

非线性延迟波动方程的紧致有限差分格式

罗雲榕, 王子哲, 王 博*

中国民航大学理学院, 天津

收稿日期: 2022年4月12日; 录用日期: 2022年5月13日; 发布日期: 2022年5月20日

摘 要

本文主要研究了一类带有Dirichlet边界条件的非线性延迟波动方程, 并建立了一个紧致有限差分格式。运用离散能量法证明了该差分格式在 L_∞ 范数下满足时间二阶、空间四阶的收敛率。最后通过数值算例验证了算法的精度和有效性。

关键词

非线性延迟波动方程, 紧致有限差分方法, 收敛性

A Compact Finite Difference Scheme for Nonlinear Wave Equation with Delay

Yunrong Luo, Zizhe Wang, Bo Wang*

College of Science, Civil Aviation University of China, Tianjin

Received: Apr. 12th, 2022; accepted: May 13th, 2022; published: May 20th, 2022

Abstract

A compact finite difference scheme is established for a class of nonlinear wave equations with delay with Dirichlet boundary value conditions. By using the discrete energy method, the proposed compact finite difference scheme is proved temporally second-order convergence rate and spatially fourth-order convergence rate in L_∞ norm. Finally, numerical results have confirmed the accuracy and effectiveness of the algorithm.

Keywords

Nonlinear Wave Equation with Delay, Compact Finite Difference Method, Convergence

*通讯作者。

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在描述自然科学和社会科学中的各种现象时,常常需要利用系统过去时刻的状态,描述即将发生的状态,延迟微分方程模型由此诞生。延迟微分方程广泛应用于经济学、物理学、生态学、医学、交通调度、工程控制、计算机辅助设计、核工程等许多科学领域,因此研究此类问题具有重要的意义和实用价值。随着对延迟微分方程的研究,其中的一个分支,延迟偏微分方程逐渐受到大家的重视,而其数值方法的研究可以极大弥补理论研究方面的不足。

近些年来,在延迟抛物方程的数值研究方面,已有不少成果。孙志忠等[1]研究了非线性延迟抛物方程的 Crank-Nicolson 差分格式,池永日[2]和范乐乐等[3]分别研究了非线性延迟抛物方程的紧差分格式。然而,人们对延迟波动方程的研究关注不多,陈景良等[4]研究了非线性延迟波动方程的显式有限差分格式,该格式具有时间二阶、空间二阶的精度。为了更有效地解决问题,人们对于计算结果的精度要求越来越高,传统的显式差分格式必须在增加网格点数量的前提下,才能提高计算精度,但是这也增加了计算时间,而紧致有限差分格式仅仅利用三个网格点,就可以达到四阶的收敛精度,所以具有很高的研究意义,因此本文研究非线性延迟波动方程的高阶紧致有限差分方法。

文章安排如下,在第二部分给出了非线性延迟波动方程的紧致有限差分格式,并对其收敛性进行理论性分析。在第三部分,通过数值算例验证了理论结果。最后一部分,给出了文章的结论。

2. 紧致有限差分格式

考虑如下非线性延迟波动方程:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t, u(x, t-s)), \quad b_1 \leq x \leq b_2, \quad 0 < t \leq T, \quad (1a)$$

其初边值条件为:

$$u(x, t) = \phi(x, t), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \varphi(x), \quad b_1 \leq x \leq b_2, \quad -s \leq t \leq 0, \quad (1b)$$

$$u(b_1, t) = \alpha(t), \quad u(b_2, t) = \beta(t), \quad 0 < t \leq T. \quad (1c)$$

其中 $a > 0$ 为扩散系数, s 为延迟系数。

2.1. 记号

为建立非线性延迟波动方程(1a)~(1c)的差分格式,首先对 $\Omega = \{(x, t) | b_1 \leq x \leq b_2, -s \leq t \leq T\}$ 做均匀网格剖分。取空间步长 $h_x = (b_2 - b_1)/m$, 取时间步长 $h_t = s/n_1 = T/n$ 。这里 m, n_1, n 为整数。记 $x_i = b_1 + ih_x$, $t_k = kh_t$, $0 \leq i \leq m$, $-n_1 \leq k \leq n$, 这里 i, k 均为整数。分别记结点 (x_i, t_k) 处精确解和数值解为 u_i^k, U_i^k 。记网格剖分区域

