Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(5), 803-813
Published Online May 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.125091

Hans汉斯

一类修正的Szász型算子的逼近性质

黄婕妤[1]，齐秋兰[1,2]，杨　戈[1,2]

[1]河北师范大学数学科学学院，河北 石家庄
[2]河北省计算数学与应用重点实验室，河北 石家庄

收稿日期：2022年4月16日；录用日期：2022年5月17日；发布日期：2022年5月24日

摘　要

为了提高对函数的逼近程度，人们采取各种方法，构造King型算子就是其中的一种。本文构造了保持函数1和 $e^{-\mu x}\left(\mu>0\right)$ 的King-Szász型算子，对各阶矩的展开式应用Mathematica软件计算，得到了此类算子在 $\left[0,\infty\right)$ 区间上的一致逼近定理以及逼近误差的正定理。借助Taylor展式及连续模，得到其Voronovskaja型渐近估计。本文证明了该类算子统计逼近的Korovkin型定理，在此基础上，进一步研究了该类算子的统计逼近性质。

关键词

Szász型算子，连续模，统计逼近，Korovkin型定理

Approximation Properties of a Modified Szász Type Operators

Jieyu Huang[1], Qiulan Qi[1,2], Ge Yang[1,2]

[1]School of Mathematical Sciences, Hebei Normal University, Shijiazhuang Hebei
[2]Hebei Key Laboratory of Computational Mathematics and Applications, Shijiazhuang Hebei

Received: Apr. 16th, 2022; accepted: May 17th, 2022; published: May 24th, 2022

Abstract

There are many ways to improve the approximation degree of function, and the construction of King type operators is one of them. In this paper, we construct King-Szász type operators which preserve the functions 1 and $e^{-\mu x}\left(\mu>0\right)$. The expansions of the moments are calculated by Mathematica software. The uniform approximation theorem on the interval $\left[0,\infty\right)$ and the positive

文章引用: 黄婕妤, 齐秋兰, 杨戈. 一类修正的 Szász 型算子的逼近性质[J]. 理论数学, 2022, 12(5): 803-813.
DOI: 10.12677/pm.2022.125091

theorem of approximation error of this kind of operator are obtained. By means of Taylor expansion and continuous modulus, the Voronovskaja type asymptotic estimation is obtained. The Korovkin type theorem of statistical approximation of this kind of operator is also proved. Finally, the statistical approximation properties are further studied.

Keywords

Szász Type Operators, Modulus of Continuity, Statistical Approximation, Korovkin Type Theorem

1. 引言

1950 年 Szász 将经典的 Bernstein 算子推广到了无穷区间上，提出了 Szász 算子[1] [11]：

$$S_n(f;x)=\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\mathrm{e}^{-nx}\frac{(nx)^k}{k!},\ x\in[0,+\infty)。$$

2003 年，韩国数学家 King [2]构造了保持函数 x^2 的正线性 Bernstein 型算子，提高了逼近的精度。2007 年，Duman [3]使用 King 的方法构造了保持常函数和 x^2 的 Szász 型算子。2016 年，Acar [4]将 King 的方法进行了推广，提出了保持函数 $\mathrm{e}^{2ax}(a>0)$ 的 Szász 型算子。有关 King 型算子逼近性质的研究参见文献[2]-[8]。在此基础上，我们构造了保持函数 1 和 $\mathrm{e}^{-\mu x}(\mu>0)$ 的 Szász 型算子，研究其一致逼近和统计逼近性质。

新构造的 Szász 型算子的定义如下：

$$S_{n,\mu}(f;x)=\mathrm{e}^{-n\alpha_n}\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{(n\alpha_n)^k}{k!},\ x\in[0,+\infty),$$

其中 $\alpha_n=\dfrac{\mu x}{n\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{n}}\right)}$。

注 1.

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\mu x}{n\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{n}}\right)}=x。$$

注 2. 本文中 $C_B[0,\infty)$ 表示 $[0,\infty)$ 区间上的连续有界函数空间；$C[0,\infty)$ 表示 $[0,\infty)$ 区间上的连续函数空间；

$$C^*[0,\infty):=\left\{f\in C[0,\infty):\lim_{n\to+\infty} f(x)\text{存在且有限}\right\},\ \|f\|_\infty:=\sup_{x\in[0,\infty)}|f(x)|。$$

本文结构如下：首先在第二节中，我们介绍了研究一致逼近和统计逼近所需的矩的估计，即：引理 2.1~2.3。其次，介绍研究逼近误差估计正定理所需的 Korovkin 型定理，即：引理 2.4。第三节给出了一致收敛意义下的逼近误差估计的正定理以及 Voronovskaja 型渐近关系。第四节证明了统计逼近意义下该类算子的 Korovkin 型定理，并在此基础上，进一步研究了该类算子的统计逼近性质。

