Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(4), 623-629
Published Online April 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.124071

Hans汉斯

时空分数阶时滞扩散方程mild解的局部存在唯一性

高　鹏

西北师范大学，数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2022年3月14日；录用日期：2022年4月15日；发布日期：2022年4月22日

摘　要

本文研究了含时滞项的时空分数阶扩散方程初边值问题

$$\begin{cases} {}_0^C D_t^\alpha u(x,t)+(-\Delta)^s u(x,t)=f\left(x,t,u(x,t),u(x,t+\tau)\right),(x,t)\in\Omega\times[0,T], \\ u=0,(x,t)\in\partial\Omega\times[0,T], \\ u(x,\tau)=\varphi(x,\tau),\tau\in[-r,0],x\in\Omega, \end{cases}$$

mild解的局部存在唯一性，其中$\Omega\in\mathrm{R}^d\ (d\in\mathrm{N})$为具有光滑边界$\partial\Omega$的开域，${}_0^C D_t^\alpha$为$\alpha\in(0,1)$阶Caputo型时间分数阶导数，$(-\Delta)^s$为$s\in(0,1)$阶拉普拉斯算子。$f:\Omega\times[0,T]\times\mathrm{R}^2\to\mathrm{R}$为局部Lipschitz连续凸函数，$f(x,t,0,0)$有界。$\varphi\in C(\mathrm{R}\times[-r,0])$，$r>0$为常数，常数$T>0$待定。在非线性项中含时滞项的情形下，运用算子半群理论及不动点定理，获得了该问题mild解的局部存在唯一性。

关键词

时空分数阶扩散方程，时滞，mild解，局部存在唯一性，不动点定理

The Local Existence and Uniqueness of Mild Solution for Time-Space Fractional Diffusion Equation with Delay

Peng Gao

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Mar. 14th, 2022; accepted: Apr. 15th, 2022; published: Apr. 22nd, 2022

文章引用：高鹏. 时空分数阶时滞扩散方程 mild 解的局部存在唯一性[J]. 理论数学, 2022, 12(4): 623-629.
DOI: 10.12677/pm.2022.124071

Abstract

In this paper, we study the existence and uniqueness of mild solution for time-space fractional diffusion equation with delay

$$\begin{cases} {}_0^C D_t^\alpha u(x,t) + (-\Delta)^s u(x,t) = f\left(x,t,u(x,t),u(x,t+\tau)\right),(x,t)\in\Omega\times[0,T], \\ u=0,(x,t)\in\partial\Omega\times[0,T], \\ u(x,\tau)=\varphi(x,\tau),\tau\in[-r,0],x\in\Omega, \end{cases}$$

where $\Omega\in\mathbf{R}^d\ (d\in\mathrm{N})$ is an open bounded domain with smooth boundary $\partial\Omega$. ${}_0^C D_t^\alpha$ denotes the Caputo time fractional derivative of order $\alpha\in(0,1)$, and $(-\Delta)^s$ is the fractional Laplacian with $s\in(0,1)$. $f:\Omega\times[0,T]\times\mathrm{R}^2\to\mathrm{R}$ is a convex function satisfying local Lipschitz continuous. $f(x,t,0,0)$ is bounded. $\varphi\in C(\mathrm{R}\times[-r,0])$, $r>0$ is a constant. $T>0$ is a constant to be determined. When the nonlinear term includes time delay, the local existence and uniqueness of mild solution to the problem are obtained by using the operator semigroup theory combined with the fixed point theorem.