$$\Omega_h = \{(x_i, t_k) | 0 \leq i \leq m, -n_1 \leq k \leq n\},$$

定义网格函数空间

$$U_h = \{U \mid U = U_i, 0 \leq i \leq m, U_0 = U_m = 0\},$$

对任意 $U_i^k \in U_h$, 定义算子、内积和范数,

$$\begin{aligned} \delta_x U_{i+\frac{1}{2}}^k &= \frac{1}{2h_x}(U_{i+1}^k - U_i^k), \quad \delta_t U_i^{k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{h_t}(U_i^{k+1} - U_i^k), \quad \delta_t^2 U_i^k = \frac{1}{h_t^2}(U_i^{k+1} - 2U_i^k + U_i^{k-1}), \\ \delta_x^2 U_i^k &= \frac{1}{h_x^2}(U_{i+1}^k - 2U_i^k + U_{i-1}^k), \quad (U, V) = h_x \sum_{i=1}^{m-1} U_i V_i, \quad (U, V)_1 = h_x \sum_{i=1}^{m-1} \left(\delta_x U_{i-\frac{1}{2}} \right) \left(\delta_x V_{i-\frac{1}{2}} \right), \\ \|U\| &= \sqrt{(U, U)}, \quad |U|_1 = \sqrt{(U, U)_1}. \end{aligned}$$

定义紧致差分算子,

$$(\mathcal{A}U)_i = \begin{cases} \frac{1}{12}(U_{i+1} + 10U_i + U_{i-1}), & 1 \leq i \leq m-1, \\ U_i, & i = 0, m. \end{cases}$$

下面构造紧致有限差分格式。

2.2. 差分格式的建立

在点 (x_i, t_k) 处考虑方程(1a)有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_k) - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_k) = f(x_i, t_k, u_i^{k-n_1}), \tag{2}$$

由泰勒公式可知,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_k) &= \delta_t^2 u_i^k - \frac{h_t^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i, \theta_{ik}), \quad \theta_{ik} \in (t_{k-1}, t_{k+1}), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_k) &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_{k+1}) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_{k-1}) \right] - \frac{h_x^2}{2} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2}(x_i, \tilde{\theta}_{ik}), \quad \tilde{\theta}_{ik} \in (t_{k-1}, t_{k+1}). \end{aligned}$$

将上式代入方程(2)得,

$$\begin{aligned} &\delta_t^2 u_i^k - \frac{1}{2} a^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_{k+1}) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_{k-1}) \right] \\ &= f(x_i, t_k, u_i^{k-n_1}) + \left(\frac{1}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i, \theta_{ik}) - \frac{a^2}{2} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2}(x_i, \tilde{\theta}_{ik}) \right) h_t^2. \end{aligned}$$

将紧算子 \mathcal{A} 作用于上式两端得,

$$\begin{aligned} &\mathcal{A} \delta_t^2 u_i^k - \frac{1}{2} a^2 \left[\mathcal{A} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_{k+1}) + \mathcal{A} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_{k-1}) \right] \\ &= \mathcal{A} f(x_i, t_k, u_i^{k-n_1}) + \mathcal{A} \left(\frac{1}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i, \theta_{ik}) - \frac{a^2}{2} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2}(x_i, \tilde{\theta}_{ik}) \right) h_t^2. \end{aligned} \tag{3}$$

根据泰勒公式, 可得,

$$\mathcal{A} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_k) = \delta_x^2 u_i^k + \frac{h_x^4}{240} \frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(\varepsilon_{ik}, t_k), \quad \varepsilon_{ik} \in (x_{i-1}, x_{i+1}),$$

则

$$\frac{1}{2} \mathcal{A} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_{k+1}) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_{k-1}) \right] = \delta_x^2 u_i^k + \frac{h_x^4}{240} \frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(\varepsilon_{ik}, t_{ik}), \quad \varepsilon_{ik} \in (x_{i-1}, x_{i+1}), \quad t_{ik} \in (t_{k-1}, t_{k+1}). \quad (4)$$

将方程(4)代入方程(3)中, 得

$$\mathcal{A} \delta_t^2 u_i^k - a^2 \delta_x^2 u_i^k = \mathcal{A} f(x_i, t_k, u_i^{k-n_1}) + R_{ik}, \quad 1 \leq i \leq m-1, \quad 0 \leq k \leq n, \quad (5)$$

