Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(5), 826-837
Published Online May 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.125093

闵可夫斯基积芬斯勒流形的嘉当挠率

张 娜，何 勇*，张 辉，李淑雯

新疆师范大学数学科学学院，新疆 乌鲁木齐

收稿日期：2022年4月18日；录用日期：2022年5月19日；发布日期：2022年5月27日

摘 要

设 (M_1, F_1) 和 (M_2, F_2) 是两个芬斯勒流形, 闵可夫斯基积芬斯勒度量是在乘积流形 $M = M_1 \times M_2$ 上赋予的芬斯勒度量 $F = \sqrt{f(K, H)}$, 其中 $K = F_1^2, H = F_2^2$, 且 f 是积函数. 本文主要研究闵可夫斯基积芬斯勒流形 (M, F) 的嘉当挠率和平均嘉当挠率, 利用张量分析法, 得到了闵可夫斯基积芬斯勒流形 (M, F) 的嘉当挠率消失的必要条件; 在 (M_1, F_1) 和 (M_2, F_2) 的平均嘉当挠率消失的条件下, 给出了闵可夫斯基积芬斯勒流形 (M, F) 的平均嘉当挠率消失的充分条件, 从而给出了一种刻画具有特殊性质的芬斯勒流形的有效方法.

关键词

芬斯勒流形，闵可夫斯基积，嘉当挠率，平均嘉当挠率

Cartan Torsion of Minkowskian Product Finsler Manifold

Na Zhang, Yong He*, Hui Zhang, Shuwen Li

College of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: Apr. 18^{th}, 2022; accepted: May 19^{th}, 2022; published: May 27^{th}, 2022

* 通讯作者。

文章引用: 张娜, 何勇. 闵可夫斯基积芬斯勒流形的嘉当挠率[J]. 理论数学, 2022, 12(5): 826-837.
DOI: 10.12677/pm.2022.125093

Abstract

Let (M_1, F_1) and (M_2, F_2) be two Finsler manifolds, Minkowskian product Finsler metric is the Finsler metric $F = \sqrt{f(K, H)}$ endowed on the product manifold $M = M_1 \times M_2$, where $K = F_1^2$, $H = F_2^2$, and f is product function. In this paper, we study Cartan torsion and mean Cartan torsion of Minkowskian product Finsler manifold (M, F). By using tensor analysis, we obtain the necessary condition that Minkowskian product Finsler manifold (M, F) has vanishing Cartan torsion. Also, we give the sufficient condition that Minkowskian product Finsler manifold (M, F) has vanishing mean Cartan torsion under the conditions of Finsler manifolds (M_1, F_1) and (M_2, F_2) have vanishing mean Cartan torsion. Then an effective method for characterise Finsler manifolds with special property is given.

Keywords

Finsler Manifold, Minkowskian Product, Cartan Torsion, Mean Cartan Torsion

1. 引言

芬斯勒几何在自然学科领域应用广泛, 尤其在物理学、生物学、工程技术、信息几何、控制论和广义相对论等方面 [1] [2]. 1918 年, Finsler 在他的博士论文中首次给出了“芬斯勒几何”这一名称, 并定义了嘉当挠率 [3]. 1934 年, Cartan [4]引入了嘉当联络并证明了嘉当挠率 $\mathbf{C}$ 能衡量流形上的芬斯勒度量与黎曼度量的偏离程度. 若 $\mathbf{C} = 0$, 则芬斯勒度量是黎曼度量, 因此嘉当挠率被称为芬斯勒几何中的非黎曼几何量.

嘉当挠率沿着测地线的变化率被称为 Landsberg 曲率. 1950 年, Ehresmann 研究了特殊情形下的嘉当联络 [5]. 1972 年, Matsumoto 利用嘉当挠率刻画了一类特殊的芬斯勒流形, 称之为 C-可约芬斯勒流形 [6], 随后他证明了嘉当联络的唯一性 [7]. 1989 年, Fukui 给出了具有嘉当联络的复芬斯勒流形是黎曼流形的必要条件 [8]. 1998 年, 沈忠民 [9] 证明了具有无界嘉当挠率的芬斯勒流形不能等距嵌入到任何闵可夫斯基空间中, 他还证明了具有有界嘉当挠率的 R-二次正完备芬斯勒流形一定

是 Landsberg 流形 [10]. 2010 年, 莫小欢 [11]推广了文 [10]的结果, 即证明了具有有界嘉当挠率的 R-二次正完备芬斯勒流形一定是贝瓦尔德流形.