2. 所需引理

为了证明本文所构造算子的一致收敛性，需要下面有关算子矩的估计。

引理 2.1. 设 $x\in[0,\infty)$，$\mu>0$，有

1) $S_{n,\mu}(1;x)=1$；

2) $S_{n,\mu}\left(\mathrm{e}^{-\mu t};x\right)=\mathrm{e}^{-\mu x}$；

3) $S_{n,\mu}\left(\mathrm{e}^{-2\mu t};x\right)=\mathrm{e}^{-\mu x\left(\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{n}}+1\right)}$。

证明： 令 $S(\alpha_n)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n\alpha_n)^k}{k!}$，那么

$$S'(\alpha_n)=\frac{\mathrm{d}S(\alpha_n)}{\mathrm{d}\alpha_n}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n^k\alpha_n^{k-1}}{(k-1)!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^{k+1}\alpha_n^k}{k!}=nS(\alpha_n),$$

解得 $S(\alpha_n)=\mathrm{e}^{n\alpha_n}$。

使用类似的方法，通过计算我们得到：

1) $S_{n,\mu}(1;x)=\mathrm{e}^{-n\alpha_n}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(n\alpha_n)^k}{k!}=\mathrm{e}^{-n\alpha_n}\mathrm{e}^{n\alpha_n}=1$；

2) $S_{n,\mu}\left(\mathrm{e}^{-\mu t};x\right)=\mathrm{e}^{-n\alpha_n}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(n\alpha_n)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\frac{\mu k}{n}}=\mathrm{e}^{-n\alpha_n}\mathrm{e}^{n\alpha_n\mathrm{e}^{\frac{-\mu}{n}}}=\mathrm{e}^{n\alpha_n\left(-1+\mathrm{e}^{\frac{-\mu}{n}}\right)}=\mathrm{e}^{-\mu x}$；

3) $S_{n,\mu}\left(\mathrm{e}^{-2\mu t};x\right)=\mathrm{e}^{-n\alpha_n}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(n\alpha_n)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\frac{2\mu k}{n}}=\mathrm{e}^{-n\alpha_n}\mathrm{e}^{n\alpha_n\mathrm{e}^{\frac{-2\mu}{n}}}=\mathrm{e}^{n\alpha_n\left(-1+\mathrm{e}^{\frac{-2\mu}{n}}\right)}=\mathrm{e}^{-\mu x\left(\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{n}}+1\right)}$。

注 3.

$$\lim_{n\to\infty}S_{n,\mu}\left(\mathrm{e}^{-2\mu t};x\right)=\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{-\mu x\left(\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{n}}+1\right)}=\mathrm{e}^{-2\mu x}。$$

引理 2.2. 设 $x\in[0,\infty)$，$\mu>0$，有

1) $S_{n,\mu}(t;x)=\mathrm{e}^{-n\alpha_n}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(n\alpha_n)^k}{k!}\frac{k}{n}=\alpha_n$；

2) $S_{n,\mu}\left(t^2;x\right)=\mathrm{e}^{-n\alpha_n}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(n\alpha_n)^k}{k!}\frac{k^2}{n^2}=\alpha_n^2+\frac{\alpha_n}{n}$；

3) $S_{n,\mu}\left(t^3;x\right)=\mathrm{e}^{-n\alpha_n}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(n\alpha_n)^k}{k!}\frac{k^3}{n^3}=\alpha_n^3+\frac{3\alpha_n^2}{n}+\frac{\alpha_n}{n^2}$；

4) $S_{n,\mu}\left(t^4;x\right)=\mathrm{e}^{-n\alpha_n}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(n\alpha_n)^k}{k!}\frac{k^4}{n^4}=\alpha_n^4+\frac{6\alpha_n^3}{n}+\frac{7\alpha_n^2}{n^2}+\frac{\alpha_n}{n^3}$。

证明：

1) $S_{n,\mu}(t;x)=\mathrm{e}^{-n\alpha_n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n\alpha_n)^k}{k!}\frac{k}{n}=\mathrm{e}^{-n\alpha_n}\alpha_n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n\alpha_n)^{k-1}}{(k-1)!}$

$$=\mathrm{e}^{-n\alpha_n}\alpha_n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n\alpha_n)^k}{k!}=\alpha_n\mathrm{e}^{-n\alpha_n}\mathrm{e}^{n\alpha_n}=\alpha_n;$$

