Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(4), 561-564
Published Online April 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.124062

一类Newman多项式的性质

李昌吉

阿坝师范学院，藏汉双语学院，四川 汶川

收稿日期：2022年3月10日；录用日期：2022年4月13日；发布日期：2022年4月20日

摘 要

与系数相关的表达式的极值问题是Newman多项式相关研究中的一个热点。令$h_i(x)$是一类系数全为1的Newman多项式，借助不等式和组合的方法，讨论了与$h_i^3(x)$、$h_i^4(x)$系数相关表达式的取值，给出了该表达式的极值，从n的不同取值对结论进行了推广。

关键词

Newman多项式，系数，极值性质

Properties of a Class of Newman Polynomials

Changji Li

Tibetan-Chinese Bilingual School, Aba Teachers University, Wenchuan Sichuan

Received: Mar. 10th, 2022; accepted: Apr. 13th, 2022; published: Apr. 20th, 2022

Abstract

The extreme value problem of the expression related to coefficients is a hot spot in the research of Newman polynomials. Letting $h_i(x)$ be a kind of Newman polynomials with all coefficients of 1, the value of the coefficient correlation expression of the $h_i^3(x)$ and $h_i^4(x)$ is discussed by method of inequality and combination，and the extremal properties of the expression are given, and the conclusion is generalized from different values of n.

Keywords

Newman Polynomials, Coefficients, Extremal Properties

文章引用: 李昌吉. 一类 Newman 多项式的性质[J]. 理论数学, 2022, 12(4): 561-564.
DOI: 10.12677/pm.2022.124062

1. 引言及结论

多项式是代数中的重要内容之一，系数受限的多项式及其相关性质是多项式研究中的热点问题之一。Newman 多项式是指形如 $f_i(x)=\sum_{i=0}^{m}a_ix^i$， $a_i\in\{0,1\}$ 的多项式，这是一类系数受限的特殊多项式。有关 Newman 多项式的研究成果较多，如文献[1]-[8]。一些学者聚焦于研究 Newman 多项式中关于系数极值性质，取得了一定的成果。如文献[9]研究了 Newman 多项式导数的一些极值性质。记 $(\# f_i)$ 为多项式 $f_i(x)$ 中系数非零的项数，$\zeta(f_i^n)$ 是多项式 f_i^n 展开式所有项中的最大系数，$\gamma(n)=\dfrac{\deg(f_i)\zeta(f_i^n)}{(\# f_i)^n}$。文献[10]给出当 $(\# f_i)=o(\deg f_i)$ 时，可以推出 $\liminf_{i\to\infty}(\gamma(2))\ge 1$。文献[11]指出当条件 $(\# f_i)=o(\deg f_i)$ 取消后，$\liminf_{i\to\infty}(\gamma(2))$ 发生变化，并得出 $\liminf_{i\to\infty}(\gamma(2))=\dfrac{8}{9}$，并猜测此时有 $\inf(\gamma(2))\ge\dfrac{8}{9}$。本文将研究在 $(\# f_i)=o(\deg f_i)$ 情形下，一类特定形式的 Newman 多项式在 $i\to\infty$ 时的 $\inf(\gamma(3))$ 和 $\inf(\gamma(4))$ 的极值问题。本文中研究的 Newman 多项式的类型是形如：$h_i(x)=\sum_{i=0}^{m}a_ix^i$， $a_i=1$ 的多项式，在此条件下有 $(\# h_i)=o(\deg h_i)$，并得出结论如下：

定理 1 当 $h_i(x)=\sum_{i=0}^{m}a_ix^i$， $a_i=1$ 时，有 $\liminf_{i\to\infty}(\gamma(3))=\dfrac{3}{4}$。

定理 2 当 $h_i(x)=\sum_{i=0}^{m}a_ix^i$， $a_i=1$ 时，有 $\liminf_{i\to\infty}(\gamma(4))=\dfrac{2}{3}$。

2. 定理证明

2.1. 定理 1 的证明

令 $h_i(x)=\sum_{i=0}^{m}a_ix^i=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{i-1}+x^i$，

易知，$(\# h_i)=i+1$，$(\deg h_i)=i$，又

$$\begin{aligned}h_i^3(x)&=\left(1+x+\cdots+x^{i-1}+x^i\right)^3\\&=1+3x+6x^2+\cdots+\frac{i(i+1)}{2}x^{i-1}+\frac{(i+1)(i+2)}{2}x^i\\&\quad+\frac{i^2+5i}{2}x^{i+1}+\frac{i^2+6i-6}{2}x^{i+2}+\cdots+\frac{i^2+3i+2}{2}x^{2i}\\&\quad+\frac{i(i+1)}{2}x^{2i+1}+\frac{(i-1)i}{2}x^{2i+2}+\cdots+3x^{3i-1}+x^{3i}\end{aligned}$$