平均嘉当挠率也是芬斯勒几何中一类十分重要的非黎曼几何量. 平均嘉当挠率是嘉当挠率的迹, 它沿着测地线的变化率被称为平均 Landsberg 曲率. 1953 年, Deicke [12] 提出了著名的 Deicke 定理, 即一个正定芬斯勒流形是黎曼流形当且仅当该芬斯勒流形的平均嘉当挠率消失. 此后, 研究特殊芬斯勒流形的嘉当挠率和平均嘉当挠率成为了许多学者关注的热点问题 [13–18].

1982年, Okada [19]提出闵可夫斯基积芬斯勒流形的概念, 并得到了闵可夫斯基积芬斯勒流形上的测地线与其分量流形上测地线之间的关系. 自然的问题是如何刻画闵可夫斯基芬斯勒流形的嘉当挠率和平均嘉当挠率, 以及探究闵可夫斯基芬斯勒流形是否具有消失的嘉当挠率和平均嘉当挠率. 针对上述问题, 本文得到了闵可夫斯基积芬斯勒流形的嘉当挠率消失的必要条件, 并在两个分量流形的平均嘉当挠率消失的条件下, 给出了闵可夫斯基积芬斯勒流形的平均嘉当挠率消失的充分条件.

2. 预备知识

设 M 是一个 n 维光滑流形, T_xM 表示 $x \in M$ 的切空间, $TM = \bigcup\limits_{x\in M} T_xM$ 表示 M 的切丛, 设 M 上的局部坐标为 $x^i = (x^1, \dots, x^n)$, T_xM 上的局部坐标为 $(x^i, y^i) = (x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$.

定义1. [20] 流形 M 上的芬斯勒度量是一函数 F: $TM \to R^+$, 满足

1) $G = F^2$ 在 $\tilde{M} = TM \setminus \{0\}$ 上是光滑函数;

2) 对于任意的 $(x, y) \in \tilde{M}$, $F(x, y) > 0$;

3) 对于任意的 $(x, y) \in \tilde{M}$, $\lambda \in \mathbf{R}$, 有 $F(x, \lambda y) = |\lambda| F(x, y)$;

4) 黑塞矩阵 $(G_{\alpha\beta}) = (\frac{\partial^2 G}{\partial y^\alpha \partial y^\beta})$ 在 $\tilde{M}$ 上是正定矩阵.

设 $(G^{\gamma\alpha})$ 表示 $(G_{\alpha\beta})$ 的逆矩阵, 即 $G^{\gamma\alpha}G_{\alpha\beta} = \delta^\gamma_\beta$.

定义2. [21] 设 (M, F) 是一个芬斯勒流形, F 的嘉当挠率 $\mathbf{C} : T_xM \times T_xM \times T_xM \to R$ 为

$$\mathbf{C} = C_{\alpha\beta\gamma} dx^\alpha \otimes dx^\beta \otimes dx^\gamma, \tag{2.1}$$

其中

$$C_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{4} G_{y^\alpha y^\beta y^\gamma} = \frac{1}{4} \frac{\partial G_{\alpha\beta}}{\partial y^\gamma}. \tag{2.2}$$

定义3. [21] 设 (M, F) 是一个芬斯勒流形, F 的平均嘉当挠率 $\mathbf{I} : T_xM \to R$ 为

$$\mathbf{I} = I_\alpha(x, y) dx^\alpha, \tag{2.3}$$

其中

$$I_\alpha = \frac{1}{2} G^{\beta\gamma} \frac{\partial G_{\alpha\beta}}{\partial y^\gamma} = 2G^{\beta\gamma} C_{\alpha\beta\gamma}. \tag{2.4}$$

设 $(M_1,\ F_1)$ 和 $(M_2,\ F_2)$ 是两个芬斯勒流形, 维数分别为 m 和 n, 则 $M = M_1 \times M_2$ 是一个 $m+n$ 维的乘积流形. 记 M_1, M_2 和 M 的局部坐标分别为 $(x^1, \ldots,\ x^m)$, $(x^{m+1}, \ldots,\ x^{m+n})$, $(x^1,\ \ldots,\ x^m,\ x^{m+1}, \ldots,\ x^{m+n})$; 设 M_1, M_2 和 M 的切丛分别是 TM_1, TM_2 和 TM, 它们的局部坐标分别为 $(x^1, \ldots, x^m, y^1, \ldots, y^m)$, $(x^{m+1}, \ldots, x^{m+n}, y^{m+1}, \ldots, y^{m+n})$, $(x^1, \ldots, x^{m+n}, y^1, \ldots, y^{m+n})$. TM_1, TM_2, TM 之间满足 $TM \cong TM_1 \oplus TM_2$.