2) $S_{n,\mu}(t^2;x)=\mathrm{e}^{-n\alpha_n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n\alpha_n)^k}{k!}\frac{k^2}{n^2}$

$$=\mathrm{e}^{-n\alpha_n}\alpha_n^2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(n\alpha_n)^{k-2}}{(k-2)!}+\mathrm{e}^{-n\alpha_n}\frac{\alpha_n}{n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(n\alpha_n)^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$=\left(\alpha_n^2+\frac{\alpha_n}{n}\right)\mathrm{e}^{-n\alpha_n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n\alpha_n)^k}{k!}$$

$$=\alpha_n^2+\frac{\alpha_n}{n};$$

3) $S_{n,\mu}(t^3;x)=\mathrm{e}^{-n\alpha_n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n\alpha_n)^k}{k!}\frac{k^3}{n^3}$

$$=\mathrm{e}^{-n\alpha_n}\alpha_n^3\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(n\alpha_n)^{k-3}}{(k-3)!}+\mathrm{e}^{-n\alpha_n}\frac{3\alpha_n^2}{n}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(n\alpha_n)^{k-2}}{(k-2)!}+\mathrm{e}^{-n\alpha_n}\frac{\alpha_n}{n^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(n\alpha_n)^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$=\left(\alpha_n^3+\frac{3\alpha_n^2}{n}+\frac{\alpha_n}{n^2}\right)\mathrm{e}^{-n\alpha_n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n\alpha_n)^k}{k!}$$

$$=\alpha_n^3+\frac{3\alpha_n^2}{n}+\frac{\alpha_n}{n^2};$$

4) $S_{n,\mu}(t^4;x)=\mathrm{e}^{-n\alpha_n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n\alpha_n)^k}{k!}\frac{k^4}{n^4}$

$$=\mathrm{e}^{-n\alpha_n}\alpha_n^4\sum_{k=4}^{\infty}\frac{(n\alpha_n)^{k-4}}{(k-4)!}+\mathrm{e}^{-n\alpha_n}\frac{6\alpha_n^3}{n}\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(n\alpha_n)^{k-3}}{(k-3)!}$$

$$+\mathrm{e}^{-n\alpha_n}\frac{7\alpha_n^2}{n^2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(n\alpha_n)^{k-2}}{(k-2)!}+\mathrm{e}^{-n\alpha_n}\frac{\alpha_n}{n^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(n\alpha_n)^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$=\left(\alpha_n^4+\frac{6\alpha_n^3}{n}+\frac{7\alpha_n^2}{n^2}+\frac{\alpha_n}{n^3}\right)\mathrm{e}^{-n\alpha_n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n\alpha_n)^k}{k!}$$

$$=\alpha_n^4+\frac{6\alpha_n^3}{n}+\frac{7\alpha_n^2}{n^2}+\frac{\alpha_n}{n^3}.$$

引理 2.3. 设 $M_n^k(x)=S_{n,\mu}\left((t-x)^k;x\right)$，$k=1,2,4$，有

1) $\lim\limits_{n\to\infty}nM_n^1(x)=\frac{\mu x}{2}$；

2) $\lim\limits_{n\to\infty}nM_n^2(x)=x$；

3) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2M_n^4(x)=3x^2$。

证明：

1) $\lim\limits_{n\to\infty} nM_n^1(x)=\lim\limits_{n\to\infty} nS_{n,\mu}\left((t-x);x\right)=\lim\limits_{n\to\infty} n(\alpha_n-x)$

$$=\lim_{n\to\infty} nx\left[\frac{\mu}{n\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{n}}\right)}-1\right]=\frac{\mu x}{2};$$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} nM_n^2(x)=\lim\limits_{n\to\infty} nS_{n,\mu}\left((t-x)^2;x\right)=\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\alpha_n^2+\frac{\alpha_n}{n}-2x\alpha_n+x^2\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(\mu x)^2}{n\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{n}}\right)^2}+\frac{\mu x}{n\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{n}}\right)}-\frac{2\mu x^2}{1-\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{n}}}+nx^2\right]=x;$$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2M_n^4(x)=\lim\limits_{n\to\infty} nS_{n,\mu}\left((t-x)^4;x\right)$

$$\begin{aligned}=\lim_{n\to\infty}\Bigg[&n^2x^4\left(\frac{\mu^4}{n^4\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{n}}\right)^4}-\frac{4\mu^3}{n^3\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{n}}\right)^3}+\frac{6\mu^2}{n^2\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{n}}\right)^2}-\frac{4\mu}{n\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{n}}\right)}+1\right)\\&+n^2x^3\left(\frac{6\mu^3}{n^4\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{n}}\right)^3}-\frac{12\mu^2}{n^3\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{n}}\right)^2}+\frac{6\mu}{n^2\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{n}}\right)}\right)\\&+n^2x^2\left(\frac{7\mu^2}{n^4\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{n}}\right)^2}-\frac{4\mu}{n^3\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{n}}\right)}\right)+n^2x\frac{\mu}{n^4\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{n}}\right)}\Bigg]=3x^2.\end{aligned}$$