其中

$$R_{ik} = \mathcal{A} \left[\frac{1}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i, \theta_{ik}) - \frac{a^2}{2} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i, \tilde{\theta}_{ik}) \right] h_t^2 + \frac{a^2}{240} \frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(\tilde{\varepsilon}_{ik}, \tilde{t}_{ik}) h_x^4.$$

假设解在充分光滑的情况下, 则 $R_{ik} = C(h_t^2 + h_x^4)$, 本文中 C 为不同的任意常数。

用数值解 U_i^k 代替精确解 u_i^k , 并省略 R_{ik} , 得紧致差分格式:

$$\mathcal{A} \delta_t^2 U_i^k - a^2 \delta_x^2 U_i^k = \mathcal{A} f(x_i, t_k, U_i^{k-n_1}), \quad 1 \leq i \leq m-1, \quad 0 \leq k \leq n. \quad (6)$$

由于紧致差分格式(6)为三层格式, 而我们仅知道初始条件中 U_i^0 的值, 下面讨论如何求解 U_i^1 。

由方程(1b)可知,

$$u_i^0 = \varphi(x_i), \quad 1 \leq i \leq m-1,$$

在点 (x_i, t_0) 处考虑方程(1a)可知,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_0) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_0) + f(x_i, t_0, u_i^{-n_1}) = a^2 \phi''(x) + f(x_i, t_0, u_i^{-n_1}),$$

由泰勒公式及方程(1b)可知,

$$\begin{aligned} u_i^1 &= u(x_i, t_0) + h_t \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_0) + \frac{1}{2} h_t^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_0) + \frac{1}{2} \int_0^{h_t} (h_t - t)^2 \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i, t_0) dt \\ &= \phi(x_i) + h_t \varphi(x_i) + \frac{1}{2} h_t^2 \left[a^2 \phi''(x_i) + f(x_i, t_0, u_i^{-n_1}) \right] + R_{i0}, \quad 1 \leq i \leq m-1. \end{aligned}$$

其中

$$R_{i0} = \mathcal{A} \frac{1}{2} \int_0^{h_t} (h_t - t)^2 \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i, t_0) dt = C(h_t^2 + h_x^4).$$

再次用数值解 U_i^k 代替精确解 u_i^k , 并省略 R_{i0} , 得

$$U_i^1 = \phi(x_i) + h_t \varphi(x_i) + \frac{1}{2} h_t^2 \left[a^2 \phi''(x_i) + f(x_i, t_0, U_i^{-n_1}) \right], \quad 1 \leq i \leq m-1. \quad (7)$$

根据上面的推导过程, 得到如下紧致有限差分格式,

$$\mathcal{A} \delta_t^2 U_i^k - a^2 \delta_x^2 U_i^k = \mathcal{A} f(U_i^{k-n_1}, x_i, t_k), \quad 1 \leq i \leq m-1, \quad 0 \leq k \leq n, \quad (8a)$$

$$U_i^1 = \phi(x_i) + h_t \varphi(x_i) + \frac{1}{2} h_t^2 \left[a^2 \phi''(x_i) + f(U_i^{-n_1}, x_i, t_0) \right], \quad 1 \leq i \leq m-1, \quad (8b)$$

$$U_i^k = \phi(x_i, t_k), \quad 1 \leq i \leq m-1, \quad (8c)$$

$$U_0^k = \alpha(t_k), \quad U_m^k = \beta(t_k), \quad 1 \leq t \leq n. \quad (8d)$$

注: 紧致差分算子 \mathcal{A} 作用于 U^k , 可写为矩阵形式, 即

$$AU^k = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 10 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 10 & & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & & 10 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i^k \\ U_i^k \\ U_i^k \\ \vdots \\ U_i^k \\ U_i^k \\ U_i^k \end{bmatrix},$$

可见，紧致差分算子 \mathcal{A} 是对角占优的，因此 \mathcal{A} 是可逆算子，即满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_k) = \mathcal{A}^{-1} \delta_x^2 u_i^k + O(h^4)$ 。