定义4. [19] 设 $f : [0, +\infty) \times [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ 是一个连续函数, 若 f 满足

1) $f(s, t) = 0$ 当且仅当 $(s, t) = (0, 0)$;

2) 对任意 $\lambda \in [0, +\infty)$, 有 $f(\lambda s, \lambda t) = \lambda f(s, t)$;

3) f 在 $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$ 上是光滑函数;

4) 对任意 $(s, t) \in (0, +\infty) \times (0, +\infty)$, 有 $\frac{\partial f}{\partial s} \neq 0,\ \frac{\partial f}{\partial t} \neq 0$;

5) 对任意 $(s, t) \in (0, +\infty) \times (0, +\infty)$, 有 $\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial t} - 2f\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t} \neq 0$,

则称 f 为积函数.

命题1. [22] 设 f 是积函数, 则对任意的 $K \neq 0, H \neq 0$, 有

$$f_{HK}K + f_{HH}H = 0, \tag{2.5}$$

$$f_K K + f_H H = f, \tag{2.6}$$

$$f_{KK}K + f_{KH}H = 0, \tag{2.7}$$

$$f_{KKK}K + f_{KKH}H = -f_{KK}, \tag{2.8}$$

$$f_{KHK}K + f_{KHH}H = -f_{KH}, \tag{2.9}$$

$$f_{HHK}K + f_{HHH}H = -f_{HH}. \tag{2.10}$$

其中 f_K 和 f_H 分别表示 f 对 K 和 H 的偏导数, 如 $f_H = \frac{\partial f}{\partial H}, f_{KH} = \frac{\partial^2 f}{\partial K \partial H}$.

定义5. [19] 设 (M_1, F_1) 和 (M_2, F_2) 是两个芬斯勒流形, 令 $K = F_1^2, H = F_2^2$, F_1 和 F_2 关于 f 的闵可夫斯基积度量是在乘积流形 $M = M_1 \times M_2$ 上赋予的如下形式的度量 $F : TM \to R^+$

$$F(x, y) = \sqrt{f(K(x^i, y^i), H(x^{i'}, y^{i'}))}, \tag{2.11}$$

其中 f 是积函数. 显然 (M, F) 也是一个芬斯勒流形, 称 (M, F) 为 (M_1, F_1) 和 (M_2, F_2) 关于 f 的闵可夫斯基积流形, 常简称 (M, F) 为闵可夫斯基积芬斯勒流形.

本文中, $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ 等小写希腊字母的取值范围为 1 到 $m+n$; $i,\ j,\ k$ 等小写拉丁字母的取值范围为 1 到 m; $i',\ j',\ k'$ 等带撇的小写拉丁字母的取值范围为 $m+1$ 到 $m+n$. 关于 (M_1, F_1) 或 (M_2, F_2) 的几何量, 我们分别在其正上方添加指标 1 或 2 以示区别, 如 $\overset{1}{C}_{ijk}$ 和 $\overset{2}{C}_{i'j'k'}$ 分别表示芬斯勒流形 (M_1, F_1) 和 (M_2, F_2) 的嘉当挠率系数.

设 (M, F) 是芬斯勒流形 (M_1, F_1) 和 (M_2, F_2) 的闵可夫斯基积, 则 F 的基本张量矩阵为

$$\mathbf{G} = (G_{\alpha\beta}) = (\frac{\partial^2 G}{\partial y^\alpha \partial y^\beta}) = \begin{pmatrix} G_{ij} & G_{ij'} \\ G_{i'j} & G_{i'j'} \end{pmatrix},$$

其中

$$\begin{cases} G_{ij} = f_K K_{ij} + f_{KK} K_i K_j, & (2.12) \\ G_{ij'} = f_{KH} K_i H_{j'}, & (2.13) \\ G_{i'j} = f_{HK} H_{i'} K_j = f_{KH} H_{i'} K_j, & (2.14) \\ G_{i'j'} = f_H H_{i'j'} + f_{HH} H_{i'} H_{j'}. & (2.15) \end{cases}$$