引理 2.4. [9]设 $f\in C^*[0,+\infty)$，A_n 是 $C^*[0,+\infty)$ 到 $C^*[0,+\infty)$ 的正线性算子，满足

$$\lim_{n\to\infty} A_n\left(\mathrm{e}^{-kt};x\right)=\mathrm{e}^{-kx},\ k=0,1,2,$$

且上述收敛是一致的，当且仅当 $\lim_{n\to\infty} A_n(f;x)=f(x)$ 于 $[0,+\infty)$ 上是一致的。

3. 逼近的正逆定理

定理 3.1. 令 $\mu>0$，对于任意的函数 $f\in C^*[0,+\infty)$，当 $n\to\infty$ 时，算子列 $\{S_{n,\mu}(f;x)\}$ 在区间 $[0,\infty)$ 上一致收敛于 $f(x)$。

证明： 定义函数 $f_k=\mathrm{e}^{-kx},(k=0,1,2)$，首先，结合引理 2.1，我们有

$$\left\|S_{n,\mu}(1;x)-1\right\|_\infty=\sup_{x\in[0,\infty)}\left|S_{n,\mu}(1;x)-1\right|=0。$$

其次，使用 Mathematica 计算软件，有

$$\left\|S_{n,\mu}\left(\mathrm{e}^{-t};x\right)-\mathrm{e}^{-x}\right\|_{\infty}=\left\|\mathrm{e}^{-n\alpha_n\left[1-\mathrm{e}^{\frac{-1}{n}}\right]}-\mathrm{e}^{-x}\right\|_{\infty}=\left\|\mathrm{e}^{-n\alpha_n\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{6n^3}+O\left(n^{-3}\right)\right]}-\mathrm{e}^{-x}\right\|_{\infty}$$

$$=\left\|\mathrm{e}^{-x\left[\frac{\mu}{n\left(1-\mathrm{e}^{\frac{-\mu}{n}}\right)}+\frac{-\mu}{2n^2\left(1-\mathrm{e}^{\frac{-\mu}{n}}\right)}+\frac{\mu}{6n^3\left(1-\mathrm{e}^{\frac{-\mu}{n}}\right)}+O\left(n^{-3}\right)\right]}-\mathrm{e}^{-x}\right\|_{\infty}\le\left\|\mathrm{e}^{-x}\left[\mathrm{e}^{\frac{-(\mu-1)x}{2n}+O\left(n^{-2}\right)}-1\right]\right\|_{\infty}$$

$$\le\left\|\mathrm{e}^{-x}\left[\frac{-(\mu-1)x}{2n}+\frac{(\mu-1)^2x^2}{8n^2}+O\left(n^{-2}\right)\right]\right\|_{\infty}\le\frac{|\mu-1|}{2n}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}}+\frac{(\mu-1)^2}{n^2}\cdot\frac{1}{2\mathrm{e}^2}+O\left(n^{-2}\right):=\beta$$

使用同样的方法，可以得到

$$\left\|S_{n,\mu}\left(\mathrm{e}^{-2t};x\right)-\mathrm{e}^{-2x}\right\|_{\infty}=\left\|\mathrm{e}^{-n\alpha_n\left[1-\mathrm{e}^{\frac{-2}{n}}\right]}-\mathrm{e}^{-2x}\right\|_{\infty}=\left\|\mathrm{e}^{-n\alpha_n\left[\frac{2}{n}-\frac{4}{2n^2}+\frac{8}{6n^3}+O\left(n^{-3}\right)\right]}-\mathrm{e}^{-2x}\right\|_{\infty}$$

$$=\left\|\mathrm{e}^{-2x\left[\frac{\mu}{n\left(1-\mathrm{e}^{\frac{-\mu}{n}}\right)}-\frac{\mu}{n^2\left(1-\mathrm{e}^{\frac{-\mu}{n}}\right)}+\frac{4\mu}{6n^3\left(1-\mathrm{e}^{\frac{-\mu}{n}}\right)}+O\left(n^{-3}\right)\right]}-\mathrm{e}^{-2x}\right\|_{\infty}\le\left\|\mathrm{e}^{-2x}\left[\mathrm{e}^{\frac{-(\mu-2)x}{n}+O\left(n^{-2}\right)}-1\right]\right\|_{\infty}$$

$$\le\left\|\mathrm{e}^{-2x}\left[\frac{-(\mu-2)x}{n}+\frac{(\mu-2)^2x^2}{2n^2}+O\left(n^{-2}\right)\right]\right\|_{\infty}\le\frac{|\mu-2|}{n}\cdot\frac{1}{2\mathrm{e}}+\frac{(\mu-2)^2}{n^2}\cdot\frac{1}{2\mathrm{e}^2}+O\left(n^{-2}\right):=\gamma$$