Keywords

Time-Space Fractional Diffusion Equation, Delay, Mild Solution, Local Existence and Uniqueness, Fixed Point Theorem

1. 引言

近几年来，分数阶微分方程在流体力学、材料力学、生物学、等离子体物理学、金融学、化学等许多领域中提出，分数阶扩散方程在几个应用领域非常流行[1] [2]。当空间和时间上的整数阶导数被分数阶所代替时，引入了时空分数阶扩散方程。最近，许多学者致力于时空分数阶微分方程的研究[3] [4] [5] [6]。特别地，Padgett 在文献[4]中运用 Banach 不动点定理讨论了不含时滞项的时空分数阶扩散方程初边值问题。李强等人在文献[5]中利用单调迭代技巧研究了时空分数阶时滞扩散方程初边值问题 mild 解的存在性。受上述文献的启发，本文将文献[4]中的结果推广到含有时滞的情形，同时取消了文献[5]要求方程具有上下解的条件。本文运用算子半群理论，结合不动点定理，在 Banach 空间中讨论并获得了如下含有时滞项的时空分数阶扩散方程 mild 解的局部存在唯一性

$$\begin{cases} {}_0^C D_t^\alpha u(x,t) + (-\Delta)^s u(x,t) = f\left(x,t,u(x,t),u(x,t+\tau)\right),(x,t)\in\Omega\times[0,T], \\ u=0,(x,t)\in\partial\Omega\times[0,T], \\ u(x,\tau)=\varphi(x,\tau),\tau\in[-r,0],x\in\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\Omega\in\mathbf{R}^d\ (d\in\mathbf{N})$ 为具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的开域，${}_0^C D_t^\alpha$ 为 $\alpha\in(0,1)$ 阶 Caputo 型时间分数阶导数，$(-\Delta)^s$ 为 $s\in(0,1)$ 阶拉普拉斯算子。$f:\Omega\times[0,T]\times\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 为局部 Lipschitz 连续凸函数，$f(x,t,0,0)$ 有界。

$\varphi \in C(\mathbf{R}\times[-r,0]), r>0$ 为常数。本文主要结果如下：

令 $u(t):=u(\cdot,t)$，$u_t(\tau):=u(\cdot,t+\tau)$，$\tau\in[-r,0]$，$f(t,u(t),u_t):=f(\cdot,t,u(t),u_t(\tau))$，则方程(1)抽象为如下时滞发展方程

$$\begin{cases} {}_0^C D_t^\alpha u(t)+Au(t)=f(t,u(t),u_t), t\in[0,T], \\ u(t)=\varphi(t), t\in[-r,0], \end{cases} \tag{2}$$

其中 $A:=(-\Delta)^s$，$\mathrm{Dom}(A)=\mathbf{H}^s(\Omega)\subset E\to E$。${}_0^C D_t^\alpha$ 为 $\alpha\in(0,1)$ 阶 Caputo 时间分数阶导数。$f:[0,T]\times E\times E_1\to E$ 满足局部 Lipschitz 连续，$E_1:=C([-r,0],\mathbf{H}^s(\Omega))$，$r>0$ 为常数，$\mathbf{H}^s(\Omega)$ 为 Sobolev 空间，其定义将在第 2 节给出，$\varphi\in E_1$。

定理 1.1. 设 $E=C([-r,T],\mathbf{H}^s(\Omega))$ 为具有范数 $\|u\|:=\sup_{t\in[-r,T]}\|u(t)\|_{\mathbf{H}^s(\Omega)}$ 的 Banach 空间，则存在 $T>0$，使得方程(2)存在唯一 mild 解 $u\in E$。

由抽象结果定理 1.1 知，存在 $T>0$，使得方程 (1) 存在唯一 mild 解 $u(x,t)\in C(\Omega\times[0,T],\mathbf{R})$。

2. 预备知识

定义 2.1. [7]设 $S(\mathbf{R}^d)$ 为 Schwartz 速降函数空间，对 $\forall u\in S(\mathbf{R}^d)$，定义 $s\in(0,1)$ 阶拉普拉斯算子为

$$(-\Delta)^s u(x)=-\frac{1}{2}C_{d,s}\int_{\mathbf{R}^d}\frac{u(x+y)+u(x-y)-2u(x)}{|y|^{d+2s}}\mathrm{d}y, x\in\mathbf{R}^d,$$

其中 $C_{d,s}=\dfrac{s4^s\Gamma\left(\dfrac{d+2s}{2}\right)}{\pi^{d/2}\Gamma(1-s)}$ 为正常数。