K_i, $H_{i'}$ 分别表示 K, H 对 $y^i, y^{i'}$ 的偏导数, 如 $K_i = \frac{\partial K}{\partial y^i}$, $H_{i'j'} = \frac{\partial^2 H}{\partial y^{i'} \partial y^{j'}}$. $(G_{\alpha\beta})$ 的逆矩阵 $(G^{\beta\alpha})$ 为

$$(G^{\beta\alpha}) = \begin{pmatrix} G^{ji} & G^{ji'} \\ G^{j'i} & G^{j'i'} \end{pmatrix},$$

其中

$$\begin{cases} G^{ji} = \dfrac{1}{f_K}(K^{ji} - \dfrac{f_H f_{KK}}{\Delta} y^j y^i), & (2.16) \\ G^{ji'} = -\dfrac{1}{\Delta} f_{KH} y^j y^{i'}, & (2.17) \\ G^{j'i} = -\dfrac{1}{\Delta} f_{KH} y^{j'} y^i, & (2.18) \\ G^{j'i'} = \dfrac{1}{f_H}(H^{j'i'} - \dfrac{f_K f_{HH}}{\Delta} y^{j'} y^{i'}), & (2.19) \end{cases}$$

且

$$\Delta = f_K f_H - 2 f f_{KH}. \tag{2.20}$$

3. 闵可夫斯基积芬斯勒流形的嘉当挠率

根据嘉当挠率和闵可夫斯基积芬斯勒流形的定义, 本节将推导出闵可夫斯基积芬斯勒流形 (M, F) 的嘉当挠率系数表达式, 当闵可夫斯基积芬斯勒流形 (M, F) 的嘉当挠率消失时, 得到了一个偏微分方程组, 即给出了闵可夫斯基积芬斯勒流形 (M, F) 的嘉当挠率消失的必要条件.

命题2. 设 (M, F) 是芬斯勒流形 (M_1, F_1) 和 (M_2, F_2) 的闵可夫斯基积, 则 (M, F) 的嘉当挠率系数 $C_{\alpha\beta\gamma}$ 为

$$\begin{aligned} C_{ijk} = f_K \overset{1}{C}_{ijk} + \frac{1}{4}(f_{KKK} K_i K_j K_k + f_{KK} K_{ij} K_k \\ + f_{KK} K_{ik} K_j + f_{KK} K_{jk} K_i), \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$C_{i'jk} = \frac{1}{4}(f_{HKK} H_{i'} K_j K_k + f_{HK} H_{i'} K_{jk}), \tag{3.2}$$

$$C_{ij'k} = \frac{1}{4}(f_{KHK}K_iH_{j'}K_k + f_{KH}K_{ik}H_{j'}), \tag{3.3}$$

$$C_{ijk'} = \frac{1}{4}(f_{KKH}K_iK_jH_{k'} + f_{KH}K_{ij}H_{k'}), \tag{3.4}$$

$$C_{i'j'k} = \frac{1}{4}(f_{HHK}H_{i'}H_{j'}K_k + f_{HK}H_{i'j'}K_k), \tag{3.5}$$

$$C_{i'jk'} = \frac{1}{4}(f_{HKH}H_{i'}K_jH_{k'} + f_{HK}H_{i'k'}K_j), \tag{3.6}$$

$$C_{ij'k'} = \frac{1}{4}(f_{KHH}K_iH_{j'}H_{k'} + f_{KH}K_iH_{j'k'}), \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned} C_{i'j'k'} = f_H \overset{2}{C}_{i'j'k'} + &\frac{1}{4}(f_{HHH}H_{i'}H_{j'}H_{k'} + f_{HH}H_{i'j'}H_{k'} \\ &+ f_{HH}H_{i'k'}H_{j'} + f_{HH}H_{j'k'}H_{i'}). \end{aligned} \tag{3.8}$$

证明. 令 (2.2) 中 $\alpha = i,\ \beta = j,\ \gamma = k$, 并将 (2.12) 代入, 经直接计算可得

$$\begin{aligned} C_{ijk} &= \frac{1}{4}\frac{\partial G_{ij}}{\partial y^k} \\ &= \frac{1}{4}(f_{KKK}K_iK_jK_k + f_{KK}K_{ik}K_j + f_{KK}K_iK_{jk} \\ &\quad + f_{KK}K_kK_{ij} + f_KK_{ijk}). \end{aligned} \tag{3.9}$$