当 $n\to\infty$ 时，β 和 γ 都趋近于 0，结合引理 2.4 Korovkin 型定理，可以完成定理 3.1 的证明。

Holhos [10]提出了连续模 $\omega^*(f;\delta)$ 的概念：对于 $\delta>0$ 和 $f\in C^*[0,+\infty)$，定义

$$\omega^*(f;\delta)=\sup_{x,t\ge0,\left|\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-t}\right|\le\delta}\left|f(x)-f(t)\right|。$$

传统连续模的定义如下[11]：

$$\omega(f;\delta)=\sup_{x,t\ge0,|t-x|\le\delta}\left|f(x)-f(t)\right|。$$

以上两个模之间的关系为：$\omega^*(f;\delta)=\omega\left(f^*;\delta\right)$，

其中

$$f^*(x)=\begin{cases}f(-\ln x); & x\ne0,\\ \lim\limits_{t\to\infty}f(t); & x=0.\end{cases}$$

根据 Holhos [10 theorem 3]，结合引理 2.2，我们可以得到正定理：

DOI: 10.12677/pm.2022.125091

定理 3.2. 设 $f\in C^*[0,+\infty)$，可以得到

$$\left\|S_{n,\mu}(f;x)-f(x)\right\|_\infty\le 2\omega^*\left(f;\sqrt{2\beta_n+\gamma_n}\right),$$

其中

$$\left\|S_{n,\mu}\left(\mathrm{e}^{-t};x\right)-\mathrm{e}^{-x}\right\|_\infty=\beta_n,$$

$$\left\|S_{n,\mu}\left(\mathrm{e}^{-2t};x\right)-\mathrm{e}^{-2x}\right\|_\infty=\gamma_n。$$

下面，我们将讨论 Voronovskaja 型弱逆定理。

定理 3.3. 设 $f''\in C_B[0,\infty)$，有

$$\lim_{n\to\infty}n\left[S_{n,\mu}(f;x)-f\right]=\frac{\mu x}{2}f'(x)+\frac{x}{2}f''(x)。$$

证明：根据 Taylor 公式，将 $f(t)$ 在 x 点处展开

$$f(t)=f(x)+f'(x)(t-x)+\frac{1}{2}f''(x)(t-x)^2+h(t,x)(t-x)^2,$$

其中 $h(t,x)=\frac{1}{2}\left[f''(\xi)-f''(x)\right]$，$\xi$ 在 x 和 t 之间。将算子 $S_{n,\mu}$ 作用于上式两边，

$$S_{n,\mu}(f;x)-f(x)=f'(x)S_{n,\mu}(t-x;x)+\frac{f''(x)}{2}S_{n,\mu}\left((t-x)^2;x\right)+S_{n,\mu}\left(h(t,x)(t-x)^2;x\right)。$$

令 $\delta>0$，对于上述定义的 $\omega(f;\delta)$，我们有

$$\left|f(t)-f(x)\right|\le\left(1+\frac{|t-x|}{\delta}\right)\omega(f;\delta)。$$

因此，我们得到

$$\left|h(t,x)\right|\le\frac{1}{2}\left(1+\frac{|t-x|}{\delta}\right)\omega(f'';\delta)。$$

由算子 $S_{n,\mu}$ 的定义，有

$$S_{n,\mu}\left(\left|h(t,x)\right|(t-x)^2;x\right)\le\omega(f'';\delta)S_{n,\mu}\left((t-x)^2;x\right)+\frac{1}{\delta}\omega(f'';\delta)S_{n,\mu}\left(|t-x|^3;x\right)。$$

取 $\delta=\frac{1}{n}$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}nS_{n,\mu}\left(h(t,x)(t-x)^2;x\right)=0$，即可证。

定理 3.4. 令 $f''\in C_B[0,\infty)$，如果存在 $n_0\in N$ 满足：对于 $n\ge n_0$，有

$$f(x)\le S_{n,\mu}(f;x)\le S_n(f;x)。\tag{1}$$

那么

$$f''(x)\ge-\mu f'(x)\ge 0。\tag{2}$$

另一方面，对于给定的 $x\in[0,\infty)$，如果不等式(2)成立，那么存在 $n_0\in N$，使得对于任意的 $n\ge n_0$，有 $f(x)\le S_{n,\mu}(f;x)\le S_n(f;x)$。

证明：假设不等式(1)成立，我们有：$0\le n\left(S_{n,\mu}(f;x)-f(x)\right)\le n\left(S_n(f;x)-f(x)\right)$。

根据定理 3.3，可以得到不等式(2)。另一方面，假设不等式(2)成立，我们有 $0 \le -2\mu f'(x) + f''(x) \le f''(x)$，移项后可以得到不等式(1)。