对具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的 $\Omega\subseteq\mathbf{R}^d$，$s\in(0,1)$ 阶 Sobolev 空间定义为

$$H^s(\Omega)=\left\{u\in L^2(\Omega):\int_\Omega\int_\Omega\frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{d+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\infty\right\}.$$

对 $\forall u\in H^s(\Omega)$，定义半范 $|\cdot|_{H^s(\Omega)}$ 为

$$|u|_{H^s(\Omega)}^2:=\int_\Omega\int_\Omega\frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{d+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

则 $H^s(\Omega)$ 为具有范数 $\|\cdot\|_{H^s(\Omega)}^2=\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}^2+|\cdot|_{H^s(\Omega)}^2$ 的 Hilbert 空间。由于 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 光滑，则可以通过指标为 $\theta=1-s$ 的插值空间定义上述分数阶 Sobolev 空间，详见文献[7]。对 $s\in(0,1)$，我们有

$$H^s(\Omega)=\left[H^1(\Omega),L^2(\Omega)\right]_\theta.$$

即 $H^s(\Omega)$ 是介于 L^2 和 H^1 之间的 Banach 空间。设 H_0^s 为 C_0^∞ 关于范数 $\|\cdot\|_{H^s(\Omega)}$ 的闭包，进而可以定义空间

$$H_0^s(\Omega)=\left[H_0^1(\Omega),L^2(\Omega)\right]_\theta.$$

本文通过狄利克雷拉普拉斯算子引入分数阶拉普拉斯算子，$-\Delta:L^2(\Omega)\to L^2(\Omega)$ 是定义域为 $\mathrm{Dom}(-\Delta)=\left\{u\in H_0^1 \mid \Delta u\in L^2(\Omega)\right\}$ 的经典拉普拉斯算子。这是一个无界的闭算子，且有紧逆，并且存在 $\{\lambda_n,e_n\}_{n\in\mathbf{N}}\subset\mathbf{R}^+\times H_0^1(\Omega)$，使得 $\{e_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ 为 $L^2(\Omega)$ 的一个标准正交基，

$$\begin{cases}-\Delta e_n = \lambda_n e_n, x \in \Omega,\\ e_n = 0, x \in \partial\Omega.\end{cases}$$

于是，对 $u \in C_0^{\infty}(\Omega)$ 可定义分数阶拉普拉斯算子为

$$(-\Delta)^s u := \sum_{n\in\mathbf{N}} u_n \lambda_n^s e_n, \tag{3}$$

其中 $u_n = \int_\Omega u e_n \mathrm{d}x$。由定义式(3)，Hilbert 空间 $\mathbf{H}^s$ 可以表示为

$$\mathbf{H}^s := \left\{u = \sum_{n\in\mathbf{N}} u_n e_n \in L^2(\Omega) : \|u\|_{\mathbf{H}^s(\Omega)}^2 = \sum_{n\in\mathbf{N}} \lambda_n^s |u_n|^2 < \infty\right\}.$$

设 $E = C([-r,T],\mathbf{H}^s(\Omega))$ 为具有范数 $\|u\| := \sup_{t\in[-r,T]} \|u(t)\|_{\mathbf{H}^s(\Omega)}$ 的 Banach 空间，$\sigma(A)$ 和 $\rho(A) := \mathbf{C} - \sigma(A)$ 分别为算子 $A := (-\Delta)^s$ 的谱和预解集。$-A$ 生成如下的 Feller 半群[4]

$$T(t) = \mathrm{e}^{-tz}(A) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\theta} \mathrm{e}^{-tz} R(z;A)\mathrm{d}z, t \in [0,T],$$