当 $i\equiv 0(\bmod 2)$ 时，多项式 $h_i^3(x)$ 中 $x^{\frac{3}{2}i}$ 的系数最大，此时有

$$\zeta\left(h_i^3\right)=\left(\frac{i}{2}+1\right)+\left(\frac{i}{2}+2\right)+\cdots+(i-1)+i+(i-1)+\cdots\left(\frac{i}{2}+2\right)+\left(\frac{i}{2}+1\right)$$
$$=\frac{3(i+1)(i+2)}{4}$$

所以 $\liminf\limits_{i\to\infty}\left(\gamma(3)\right)=\lim\limits_{i\to\infty}\frac{i\cdot 3(i+1)(i+2)}{4(i+1)^3}=\frac{3}{4}$。

当 $i\equiv 1(\bmod 2)$ 时，多项式 $h_i^3(x)$ 中 $x^{\frac{3i-1}{2}}$，$x^{\frac{3i+1}{2}}$ 的系数最大，此时有

$$\zeta\left(h_i^3\right)=\frac{i+3}{2}+\frac{i+5}{2}+\cdots+i+(i+1)+i+\cdots+\frac{i+5}{2}+\frac{i+3}{2}+\frac{i+1}{2}$$
$$=\frac{3(i+1)^2}{4}$$

所以 $\liminf\limits_{i\to\infty}\left(\gamma(3)\right)=\lim\limits_{i\to\infty}\frac{i\cdot 3(i+1)^2}{4(i+1)^3}=\frac{3}{4}$。

综上，对任意正整数 i，均有 $\liminf\limits_{i\to\infty}\left(\gamma(3)\right)=\frac{3}{4}$，定理 1 得证。

2.2. 定理 2 的证明

令 $h_i(x)=\sum_{i=0}^{m}a_ix^i=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{i-1}+x^i$，

易知，$(\#h_i)=i+1$，$(\deg h_i)=i$，又

$$\begin{aligned}
h_i^4(x)&=\left(1+x+\cdots+x^{i-1}+x^i\right)^4\\
&=\left(1+2x+3x^2+4x^3+\cdots+ix^{i-1}+(i+1)x^i+(i-1)x^{i+1}+\cdots+3x^{2i-2}+2x^{2i-1}+x^{2i}\right)^2\\
&=\sum_{r=0}^{i}\left(\sum_{j+k=r+2,j,k>0}jk\right)x^r\\
&\quad+\left(i\cdot 1+(i+1)\cdot 2+i\cdot 3+(i-1)\cdot 4+\cdots+2\cdot(i+1)+1\cdot i\right)x^{i+1}\\
&\quad+\left((i-1)\cdot 1+i\cdot 2+(i+1)\cdot 3+i\cdot 4+\cdots+3\cdot(i+1)+2\cdot i+1\cdot(i-1)\right)x^{i+2}\\
&\quad+\left((i-2)\cdot 1+(i-1)\cdot 2+i\cdot 3+(i+1)\cdot 4+i\cdot 5+\cdots+2\cdot(i-1)+1\cdot(i-2)\right)x^{i+3}\\
&\quad+\cdots\\
&\quad+\left(1\cdot 1+2\cdot 2+\cdots+i\cdot i+(i+1)\cdot(i+1)+i\cdot i+\cdots+2\cdot 2+1\cdot 1\right)x^{2i}\\
&\quad+\left(1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+(i-1)\cdot i+i\cdot(i+1)+(i+1)\cdot i+i(i-1)+\cdots+3\cdot 2+2\cdot 1\right)x^{2i+1}\\
&\quad+\left(1\cdot 3+2\cdot 4+\cdots+(i-1)\cdot(i+1)+i\cdot i+(i+1)\cdot(i-1)+i\cdot(i-2)+\cdots+4\cdot 2+3\cdot 1\right)x^{2i+2}\\
&\quad+\cdots\\
&\quad+\left(1\cdot(i+1)+2\cdot i+3\cdot(i-1)+(i-1)\cdot 3+i\cdot 2+(i+1)\cdot 1\right)x^{3i}\\
&\quad+\left(\sum_{j+k=i+2,j,k>0}jk\right)x^{3i}+\left(\sum_{j+k=i+1,j,k>0}jk\right)x^{3i+1}+\left(\sum_{j+k=i,j,k>0}jk\right)x^{3i+2}\\
&\quad+\cdots\\
&\quad+\left(\sum_{j+k=3,j,k>0}jk\right)x^{4i-1}+\left(\sum_{j+k=2,j,k>0}jk\right)x^{4i}
\end{aligned}$$