4. 统计逼近

1951 年，Fast [12]提出了统计收敛的定义，1993 年，Kolk [13]提出了 A-统计收敛的概念，2002 年，Gadjiev 和 Orhan [14]将统计收敛应用到逼近理论当中，得到了关于统计收敛的 Korovkin 型定理。统计收敛概念的提出促进了逼近论的发展，弥补了各类线性算子逼近性质的不足[12] [13] [14] [15] [16]。

定义 4.1. [15]设 $E \subseteq N$，$E_n = \{k \le n : k \in E\}$。集合 E 的自然密度记为：$\delta(E) = \lim_{n\to\infty} \frac{|E_n|}{n}$，其中 $|E_n|$ 代表闭集 E_n 的基数。

定义 4.2. [15]如果对于任意的 $\varepsilon > 0$，都有 $\delta(\{k \in N : |x_k - L| \ge \varepsilon\}) = 0$，则称序列 $x = (x_k)$ 为统计收敛到 L，我们记作 $S\text{-}\lim x = L$ 或 $S\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = L$。

定义 4.3. [16]设 $A = (a_{n,k})$ 是非负正规可加矩阵，如果对于任意的 $\varepsilon > 0$，都有 $\lim_{n\to\infty} \sum_{k:|x_k - L| \ge \varepsilon} a_{n,k} = 0$，则称序列 $x = (x_k)$ 为 A-统计收敛到 L，记作 $S_A\text{-}\lim x = L$ 或 $S_A\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = L$。

定义 4.4. [16]设 $A = (a_{n,k})$ 是非负正规可加矩阵，$p = (p_k)$ 是一非负数列满足 $p_0 > 0$ 且当 $n \to \infty$ 时，$P_n = \sum_{k=0}^{n} p_k \to \infty$。如果对于任意的 $\varepsilon > 0$，满足

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^{n} p_k \sum_{m: p_m|x_m - L| \ge \varepsilon} a_{k,m} = 0,$$

则称序列 $x = (x_k)$ 为加权 A-统计收敛到 L，记作 $S_A^{\bar{N}}\text{-}\lim_n x_n = L$ 或 $S_A^{\bar{N}}\text{-}\lim x = L$。

定义 4.5. [16]设 $A = (a_{n,k})$ 是非负正规可加矩阵，$p = (p_k)$ 是一非负数列满足 $p_0 > 0$ 且当 $n \to \infty$ 时，$P_n = \sum_{k=0}^{n} p_k \to \infty$。令 (u_k) 是一正非增序列，如果

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{u_n P_n} \sum_{k=0}^{n} p_k \sum_{m: p_m|x_m - L| \ge \varepsilon} a_{k,m} = 0,$$

则称序列 $x = (x_k)$ 为与 $o(u_n)$ 同阶加权 A-统计收敛到 L，记作 $S_A^{\bar{N}}\text{-}o(u_n)\text{-}\lim_n x_n = L$。

下面我们首先得到算子 $S_{n,\mu}$ 统计逼近的 Korovkin 型定理。

定理 4.1. 设 $A = (a_{n,k})$ 是非负正规可加矩阵，$p = (p_k)$ 是一非负数列满足 $p_0 > 0$ 且当 $n \to \infty$ 时，$P_n = \sum_{k=0}^{n} p_k \to \infty$。对于任意的函数 $f \in C^*[0,\infty)$，有

$$S_A^{\bar{N}}\text{-}\lim_{n\to\infty} \left\| S_{n,\mu}(f;x) - f(x) \right\|_\infty = 0$$

当且仅当

$$S_A^{\bar{N}}\text{-}\lim_{n\to\infty} \left\| S_{n,\mu}(1;x) - 1 \right\|_\infty = 0;$$

$$S_A^{\bar{N}}\text{-}\lim_{n\to\infty} \left\| S_{n,\mu}(\mathrm{e}^{-t};x) - \mathrm{e}^{-x} \right\|_\infty = 0;$$

$$S_A^{\bar{N}}\text{-}\lim_{n\to\infty} \left\| S_{n,\mu}(\mathrm{e}^{-2t};x) - \mathrm{e}^{-2x} \right\|_\infty = 0.$$

证明： 由于函数 $f \in C^*[0,\infty)$，因此存在常数 $K > 0$ 满足 $|f(x)| \le K$。对于任意的 $t, x \in [0,\infty)$，有 $|f(t) - f(x)| \le |f(t)| + |f(x)| \le 2K$。

对于任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta(\varepsilon) > 0$，使得当 $|\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-x}| < \delta$ 时，$|f(t) - f(x)| < \varepsilon$。