其中 Γ_θ 为包含 $\sigma(A)$ 的任意周线，$R(z;A) := (zI - A)^{-1}$ 为预解算子，$z \in \rho(A)$。分别定义算子簇 $\{P_\alpha(t)\}_{t\in[0,T]}$ 和 $\{Q_\alpha(t)\}_{t\in[0,T]}$ 如下：

$$P_\alpha(t) := E_{\alpha,1}(-zt^\alpha)(A) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\theta} E_{\alpha,1}(-zt^\alpha) R(z;A)\mathrm{d}z,$$

$$Q_\alpha(t) := E_{\alpha,\alpha}(-zt^\alpha)(A) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\theta} E_{\alpha,\alpha}(-zt^\alpha) R(z;A)\mathrm{d}z,$$

其中 $E_{\alpha,\alpha}(-zt^\alpha)$ 为 Mittag-Leffler 函数，是指数函数的自然推广，单参数和双参数的 Mittag-Leffler 分别为

$$E_\alpha(z) = E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)},$$

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \alpha > 0, \beta > 0.$$

引理 2.2. [4]对每个固定的 $t \in [0,T]$，$P_\alpha(t)$ 与 $Q_\alpha(t)$ 均为 E 中的闭线性算子，且

$$\|P_\alpha(t)\| \le 1, \|Q_\alpha(t)\| \le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}. \tag{4}$$

引理 2.3. [8]设 $(E,\|\cdot\|)$ 为 Banach 空间，若 f 为 E 中的 Lipschitz 连续函数，则存在常数 $L_1, L_2 > 0$，使得 $\forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in E$ 满足

$$\|f(u_1,u_2) - f(v_1,v_2)\| \le L_1\|u_1 - v_1\| + L_2\|u_2 - v_2\|. \tag{5}$$

推论 2.4. 设 $(E,\|\cdot\|)$ 为 Banach 空间，θ 为 E 中的零元，设 $B_R := \{u \in E \mid \|u\| < R, R > 0\}$ 为 E 中以 θ 为中心，R 为半径的闭球。f 为 B_R 上的局部 Lipschitz 连续函数且 $f(\theta,\theta)$ 有界，则对 $\forall u \in B_R$，有

$$\|f(u_1,u_2)\| \le L(\|u_1\| + \|u_2\| + 1). \tag{6}$$

证明：由(5)式，取 $v_1 = v_2 = \theta$，则有 $\|f(u_1,u_2)\| \le L_1\|u_1\| + L_2\|u_2\| + \|f(\theta,\theta)\|$，令 $L = \max\{L_1, L_2, \|f(\theta,\theta)\|\}$，则 $\|f(u_1,u_2)\| \le L(\|u_1\| + \|u_2\| + 1)$。因此，推论 2.4 的结论成立。 □

3. 主要结果的证明

令 $u(t) := u(\cdot,t)$，$u_t(\tau) := u(\cdot,t+\tau)$，$\tau \in [-r,0]$，$f(t,u(t),u_t) := f(\cdot,t,u(t),u_t(\tau))$。下面讨论抽象

时滞发展方程(2) mild 解的局部存在唯一性

$$\begin{cases} {}_0^C D_t^\alpha u(t) + Au(t) = f\left(t, u(t), u_t\right), t \in [0,T], \\ u(t) = \varphi(t), t \in [-r, 0], \end{cases} \tag{2}$$

其中 $A := (-\Delta)^s$，$\mathrm{Dom}(A) = \mathbf{H}^s(\Omega) \subset E \to E$；${}_0^C D_t^\alpha u$ 为 $\alpha \in (0,1)$ 阶 Caputo 型分数阶导数；$f : [0,T] \times E \times E_1 \to E$ Lipschitz 连续；$\varphi \in E_1$，$E_1 := C\left([-r,0], \mathbf{H}^s(\Omega)\right)$，$r > 0$ 为常数。

定义 3.1. 设 $u \in E$ 为方程(2)的 mild 解，若满足对 $\forall t \in [-r, T]$，$\|u(t)\| < R$，$R > 0$ 为实数，

$$u(t) = \begin{cases} P_\alpha(t) u(0) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t-s) f\left(s, u(s), u_s\right) \mathrm{d}s, t \in [0,T], \\ \varphi(t), t \in [-r, 0]. \end{cases}$$