2.3. 差分格式的收敛性分析

下面介绍三个重要引理来研究紧致差分格式(8a)~(8d)的收敛性。

引理 1 [5] 设 $v \in U_h$ ，则有下列不等式成立

$$\begin{aligned} (-\delta_x^2 v, v) &= \|\delta_x v\|^2, \quad \|v\|_\infty \leq \frac{\sqrt{b_2 - b_1}}{2} |v|_1, \\ \|v\| &\leq \frac{b_2 - b_1}{\sqrt{6}} |v|_1, \quad h_x \|\delta_x v\|^2 \leq 4 \|v\|^2. \end{aligned}$$

引理 2 [6] 设 $\{F^k \mid k \geq 0\}$ 是非负序列且满足 $F^{k+1} \leq A + Bh_t \sum_{k=1}^K F^k$ ，则

$$\max_{0 \leq k \leq K+1} F^k \leq A \exp(2B(K+1)h_t),$$

其中 A, B 为非负常数。

引理 3 [7] 对于对称正定矩阵 \mathcal{A}^{-1} ，我们有

$$\mathcal{A}^{-1} = R_1^T R_1 \text{ 和 } C_0 \|U^n\| \leq \|R_1 U^n\| \leq C_1 \|U^n\|,$$

其中 $R_1 = Chol(\mathcal{A}^{-1})$ ， $C_i (i=0,1)$ 为正常数。

定理 1 假设问题(1a)~(1c)的精确解 u 足够光滑，令紧致差分格式(8a)~(8d)的数值解为 U_i^k 。记 $e_i^k = u_i^k - U_i^k$ ，当 $\frac{a^2 h_t^2}{h_x^2} < 1$ 且 $f(u, x, t)$ 满足局部 Lipschitz 条件时，则

$$|e^k|_1^2 \leq C(h_t^2 + h_x^4)^2, \quad -n_1 \leq k \leq n, \tag{9}$$

$$\|e^k\|_\infty \leq C(h_t^2 + h_x^4), \quad -n_1 \leq k \leq n, \tag{10}$$

成立。

证明： 将方程(5)与(6)相减，得到

$$\mathcal{A} \delta_t^2 e_i^k - a^2 \delta_x^2 e_i^k = \mathcal{A} f(x_i, t_k, u_i^{k-n_1}) - \mathcal{A} f(x_i, t_k, U_i^{k-n_1}) + R_{ik}, \quad 1 \leq i \leq m-1, \quad 0 \leq k \leq n, \tag{11}$$

方程(11)的两端同时乘以 \mathcal{A}^{-1} ，运用引理 3，可得误差方程

$$\delta_t^2 e_i^k - R_1 R_1^T a^2 \delta_x^2 e_i^k = f(x_i, t_k, u_i^{k-n_1}) - f(x_i, t_k, U_i^{k-n_1}) + R_1^T R_1 R_{ik}^k, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq m < n, \tag{11a}$$

$$e_i^k = 0, \quad 0 \leq i \leq m, \quad -n_1 \leq k \leq 0, \tag{11b}$$

$$e_i^k = 0, \quad i = 0, m, \quad 0 \leq k \leq n, \tag{11c}$$

当 $-n_1 \leq k \leq 0$ 时, 由方程(11b)可知, $e_i^k = 0$ 。显然误差满足方程(9)~(10)。

下面我们利用数学归纳法证明误差。假设当 $k = l$ 时, 方程(9)~(10)均成立, 应用引理 1, 则

$$\|e^k\|_\infty \leq \frac{\sqrt{b_2 - b_1}}{2} \|e^k\|_1 \leq \varepsilon, \quad 1 \leq k \leq l.$$

方程(11a)的两端同时与 $2\delta_i e_k$ 做内积, 则

$$(\delta_i^2 e_i^k, 2\delta_i e_k) - (R_1 R_1^T a^2 \delta_x^2 e_i^k, 2\delta_i e_k) = (f(x_i, t_k, u_i^{k-n_1}) - f(x_i, t_k, U_i^{k-n_1}), 2\delta_i e_k) + (R_1^T R_1 R_i^k, 2\delta_i e_k).$$