在流形 (M_1, F_1) 上应用定义 2, 并注意到 $K = F_1^2$, 则有

$$K_{ijk} = 4\overset{1}{C}_{ijk}\,. \tag{3.10}$$

将 (3.10) 代入 (3.9), 可得

$$C_{ijk} = f_K \overset{1}{C}_{ijk} + \frac{1}{4}(f_{KKK}K_iK_jK_k + f_{KK}K_{ij}K_k + f_{KK}K_{ik}K_j + f_{KK}K_{jk}K_i).$$

即 (3.1) 成立. 同理可证 (3.2)-(3.8) 成立. 证毕. □

定理1. 设 (M, F) 是芬斯勒流形 (M_1, F_1) 和 (M_2, F_2) 的闵可夫斯基积. 若 (M, F) 的嘉当挠率 $\mathbf{C}$ 消失, 则下列方程组成立

$$\begin{cases} 2f_{KKK}K + 3f_{KK} = 0, & (3.11) \\ 2f_{HHH}H + 3f_{HH} = 0, & (3.12) \\ f_{KHK}K - f_{KHH}H = 0. & (3.13) \end{cases}$$

证明. 由 (2.1) 可知, (M, F) 的嘉当挠率消失当且仅当

$$C_{ijk} = C_{i'jk} = C_{ij'k} = C_{ijk'} = C_{i'j'k} = C_{i'jk'} = C_{ij'k'} = C_{i'j'k'} = 0. \tag{3.14}$$

根据 (3.1), (3.14) 中 $C_{ijk} = 0$ 等价于

$$f_K \overset{1}{C}_{ijk} + \frac{1}{4}(f_{KKK}K_iK_jK_k + f_{KK}K_{ij}K_k + f_{KK}K_{ik}K_j + f_{KK}K_{jk}K_i) = 0. \tag{3.15}$$

(3.15) 两边同时与 $y^iy^jy^k$ 缩并, 并注意到 $y^k \overset{1}{C}_{ijk} = 0$, 可得

$$y^iy^jy^k(f_{KKK}K_iK_jK_k + f_{KK}K_{ij}K_k + f_{KK}K_{ik}K_j + f_{KK}K_{jk}K_i) = 0. \tag{3.16}$$

由于 $K = F_1^2$ 关于 y 具有二次齐次性, 根据欧拉定理有

$$K_{ij}y^i = K_j, \tag{3.17}$$

$$K_iy^i = 2K. \tag{3.18}$$

将 (3.17) 和 (3.18) 代入 (3.16), 并注意到 $K \neq 0$, 则有

$$2f_{KKK}K + 3f_{KK} = 0.$$

同理根据 (3.8) 和 (3.14) 中 $C_{i'j'k'} = 0$, 可以推得

$$2f_{HHH}H + 3f_{HH} = 0.$$

根据 (3.2), (3.14) 中 $C_{i'jk} = 0$ 等价于

$$f_{HKK}H_{i'}K_jK_k + f_{HK}H_{i'}K_{jk} = 0. \tag{3.19}$$

(3.19) 两边同时与 $y^{i'}y^jy^k$ 缩并, 并应用 (3.17) 和 (3.18), 可得

$$2f_{HKK}K + f_{KH} = 0. \tag{3.20}$$

把 (2.9) 代入 (3.20), 有

$$f_{KHK}K - f_{KHH}H = 0.$$

同理由 (3.14) 中的其它等式亦可推出 (3.13) 成立. 证毕. □

4. 闵可夫斯基积芬斯勒流形的平均嘉当挠率

根据平均嘉当挠率和闵可夫斯基积芬斯勒流形的定义, 本节将推导出闵可夫斯基积芬斯勒流形 (M, F) 的平均嘉当挠率系数表达式, 在一定条件下给出闵可夫斯基积芬斯勒流形 (M, F) 的平均嘉当挠率消失的充分条件, 即刻画了具有特殊挠率性质的芬斯勒流形.