结合排序不等式，易知多项式 $h_i^4(x)$ 展开式中 x^{2i} 的系数最大，此时有

$$\begin{aligned}\zeta\left(h_i^4\right)&=1^2+2^2+\cdots+i^2+\left(i+1\right)^2+i^2+\cdots+2^2+1^2\\&=2\cdot\frac{i(i+1)(2i+1)}{6}+(i+1)^2\\&=\frac{(i+1)\left(2i^2+4i+3\right)}{3}\end{aligned}$$

所以 $\liminf\limits_{i\to\infty}\left(\gamma(4)\right)=\lim\limits_{i\to\infty}\dfrac{i\cdot(i+1)\left(2i^2+4i+3\right)}{3(i+1)^4}=\dfrac{2}{3}$。

综上，定理 2 得证。

3. 研究展望

本文主要探讨了一类 Newman 多项式 f_i 中关于相关系数的表达式 $\gamma(n)=\dfrac{\deg(f_i)\zeta(f_i^n)}{(\# f_i)^n}$ ($(\# f_i)=o(\deg f_i)$)的极值问题，将 n 的值从 2 的情形推广到了 3 和 4 的情形。当条件 $(\# f_i)=o(\deg f_i)$ 取消时，本文猜测 $n=3$ 和 4 时 $\gamma(n)=\dfrac{\deg(f_i)\zeta(f_i^n)}{(\# f_i)^n}$ 的极值情况将会和 $n=2$ 时发生改变的情形相似，也会发生改变，在此情形下，$\dfrac{(\# f_i)}{\deg(f_i)}$ 的极值相应会有怎样的变化，这些将作为下一步研究的方向。

基金项目

阿坝师范学院科研项目(20170101, ASB21-04, 202007013)。

参考文献

[1] Newman, D.J. (1965) An L1 Extremal Problem for Polynomials. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **16**, 1287-1290. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1965-0185119-4

[2] Boyd, D.W. (1986) Large Newman Polynomials. In: Loxton, J.H. and van Poorten, A.J., Eds., *Diophantine Analysis*, *Kensington*, Vol. 109, Cambridge University Press, Cambridge, 159-170. https://doi.org/10.1017/CBO9780511721304.010

[3] Smyth, C.J. (1985) Some Results on Newman Polynomials. *Indiana University Mathematics Journal*, **34**, 195-200. https://doi.org/10.1512/iumj.1985.34.34010

[4] Borwein, P. and Mossingho, M.J. (2003) Newman Polynomials and with Prescribed Vanishing and Integer Sets with Distinct Subset Sums. *Mathematics of Computation*, **72**, 787- 800. https://doi.org/10.1090/S0025-5718-02-01460-6

[5] Dubickas, A. (2003) The Divisors of Newman Polynomials. *Fizikos ir Matematikos Fakulteto Mokslinio Seminaro Darbai*, **6**, 25-28.

[6] Drungilas, P., *et al.* (2018) On Certain Multiples of Littlewood and Newman Polynomials. https://doi.org/10.48550/arXiv.1801.07179

[7] Hare, K.G. and Jankauskas, J. (2019) On Newman and Littlewood Polynomials with Prescribed Number of Zeros inside the Unit Disk. https://doi.org/10.1090/mcom/3570

[8] Dutykh, D. and Verger-Gaugry, J.L. (2019) On the Reducibility and the Lenticular Sets of Zeroes of Almost Newman Lacunary Polynomials.

[9] Erdélyi, T. (2003) Extremal Properties of the Derivatives of the Newman Polynomials. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **131**, 3129-3134.

[10] Yu, G. (2007) An Upper Bound for B2[g] Sets. *Journal of Number Theory*, **122**, 211-220.

[11] Berenhaut, K.S. and Saidak, F. (2007) A Note on the Maximal Coefficients of Squares of Newman Polynomials. *Journal of Number Theory*, **125**, 285-288. https://doi.org/10.1016/j.jnt.2006.09.015