运用引理 1, 得

$$\begin{aligned} (\delta_i^2 e_i^k, 2\delta_i e_k) &= \left(\frac{e^{k+1} - 2e^k + e^{k-1}}{h_i^2}, \frac{e^{k+1} - e^{k-1}}{h_i} \right) \\ &= \frac{1}{h_i^3} (e^{k+1} - e^k - (e^k - e^{k-1}), e^{k+1} - e^k + (e^k - e^{k-1})) \\ &= \frac{1}{h_i} \left(\delta_i \left\| e^{k+\frac{1}{2}} \right\|^2 - \delta_i \left\| e^{k-\frac{1}{2}} \right\|^2 \right) \end{aligned} \tag{12}$$

和

$$\begin{aligned} (R_1 R_1^T a^2 \delta_x^2 e_i^k, 2\delta_i e_k) &= -(R_1 \delta_x e^k, 2R_1 \delta_x \delta_i e_k) = -\left(R_1 \delta_x e^k, \frac{R_1 \delta_x e^{k+1} - R_1 \delta_x e^{k-1}}{h_i} \right) \\ &= -\frac{1}{h_i} [(R_1 \delta_x e^k, R_1 \delta_x e^{k+1}) - (R_1 \delta_x e^{k-1}, R_1 \delta_x e^k)]. \end{aligned} \tag{13}$$

另外,

$$(f(x_i, t_k, u_i^{k-n_1}) - f(x_i, t_k, U_i^{k-n_1}), 2\delta_i e_k) \leq \frac{1}{2} \|f(x_i, t_k, u_i^{k-n_1}) - f(x_i, t_k, U_i^{k-n_1})\|^2 + \frac{1}{2} \|2\delta_i e_k\|^2.$$

由于 $f(u, x, t)$ 满足局部 Lipschitz 条件, 则

$$\|f(x_i, t_k, u_i^{k-n_1}) - f(x_i, t_k, U_i^{k-n_1})\|^2 \leq C \|e^{k-n_1}\|^2. \tag{14}$$

由柯西不等式, 计算得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|2\delta_i e_k\|^2 &\leq \left\| \delta_i e^{k+\frac{1}{2}} \right\|^2 + \left\| \delta_i e^{k-\frac{1}{2}} \right\|^2, \\ (R_1^T R_1 R_i^k, 2\delta_i e_k) &\leq C (h_i^2 + h_x^4)^2 + \left\| \delta_i e^{k+\frac{1}{2}} \right\|^2 + \left\| \delta_i e^{k-\frac{1}{2}} \right\|^2. \end{aligned} \tag{15}$$

记 $L^k = \left\| \delta_i e^{k+\frac{1}{2}} \right\|^2 + a^2 (R_1 \delta_x e^k, R_1 \delta_x e^{k+1})$, 结合方程(12)~(15), 可得

$$\frac{1}{h_i} (L^k - L^{k-1}) \leq C \|e^{k-n_1}\|^2 + 2 \left\| \delta_i e^{k+\frac{1}{2}} \right\|^2 + 2 \left\| \delta_i e^{k-\frac{1}{2}} \right\|^2 + C (h_i^2 + h_x^4)^2. \tag{16}$$

下面我们分析 L^k 。当 $q = \frac{a^2 h_i^2}{h_x^2} < 1$ 时, 有

$$\begin{aligned}
 L^k &= \left\| \delta_t e^{k+\frac{1}{2}} \right\|^2 + a^2 \left| R_1 e^{k+\frac{1}{2}} \right|_1^2 - \left[a^2 \left| R_1 e^{k+\frac{1}{2}} \right|_1^2 - a^2 (R_1 \delta_x e^k, R_1 \delta_x e^{k+1}) \right] \\
 &= (1-q) \left\| \delta_t e^{k+\frac{1}{2}} \right\|^2 + a^2 \left| R_1 e^{k+\frac{1}{2}} \right|_1^2 + q \left\| \delta_t e^{k+\frac{1}{2}} \right\|^2 - \left[a^2 \left| R_1 e^{k+\frac{1}{2}} \right|_1^2 - a^2 (R_1 \delta_x e^k, R_1 \delta_x e^{k+1}) \right] \\
 &\geq (1-q) \left\| \delta_t e^{k+\frac{1}{2}} \right\|^2 + a^2 \left| R_1 e^{k+\frac{1}{2}} \right|_1^2.
 \end{aligned} \tag{17}$$

由上式易知

$$\left\| \delta_t e^{k+\frac{1}{2}} \right\|^2 \leq \frac{1}{1-q} L^k, \quad \left| e^{k+\frac{1}{2}} \right|_1 \leq \frac{1}{a^2} L^k. \tag{18}$$