命题3. 设 (M, F) 是芬斯勒流形 (M_1, F_1) 和 (M_2, F_2) 的闵可夫斯基积, 则 (M, F) 的平均嘉当挠率

DOI: 10.12677/pm.2022.125093

系数 I_α 为

$$I_i = \overset{1}{I}_i - \frac{K_i}{2\Delta}[f_H(f_{KKK}K + 3f_{KKH}H) - f_K(f_{KHH}H - 2f_{KHK}K)], \tag{4.1}$$

$$I_{i'} = \overset{2}{I}_{i'} - \frac{H_{i'}}{2\Delta}[f_K(f_{HHH}H + 3f_{HHK}K) - f_H(f_{HKK}K - 2f_{HKH}H)]. \tag{4.2}$$

证明. 令 (2.4) 中 $\alpha = i$, 有

$$I_i = 2G^{\beta\gamma}C_{i\beta\gamma} = 2(G^{jk}C_{ijk} + G^{j'k}C_{ij'k} + G^{jk'}C_{ijk'} + G^{j'k'}C_{ij'k'}). \tag{4.3}$$

根据 (2.16) 和 (3.1), 有

$$\begin{aligned}
G^{jk}C_{ijk} =& \frac{1}{f_K}(K^{jk} - \frac{f_H f_{KK}}{\Delta}y^j y^k)[f_K \overset{1}{C}_{ijk} + \frac{1}{4}(f_{KKK}K_iK_jK_k \\
&+ f_{KK}K_{ij}K_k + f_{KK}K_{ik}K_j + f_{KK}K_{jk}K_i)] \\
=& K^{jk}\overset{1}{C}_{ijk} + \frac{1}{4f_K}(f_{KK}K_i + f_{KK}\delta_i^k K_k + f_{KK}\delta_i^j K_j) \\
&+ \frac{1}{4f_K}K^{jk}f_{KKK}K_iK_jK_k - \frac{1}{4f_K}\frac{f_H f_{KK}}{\Delta}y^j y^k(f_{KKK}K_iK_jK_k \\
&+ f_{KK}K_{ij}K_k + f_{KK}K_{ik}K_j + f_{KK}K_{jk}K_i) - \frac{2f_H f_{KK}}{\Delta}y^j y^k \overset{1}{C}_{ijk} \\
=& K^{jk}\overset{1}{C}_{ijk} + \frac{3}{4f_K}f_{KK}K_i + \frac{1}{4f_K}K^{jk}f_{KKK}K_iK_jK_k \\
&- \frac{1}{4f_K}\frac{f_H f_{KK}}{\Delta}y^j y^k(f_{KKK}K_iK_jK_k + f_{KK}K_{ij}K_k \\
&+ f_{KK}K_{ik}K_j + f_{KK}K_{jk}K_i),
\end{aligned} \tag{4.4}$$

其中第三个等式推导中应用到 $y^k \overset{1}{C}_{ijk} = 0$. (3.17) 两边同时与 K^{jk} 缩并, 可得

$$K^{jk}K_j = y^k. \tag{4.5}$$

把 (3.18) 和 (4.5) 代入 (4.4), 经直接计算可得

$$\begin{aligned}
G^{jk}C_{ijk} =& K^{jk}\overset{1}{C}_{ijk} + \frac{K_i}{4f_K}(2f_{KKK}K + 3f_{KK}) - \frac{K_i}{2\Delta}\frac{f_H f_{KK}K}{f_K}(2f_{KKK}K + 3f_{KK}) \\
=& K^{jk}\overset{1}{C}_{ijk} + \frac{K_i}{2\Delta}\frac{\Delta}{2f_K}(2f_{KKK}K + 3f_{KK}) - \frac{K_i}{2\Delta}\frac{Kf_H f_{KK}}{f_K}(2f_{KKK}K \\
&+ 3f_{KK}).
\end{aligned} \tag{4.6}$$

注意到 $\Delta = f_K f_H - 2ff_{KH}$, 我们有

$$\begin{aligned}\frac{K_i}{2\Delta}\frac{\Delta}{2f_K}(2f_{KKK}K+3f_{KK}) &= \frac{K_i}{2\Delta}[\frac{f_K f_H - 2ff_{KH}}{2f_K}(2f_{KKK}K+3f_{KK})] \\ &= \frac{K_i}{2\Delta}(\frac{1}{2}f_H - \frac{ff_{KH}}{f_K})(2f_{KKK}K+3f_{KK}).\end{aligned} \tag{4.7}$$

把 (4.7) 代入 (4.6), 可得

$$\begin{aligned}G^{jk}C_{ijk} =& K^{jk}\overset{1}{C}_{ijk} + \frac{K_i}{2\Delta}(\frac{1}{2}f_H - \frac{ff_{KH}}{f_K})(2f_{KKK}K+3f_{KK}) \\ &- \frac{K_i}{2\Delta}\frac{Kf_H f_{KK}}{f_K}(2f_{KKK}K+3f_{KK}).\end{aligned} \tag{4.8}$$