定理 1.1 的证明 考虑 E 的非空闭子集

$$\begin{aligned} B_{\delta_1,T} &= \left\{u(t), t \in [0,T] \mid \|u\| \le \delta_1\right\}, \\ B_{\delta_2,T} &= \left\{u(t) = \varphi(t), t \in [-r,0] \mid \|u\| \le \delta_2\right\}, \\ B_{\delta,T} &= \left\{u(t), t \in [-r,T] \mid \|u\| \le \delta = \max\left\{\delta_1, \delta_2\right\}\right\}. \end{aligned}$$

其中 $0 < \delta_1, \delta_2 < R$，$R > 0$ 充分大。因此 $B_{\delta,T}$ 为具有范数 $\|u\|_{B_{\delta,T}} := \|u\|$ 的 Banach 空间。对 $\forall u(t) \in B_{\delta,T}$，定义算子 $S : B_{\delta,T} \to E$ 如下：

$$(Su)(t) = \begin{cases} P_\alpha(t) u(0) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t-s) f\left(s, u(s), u_s\right) \mathrm{d}s, t \in [0,T], \\ \varphi(t), t \in [-r, 0]. \end{cases} \tag{7}$$

下面分两步来证明 S 在 $B_{\delta,T}$ 中有唯一不动点，

1) 证明 $S : B_{\delta,T} \to B_{\delta,T}$。

考查定义式(7)，由(4)式知

$$\left\|P_\alpha(t) u(0)\right\|_{B_{\delta,T}} \le \left\|P_\alpha(t) u(0)\right\| \le \|u(0)\| \equiv \delta_0 \ll R, \tag{8}$$

再由(4)式和(6)式，有

$$\begin{aligned} &\left\|\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t-s) f\left(s, u(s), u_s\right) \mathrm{d}s\right\|_{B_{\delta,T}} \\ &\le \int_0^t |t-s|^{\alpha-1} \left\|Q_\alpha(t-s)\right\| \left\|f\left(s, u(s), u_s\right)\right\| \mathrm{d}s \\ &\le \frac{L(1+2R)}{\Gamma(1+\alpha)} T^\alpha, \end{aligned} \tag{9}$$

取 $T_1 = \left[\dfrac{(R-\delta_0)\Gamma(1+\alpha)}{L(1+2R)}\right]^{\frac{1}{\alpha}}$。当 $T \in [0, T_1]$ 时，结合(8)式和(9)式，有

$$\left\|(Su)(t)\right\|_{B_{\delta,T}} \le \delta_0 + \frac{L(1+2R)}{\Gamma(1+\alpha)} T^\alpha \le R,$$

即对 $\forall t \in [0,T]$，$S : B_{\delta,T} \to B_{\delta,T}$。

2) 证明 S 为压缩映射。对 $\forall u, v \in E$，

$$(Su)(t) - (Sv)(t) = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t-s)\left[f\left(s, u(s), u_s\right) - f\left(s, v(s), v_s\right)\right] \mathrm{d}s,$$

则有

$$\begin{aligned}&\left\|(Su)(t)-(Sv)(t)\right\|_{B_{\delta,T}}\\&\le\int_0^t\left|(t-s)\right|^{\alpha-1}\left\|Q_\alpha(t-s)\right\|\left\|f\left(s,u(s),u_s\right)-f\left(s,v(s),v_s\right)\right\|\mathrm{d}s\\&\le\frac{L}{\Gamma(1+\alpha)}T^\alpha\left(\left\|u(s)-v(s)\right\|_{B_{\delta,T}}+\left\|u_s-v_s\right\|_{B_{\delta,T}}\right),\end{aligned}$$

取 $T_2:=\left[\frac{\Gamma(1+\alpha)}{L}\right]^{\frac{1}{\alpha}}$，$T=\min\{T_1,T_2\}$。则对 $\forall t\in[0,T]$，S 在 $B_{\delta,T}$ 上为压缩映射。