因为 $e_i^{k+1} = e_i^{k+\frac{1}{2}} + h_i \delta_t e_i^{k+\frac{1}{2}} / 2$, 则

$$\begin{aligned}
 \left(\delta_x e_{i+\frac{1}{2}}^{k+1} \right)^2 &= \left(\delta_x e_{i+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} + \frac{h_i}{2} \delta_x \delta_t e_{i+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \right)^2 = \left[\delta_x e_{i+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} + \frac{h_i}{2h_x} \left(\delta_t e_{i+1}^{k+\frac{1}{2}} - \delta_t e_i^{k+\frac{1}{2}} \right) \right]^2 \\
 &\leq 2 \left(\delta_x e_{i+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \right)^2 + \frac{q}{a^2} \left[\left(\delta_t e_{i+1}^{k+\frac{1}{2}} \right)^2 + \left(\delta_t e_i^{k+\frac{1}{2}} \right)^2 \right], \quad 0 \leq i \leq m-1,
 \end{aligned} \tag{19}$$

在方程(19)两端同时乘以 $a^2 h_x$ 并对 i 从 1 到 $m-1$ 求和, 应用方程(18)可得

$$a^2 \left| e^{k+1} \right|_1^2 \leq 2L^k + \frac{2}{1-q} L^k \leq \frac{2}{1-q} L^k, \quad 1 \leq k \leq l. \tag{20}$$

将方程(20)直接代入方程(16), 得

$$\frac{1}{h_t} (L^k - L^{k-1}) \leq \frac{2}{1-q} (L^k + L^{k-1}) + C \left\| e^{k-n_t} \right\|^2 + C (h_t^2 + h_x^4)^2,$$

运用引理 1,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{h_t} (L^k - L^{k-1}) &\leq \frac{2}{1-q} (L^k + L^{k-1}) + C \left| e^{k-n_t} \right|_1^2 + C (h_t^2 + h_x^4)^2 \\
 &\leq \frac{2}{1-q} (L^k + L^{k-1}) + C L^{k-n_t-1} + C (h_t^2 + h_x^4)^2.
 \end{aligned}$$

在上式两端同时乘以 h_t , 将上式中 k 用 p 替换, 并对 p 从 -1 到 k 求和得

$$L^k \leq \frac{2h_t}{1-q} \sum_{p=0}^k (L^p + L^{p-1}) + Ch_t \sum_{p=0}^{k-1} L^p + CT (h_t^2 + h_x^4)^2,$$

整理可得,

$$L^k \leq Ch_t \sum_{p=0}^{k-1} L^p + CT (h_t^2 + h_x^4)^2,$$

运用引理 2, 得

$$L^k \leq C (h_t^2 + h_x^4), \quad 0 \leq k \leq l \tag{21}$$

在方程(21)中, 运用方程(20)和引理 1, 得

$$\begin{aligned} |e^{l+1}|_1^2 &\leq \frac{2}{a^2(1-q^2)} L^l \leq C(h_t^2 + h_x^4)^2, \\ \|e^{l+1}\|_\infty &\leq \frac{\sqrt{b_2 - b_1}}{2} |e^{l+1}|_1 \leq C(h_t^2 + h_x^4)^2. \end{aligned}$$

所以当 $k = l + 1$ 时, 方程(9)~(10)成立, 由数学归纳法得证。

3. 数值实验

应用紧致差分格式(8a)~(8d)计算如下非线性延迟波动方程的初边值问题

$$\begin{aligned} u_{tt} - 2u_{xx} &= f(x, t, u(x, t - 0.1)), \quad (x, t) \in [1, 2] \times (0, 1], \\ u(x, t) &= \sin(xt), \quad (x, t) \in [1, 2] \times [-0.1, 0), \\ u(1, t) &= \sin t, \quad u(2, t) = \sin(2t), \quad t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

其中 $f(x, t, u(x, t - 0.1)) = -u^2(x, t - 0.1) + \sin^2(x(t - 0.1)) + (2t^2 - x^2)\sin xt$ 。该问题的精确解为 $u(x, t) = \sin(xt)$ 。

