。

推论 4.3 设 R 是环，若 $lD(R) \le 1$，则模类 ***GP***、***GXP***、***wGP*** 和 ***wGXP*** 是同一个类。

参考文献

[1] Fay, T. and Joubert, S. (1994) Relatively Injectivity. *Chinese Journal of Mathematics*, **22**, 65-94.

[2] Enochs, E.E. and Jenda, O.M.G. (1995) Gorenstein Injective and Projective Modules. *MathZ*, **220**, 611-633. https://doi.org/10.1007/BF02572634

[3] Bennis, D. and Mahdou, N. (2007) Strongly Gorenstein Projective, Injective, and Flat Modules. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **210**, 437-445. https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2006.10.010

[4] Gao, Z.H. (2013) Weak Gorenstein Projective, Injective and Flat Modules. *Journal of Algebra and Its Applications*, **12**, 3841-3858. https://doi.org/10.1080/00927872.2011.597809

[5] Umamaheswaran, A. and Selvaraj, C. (2014) A Study on X-Injective and Gorenstein X-Injective Modules. India Periyar University, Tamil Nadu.

[6] 陈文静, 杨晓燕. 弱 Gorenstein FP-内射模[J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2014, 37(4): 477-481.

[7] 陈文静, 杨晓燕. 强和强泛 Gorenstein FP-内射模[J]. 西南大学学报(自然科学版), 2014, 36(8): 75-78.

[8] 袁倩, 张文汇. 强泛 Gorenstein FC-投射模[J]. 理论数学, 2021, 11(4): 647-653. https://doi.org/10.12677/pm.2021.114078

[9] Holm, H. (2004) Gorenstein Homological Dimensions. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **189**, 167-193. https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2003.11.007

[10] Zhu, X.S. (2013) Resolving Resolution Dimensions. *Algebras and Representation Theory*, **16**, 1165-1191. https://doi.org/10.1007/s10468-012-9351-5