对 $\forall t\in[-r,0]$，$(Su)(t)=\varphi(t)$，容易证明 S 为压缩映射。

结合以上，由 Banach 不动点定理知，对 $\forall t\in[-r,T]$，S 在 $B_{\delta,T}$ 上有唯一不动点，即方程(2)存在唯一 mild 解 $u\in E$。 □

由定理 1.1 的证明知，存在 $T=\min\{T_1,T_2\}$，使得时空分数阶时滞扩散方程(1)存在唯一 mild 解 $u(x,t)\in C(\Omega\times[0,T],\mathbf{R})$，

$$u(x,t)=\begin{cases}P_\alpha(t)u_0(x)+\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(t-s)f\left(x,s,u(x,s),u_s(x)\right)\mathrm{d}s,(x,t)\in\Omega\times[0,T],\\\varphi(x,t),t\in[-r,0],x\in\Omega.\end{cases}$$

4. 结论

本文研究了时空分数阶时滞扩散方程的初边值问题，是文献[4]中结果的推广，同时取消了文献[5]要求方程具有上下解的条件，该问题可以化为抽象的分数阶非线性时滞发展方程的初值问题。在假设非线性项 f 满足局部 Lipschitz 连续的条件下，运用算子半群理论及 Banach 不动点定理，获得了分数阶时滞发展方程 mild 解的局部存在唯一性，即证明了时空分数阶时滞扩散方程(1)存在唯一 mild 解。泛函方程理论中存在一些特殊类型的数据依赖，如 Ulam-Hyers、Ulam-Hyers-rassias 等，若非线性项在适当的条件下使得方程(1)存在唯一 mild 解，则可进一步讨论方程(1)的 Mittag-Leffler 稳定性，这也是未来值得研究的问题。

基金项目

国家自然科学基金资助项目(12061063)；西北师范大学青年教师科研能力提升计划资助项目(NWNU-LKQN2019-3)。

参考文献

[1] Metzler, R. and Klafter, J. (2004) The Restaurant at the End of the Random Walk: Recent Developments in the Description of Nomalous Transport by Fractional Dynamics. *Journal of Physics A*: *Mathematical and General*, **37**, R161-R208. https://doi.org/10.1088/0305-4470/37/31/R01

[2] Meerschaert, M.M., Benson, D.A., Scheffler, H.P. and Baeumer, B. (2002) Stochastic Solution of Space-Time Fractional Diffusion Equations. *Physical Review E*: *Statistical*, *Nonlinear*, *and Soft Matter Physics*, **65**, 041103-041116. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.65.041103

[3] Baeumer, B., Meerschaert, M. and Nane, E. (2009) Space-Time Duality for Fractional Diffusion. *Journal of Applied Probability*, **46**, 1100-1115. https://doi.org/10.1239/jap/1261670691

[4] Padgett, J. (2018) The Quenching of Solutions to Time-Space Fractional Kawarada Problems. *Computers & Mathematics with Applications*, **76**, 1583-1592. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2018.07.009

[5] Li, Q., Wang, G.T. and Wei, M. (2021) Monotone Iterative Technique for Time-Space Fractional Diffusion Equations Involving Delay. *Nonlinear Analysis*: *Modelling and Control*, **26**, 241-258.

https://doi.org/10.15388/namc.2021.26.21656

[6] Baleanu, D., Inc, M., Yusuf, A. and Aliyu, A. (2017) Lie Symmetry Analysis, Exact Solutions and Conservation Laws for the Time Fractional Modified Zakharov-Kuznetsov Equation. *Nonlinear Analysis*: *Modelling and Control*, **22**, 861-876. https://doi.org/10.15388/NA.2017.6.9

[7] Chen, P.Y. and Zhang, X.P. (2021) Upper Semi-Continuity of Attractors for Non-Autonomous Fractional Stochastic Parabolic Equations with Delay. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, *Series B*, **26**, 4325-4357. https://doi.org/10.3934/dcdsb.2020290

[8] 黄启昌, 史希福, 魏俊杰. 非线性两点边值问题[M]. 呼和浩特: 内蒙古人民出版社, 1986.