把 (2.6)-(2.8) 代入 (4.8), 经简单计算可以得到

$$\begin{aligned}G^{jk}C_{ijk} &= K^{jk}\overset{1}{C}_{ijk} - \frac{K_i}{2\Delta}(\frac{1}{2}f_H - f_{KH}K)(f_{KKK}K+3f_{KKH}H) \\ &= \frac{1}{2}\overset{1}{I}_i - \frac{K_i}{2\Delta}(\frac{1}{2}f_H - f_{KH}K)(f_{KKK}K+3f_{KKH}H).\end{aligned} \tag{4.9}$$

同理可得

$$G^{j'k}C_{ij'k} = -\frac{K_i}{2\Delta}f_{KH}H(f_{KHK}K - f_{HKH}H), \tag{4.10}$$

$$G^{jk'}C_{ijk'} = -\frac{K_i}{2\Delta}f_{KH}H(f_{KHK}K - f_{HKH}H), \tag{4.11}$$

$$G^{j'k'}C_{ij'k'} = \frac{K_i}{2\Delta}(\frac{1}{2}f_K - f_{KH}H)(f_{KHH}H - f_{KHK}K). \tag{4.12}$$

把 (4.9)-(4.12) 代入 (4.3), 经整理可得

$$\begin{aligned}I_i =& 2(G^{jk}C_{ijk} + G^{j'k}C_{ij'k} + G^{jk'}C_{ijk'} + G^{j'k'}C_{ij'k'}) \\ =& \overset{1}{I}_i - \frac{K_i}{\Delta}(\frac{1}{2}f_H - f_{KH}K)(f_{KKK}K+3f_{KKH}H) - \frac{2K_i}{\Delta}f_{KH}H(f_{KHK}K - f_{HKH}H) \\ &+ \frac{K_i}{\Delta}(\frac{1}{2}f_K - f_{KH}H)(f_{KHH}H - f_{KHK}K) \\ =& \overset{1}{I}_i - \frac{K_i}{\Delta}[\frac{1}{2}f_H(f_{KKK}K+3f_{KKH}H) - \frac{1}{2}f_K(f_{KHH}H - f_{KHK}K)] - \frac{K_i}{\Delta}f_{KH}[-K \\ &(f_{KKK}K + f_{KHK}H) - H(3f_{KKH}K + 2f_{HKH}H) + H(2f_{KHK}K + f_{KHH}H)].\end{aligned} \tag{4.13}$$

把 (2.7)-(2.9) 代入 (4.13), 可得

$$I_i = \overset{1}{I}_i - \frac{K_i}{2\Delta}[f_H(f_{KKK}K+3f_{KKH}H) - f_K(f_{KHH}H - 2f_{KHK}K)].$$

即 (4.1) 成立. 同理可证 (4.2) 成立. 证毕. □

定理2. 设 (M,F) 是芬斯勒流形 (M_1,F_1) 和 (M_2,F_2) 的闵可夫斯基积, 且 (M_1,F_1) 和 (M_2,F_2) 的

平均嘉当挠率消失, 若 F 满足下列方程组

$$\begin{cases} f_{KKK}K + 3f_{KKH}H = 0, & (4.14) \\ f_{HHH}H + 3f_{KHH}K = 0, & (4.15) \\ f_{KHK}K = f_{KHH}H = 0, & (4.16) \end{cases}$$

则 (M, F) 的平均嘉当挠率消失.

证明. 根据(2.3) 可知, (M_1, F_1) 的平均嘉当挠率消失等价于

$$\overset{1}{I}_i = 0. \tag{4.17}$$

将 (4.17) 代入 (4.1), 可得

$$I_i = -\frac{K_i}{2\Delta}[f_H(f_{KKK}K + 3f_{KKH}H) - f_K(f_{KHH}H - 2f_{KHK}K)]. \tag{4.18}$$

已知 (4.14)-(4.16) 成立, 将 (4.14) 和 (4.16) 代入 (4.18), 可得 $I_i = 0$. 同理由 (M_2, F_2) 的平均嘉当挠率消失, 并将 (4.15) 和 (4.16) 代入 (4.2), 可得 $I_{i'} = 0$.
因此

$$\mathbf{I} = I_i dx^i + I_{i'} dx^{i'} = 0.$$

证毕. □

5. 结论

本文得到了闵可夫斯基积芬斯勒流形嘉当挠率消失的必要条件, 即在闵可夫斯基积芬斯勒流形嘉当挠率消失的条件下, 给出了微分方程的刻画. 且在闵可夫斯基积芬斯勒流形的两个分量流形的平均嘉当挠率消失的条件下, 得到了闵可夫斯基积芬斯勒流形平均嘉当挠率消失的充分条件, 刻画了具有特殊性质的芬斯勒流形. 后期我们将通过求解上述两类偏微分方程组, 给出具有消失嘉当挠率和平均嘉当挠率的闵可夫斯基积芬斯勒流形的具体例子.