令

$$\begin{aligned} E_\infty(h_x, h_t) &= \max |u_i^k - U_i^k|, \\ \text{order} &= \log_2 E_\infty(2h_x, 2h_t) / E_\infty(h_x, h_t). \end{aligned}$$

Table 1. When $h_t = h_x^2$, space step error and convergence order

表 1. 当 $h_t = h_x^2$ 时, 空间步长的误差和收敛阶

h_x	$E_\infty(h_x, h_t)$	order	CPU
1/5	3.3950e-04	—	0.1571s
1/10	2.2946e-05	3.8871	0.1944s
1/20	1.4850e-06	3.9500	0.1385s
1/40	9.5466e-08	3.9590	0.1414s

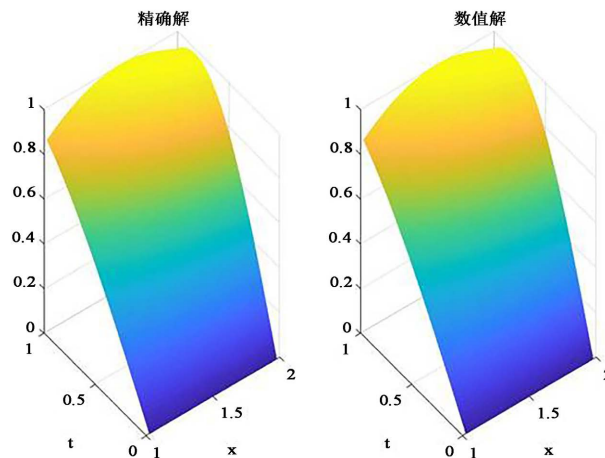


Figure 1. Exact solution surface and numerical solution surface
图 1. 精确解曲面和数值解曲面图

表 1 为紧致差分格式(8a)~(8d)在 $h_t = h_x^2$ 时取不同步长计算数值解得到的最大模误差, CPU 为程序运行时间。从表 1 可以看到, 我们所提的紧致差分格式(8a)~(8d)满足空间四阶的收敛率, 这与理论结果一致。

图 1 给出了空间步长 $h_x = \frac{1}{40}$, 时间步长 $h_t = \frac{1}{1600}$ 时的精确解曲面和数值解曲面。可以看到, 精确解和数值解的三维图像是完全一致的。

4. 结论

非线性延迟波动方程属于时滞微分方程, 所求的未知函数 $u(x, t)$ 在某确定时刻的导数由前面时刻函数所确定, 所以它也是一类特殊的泛函偏微分方程。本文根据文献[4]讨论的传统显式差分格式, 提出了一种高阶紧致有限差分格式, 其中时间方向利用二阶中心差分方法、空间方向利用四阶紧算子进行离散, 该格式的误差阶为 $O(h_t^2 + h_x^4)$ 。最后通过数值算例, 说明该方法具有一定的可行性和实用性。

基金项目

大学生创新创业计划项目(项目编号 IEYCAUC2021020)。

参考文献

- [1] 张在斌, 孙志忠. 一类非线性延迟抛物偏微分方程的 Crank-Nicolson 型差分格式[J]. 数值计算与计算机应用, 2010, 31(2): 131-140.
- [2] 池永日. 一类高精度非线性延迟抛物偏微分方程的紧差分格式[J]. 延边大学学报(自然科学版), 2010, 36(4): 287-290.
- [3] 范乐乐, 钟华. 一类非线性延迟抛物偏微分方程的紧致差分格式[J]. 数学的实践与认识, 2015, 45(3): 206-213.
- [4] 陈景良, 邓定文. 非线性延迟波动方程的两类差分格式[J]. 理论数学, 2020, 10(5): 508-517.
- [5] 孙志忠. 偏微分方程数值解法[M]. 北京: 科学出版社, 2012: 110-171.
- [6] Wang, B., Liang, D. and Sun, T.J. (2017) The Conservative Splitting High-Order Compact Finite Difference Scheme for Two-Dimensional Schrodinger Equations. *International Journal of Computational Methods*, **15**, Article ID: 1750079. <https://doi.org/10.1142/S0219876217500797>
- [7] Wang, B., Sun, T.J. and Liang, D. (2019) The Conservative and Fourth-Order Compact Finite Difference Schemes for Regularized Long Wave Equation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **356**, 98-117. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2019.01.036>