定义集合 $D(\delta) = \{(x,t) \in [0,\infty) : |\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-x}| < \delta\}$，我们得到

$$\left|f(t)-f(x)\right|\le\left|f(t)-f(x)\right|_{D(\delta)}+\left|f(t)-f(x)\right|_{[0,\infty)-D(\delta)}\le\varepsilon+\frac{2K}{\delta^2}\Omega,$$

其中 $\Omega=\left(\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-x}\right)^2$。对于 $m\in N$，有

$$S_{m,\mu}(\Omega;x)=\left[S_{m,\mu}\left(\mathrm{e}^{-2t};x\right)-\mathrm{e}^{-2x}\right]-2\mathrm{e}^{-x}\left[S_{m,\mu}\left(\mathrm{e}^{-t};x\right)-\mathrm{e}^{-x}\right]+\mathrm{e}^{-2x}\left[S_{m,\mu}(1;x)-1\right]。$$

因此，对于式子 $S_{m,\mu}(f;x)-f(x)$，我们有

$$\begin{aligned}\left|S_{m,\mu}(f;x)-f(x)\right|&\le\varepsilon S_{m,\mu}(1;x)+\frac{2K}{\delta^2}S_{m,\mu}(\Omega;x)+\left|f(x)\left(S_{m,\mu}(1;x)-1\right)\right|\\&\le\varepsilon+\frac{2K}{\delta^2}\left\|S_{m,\mu}\left(\mathrm{e}^{-2t};x\right)-\mathrm{e}^{-2x}\right\|_\infty+\frac{4K}{\delta^2}\left\|S_{m,\mu}\left(\mathrm{e}^{-t};x\right)-\mathrm{e}^{-x}\right\|_\infty\\&\le\frac{4K}{\delta^2}\left(\left\|S_{m,\mu}\left(\mathrm{e}^{-2t};x\right)-\mathrm{e}^{-2x}\right\|_\infty+\left\|S_{m,\mu}\left(\mathrm{e}^{-t};x\right)-\mathrm{e}^{-x}\right\|_\infty\right)\end{aligned}$$

对于一个给定的 $\varepsilon'>0$，使得 $0<\varepsilon<\varepsilon'$。我们定义下面的集合：

$$E=\left\{m\in N:p_m\left|S_{m,\mu}(f;x)-f(x)\right|\ge\varepsilon'\right\};$$

$$E_1=\left\{m\in N:p_m\left|S_{m,\mu}\left(\mathrm{e}^{-t};x\right)-\mathrm{e}^{-x}\right|\ge\frac{\varepsilon'-\varepsilon}{8K}\delta^2\right\};$$

$$E_2=\left\{m\in N:p_m\left|S_{m,\mu}\left(\mathrm{e}^{-2t};x\right)-\mathrm{e}^{-2x}\right|\ge\frac{\varepsilon'-\varepsilon}{8K}\delta^2\right\}。$$

显然 $E\subset E_1\cup E_2$，$\frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{n}p_k\sum_{m\in E}a_{k,m}\le\frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{n}p_k\sum_{m\in E_1\cup E_2}a_{k,m}$。

当 $n\to\infty$ 时，可以得到 $S_A^{\bar{N}}\text{-}\lim_{n\to\infty}\left\|S_{n,\mu}(f;x)-f(x)\right\|_\infty=0$。

注 4. 这里我们使用了 $\left\{1,\mathrm{e}^{-x},\mathrm{e}^{-2x}\right\}$ 作为检验函数，也可以使用 $\left\{1,x,x^2\right\}$。

定理 4.2. 设 $A=\left(a_{n,k}\right)$ 是非负正规可加矩阵，如果

$$S_A^{\bar{N}}\text{-}o(u_n)\text{-}\lim_n\omega(f;h_n)=0,\ x\in[0,\infty),$$

其中 $\omega(f;\delta)$ 是经典的连续模[11]，定义如前。

令 $h_n=\left\|S_{n,\mu}\left((t-x)^2;x\right)\right\|_\infty^{\frac{1}{2}}$，那么对于 $f\in C_B[0,\infty)$，我们有

$$S_A^{\bar{N}}\text{-}o(u_n)\text{-}\lim_n\left\|S_{n,\mu}(f;x)-f(x)\right\|_\infty=0。$$

证明： 对于 $f\in C_B[0,\infty)$，$m\in N$，有

$$\begin{aligned}\left|S_{m,\mu}(f;x)-f(x)\right|&\le\left|S_{m,\mu}\left(\left|f(t)-f(x)\right|;x\right)\right|\\&\le\omega(f;\xi)\left|S_{m,\mu}\left(\frac{|t-x|}{\xi}+1;x\right)\right|\\&\le\omega(f;\xi)+\omega(f;\xi)\frac{1}{\xi}\left|S_{m,\mu}\left((t-x)^2;x\right)\right|^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