基金项目

国家自然科学基金 (11761069)。

参考文献

[1] Shen, Z. (2006) Riemann-Finsler Geometry with Applications to Information Geometry. *Chinese Annals of Mathematics, Series B*, **27**, 73-94. https://doi.org/10.1007/s11401-005-0333-3

[2] Asanov, G.S. (2012) Finsler Geometry, Relativity and Gauge Theories. Springer Science and Business Media, Berlin.

[3] Finsler, P. (1951) Über Kurven and Flächen in allgemeinen Räumen. Springer, Basel. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-4144-3

[4] Cartan, E. (1934) Les espaces de Finsler. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **40**, 521-522. https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1934-05891-9

[5] Ehresmann, C. (1950) Les connexions infinitésimales dans un espace fibrédifférentiable. *Colloque de Topologie*, **29**, 55-75.

[6] Matsumoto, M. (1972) On C-Reducible Finsler Spaces. *Tensor*, **24**, 29-37.

[7] Matsumoto, M. (1986) Foundations of Finsler Geometry and Special Finsler Spaces. Kaiseisha, Tokyo.

[8] Fukui, M. (1989) Complex Finsler Manifolds. *Journal of Mathematics of Kyoto University*, **29**, 609-624. https://doi.org/10.1215/kjm/1250520177

[9] Shen, Z. (1998) On Finsler Geometry of Submanifolds. *Mathematische Annalen*, **311**, 549-576. https://doi.org/10.1007/s002080050200

[10] Shen, Z. (2001) On R-Quadratic Finsler Spaces. *Publicationes Mathematicae Debrecen*, **58**, 263-274.

[11] Mo, X. and Zhou, L. (2010) A Class of Finsler Metrics with Bounded Cartan Torsion. *Canadian Mathematical Bulletin*, **53**, 122-132. https://doi.org/10.4153/CMB-2010-026-8

[12] Deicke, A. (1953) Über die Finsler-Räume mit $A_i = 0$. *Archiv der Mathematik*, **4**, 45-51. https://doi.org/10.1007/BF01899750

[13] Bidabad, B., Shahi, A. and Ahmadi, M.Y. (2017) Deformation of Cartan Curvature on Finsler Manifolds. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, **54**, 2119-2139.

[14] Chen, X. and Shen, Z. (2003) Randers Metrics with Special Curvature Properties. *Osaka Journal of Mathematics*, **40**, 87-101.

[15] Najafi, B. and Tayebi, A. (2017) Weakly Stretch Finsler Metrics. *Publicationes Mathematicae-Debrecen*, **91**, 441-454. https://doi.org/10.5486/PMD.2017.7761

[16] Sadeghi, H. (2021) Finsler Metrics with Bounded Cartan Torsion. *Journal of Finsler Geometry and Its Applications*, **2**, 51-62.

[17] Rajabi, T. (2020) On the Norm of Cartan Torsion of Two Classes of (α, β)-Metrics. *Journal of Finsler Geometry and Its Applications*, **1**, 66-72.

[18] Tayebi, A. and Sadeghi, H. (2018) Two Classes of Finsler Metrics with Bounded Cartan Torsions. *Global Journal of Advanced Research on Classical and Modern Geometries*, **7**, 23-36.

[19] Okada, T. (1982) Minkowskian Product of Finsler Spaces and Berwald Connection. *Journal of Mathematics of Kyoto University*, **22**, 323-332. https://doi.org/10.1215/kjm/1250521819

[20] Abate, M. and Patrizio, G. (1994) Finsler Metrics—A Global Approach with Applications to Geometric Function Theory. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.

[21] Bao, D., Chern, S.S. and Shen, Z. (2000) An Introduction to Riemann-Finsler Geometry. Springer-Verlag, Berlin.

[22] Wu, Z. and Zhong, C. (2011) Some Results on Product Complex Finsler Manifolds. *Acta Mathematica Scientia*, **31B**, 1541-1552. https://doi.org/10.1016/S0252-9602(11)60340-8