令 $\xi=h_m$，在上式两边对 x 取上确界，我们可以得到

$$\left\|S_{m,\mu}\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right\|_{\infty}\le\omega\left(f;h_m\right)+\omega\left(f;h_m\right)\frac{1}{h_m}\left\|S_{m,\mu}\left(\left(t-x\right)^2;x\right)\right\|_{\infty}^{\frac{1}{2}}$$
$$=2\omega\left(f;h_m\right).$$

对于一个给定的$\varepsilon>0$，我们定义下面的集合：

$$S=\left\{m\in N:p_m\left|S_{n,\mu}\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right|\ge\varepsilon\right\},$$

$$S_1=\left\{m\in N:p_m\omega\left(f;h_m\right)\ge\frac{\varepsilon}{2}\right\}。$$

显然$S\subset S_1$，且

$$\frac{1}{u_nP_n}\sum_{k=0}^{n}p_k\sum_{m\in S}a_{k,m}\le\frac{1}{u_nP_n}\sum_{k=0}^{n}p_k\sum_{m\in S_1}a_{k,m}。$$

因此，

$$S_A^{\bar{N}}\text{-}o\left(u_n\right)\text{-}\lim_n\left\|S_{n,\mu}\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right\|_{\infty}=0。$$

基金项目

河北省教育厅重点基金(ZD2019053)；河北师范大学重点基金(L2020Z03)。

参考文献

[1] Szász, O. (1950) Generalization of S. Bernstein's Polynomials to the Infinite Interval. *Journal of research of the National Bureau of Standards*, **45**, 239-245. https://doi.org/10.6028/jres.045.024

[2] King, J.P. (2003) Positive Linear Operators Which Preserve x^2. *Acta Mathematica Hungarica*, **99**, 203-208. https://doi.org/10.1023/A:1024571126455

[3] Duman, O. and Özarslan, M.A. (2007) Szász-Mirakyan Type Operators Providing a Better Error Estimation. *Applied Mathematics Letters*, **20**, 1184-1188. https://doi.org/10.1016/j.aml.2006.10.007

[4] Acar, T., Aral, A. and Gonska, H. (2016) On Szász-Mirakyan Operators Preserving $\mathrm{e}^{2ax}\left(a>0\right)$. *Mediterranean Journal of Mathematics*, **14**, 1-14. https://doi.org/10.1007/s00009-016-0804-7

[5] Duman, O., Özarslan, M.A. and Vecchia B.D. (2009) Modified Szász-Mirakyan-Kantorovich Operators Preserving Linear Functions. *Turkish Journal of Mathematics*, **33**, 151-158.

[6] Deveci, S.N., Acar, T. and Alagoz, O. (2020) Approximation by Gamma Type Operators. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **43**, 2772-2782. https://doi.org/10.1002/mma.6083

[7] Gupta, V. and Malik, N. (2017) Approximation with Certain Szász-Mirakyan Operators. *Khayyam Journal of Mathematics*, **2**, 90-97.

[8] Qi, Q. and Yang, G. (2015) Modified Kantorovich Operators Providing a Better Error Estimation. *Journal of Mathematics and System Science*, **5**, 286-288. https://doi.org/10.17265/2159-5291/2015.07.002

[9] Boyanov, B.D. and Veselinov, V.M. (1970) A Note on the Approximation of Functions in an Infinite Interval by Linear Positive Operators. *Bulletin Mathematique de la Societe des Sciences Mathematiques de Roumanie*, **14**, 9-13.

[10] Holhos, A. (2008) The Rate of Convergence of Positive Linear Operators in Weighted Spaces. *Automation*, *Computers*, *Applied Mathematics*, **17**, 239-246.

[11] Ditzian, Z. and Totik, V. (1987) Moduli of Smoothness. Spring, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4778-4

[12] Fast, H. (1951) Sur la convergence statistique. *Colloquium Mathematicum*, **2**, 241-244.

[13] Kolk, E. (1993) Matrix Summability of Statistically Convergent Sequences. *Analysis*, **13**, 77-84. https://doi.org/10.1524/anly.1993.13.12.77

[14] Gadjiev, A.D. and Orhan, C. (2002) Some Approximation Theorems via Statistical Convergence. *The Rocky Mountain Journal of Mathematics*, **32**, 129-138. https://doi.org/10.1216/rmjm/1030539612

[15] Mohiuddine, S.A., Alotaibi, A. and Hazarika, B. (2014) Weighted A-Statistical Convergence for Sequences of Positive

Linear Operators. *The Scientific World Journal*, **2014**, Article ID: 437863. https://doi.org/10.1155/2014/437863

[16] Duman, O. and Orhan, C. (2004) Statistical Approximation by Positive Linear Operator. *Studia Mathematica*, **161**, 187-197. https://doi.org/10.4064/sm161-2-6