Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(5), 861-874
Published Online May 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.125096

Hans汉斯

一类分数阶发展方程非局部问题的精确可控性

苏　怡，杨　和

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2022年4月21日；录用日期：2022年5月23日；发布日期：2022年5月30日

摘　要

本文讨论了一类分数阶发展方程非局部问题$\begin{cases} D^q x(t) = Ax(t) + f(t, x(t)) + Bu(t), t \in [0,b], \\ x(0) = \sum_{k=1}^{m} c_k x(t_k) \end{cases}$的精确可控性。文中通过引入一个新的非紧性测度，在$C_0$-半群等度连续的情形下，运用Mönch不动点定理，证明了该问题的精确可控性，并通过一个具体的例子来验证本文的抽象结论。

关键词

Caputo分数阶导数，精确可控性，Mönch不动点定理，非紧性测度，等度连续模

Exact Controllability for a Class of Fractional Evolution Equations with Nonlocal Conditions

Yi Su, He Yang

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Apr. 21st, 2022; accepted: May 23rd, 2022; published: May 30th, 2022

Abstract

This paper discusses the exact controllability of nonlocal conditions for a class of fractional evolution equations $\begin{cases} D^q x(t) = Ax(t) + f(t, x(t)) + Bu(t), t \in [0,b], \\ x(0) = \sum_{k=1}^{m} c_k x(t_k) \end{cases}$. In this paper, by introducing a new measure of non-compactness, the exact controllability of the problem is proved by using

文章引用：苏怡，杨和．一类分数阶发展方程非局部问题的精确可控性[J]．理论数学, 2022, 12(5): 861-874.
DOI: 10.12677/pm.2022.125096

Mönch fixed point theorem under the condition that C_0-semigroup is equicontinuous, and an example is given to verify the abstract conclusion of this paper.

Keywords

Caputo Fractional Derivative, Exact Controllability, The Mönch Fixed Point Theorem, The Measure of Non-Compactness, Modulus of Equicontinuity

1. 引言

分数阶微分方程由于在数学、物理、工程等方面具有广泛应用而被许多学者关注，但是在实际应用中非局部初始条件相比于经典的初始条件能够更好地描述自然现象(参见文献[1]-[8])，因此研究分数阶发展方程非局部问题的可解性和可控性具有重要的理论意义和实际应用价值。Byszewski 在文献[2]中首次研究了一类具有非局部初始条件的半线性一阶发展方程解的存在唯一性。从此以后，人们开始关注具有非局部初始条件的微分方程。

2015 年，梁进等[9]在非紧半群的情况下，利用 Mönch 不动点定理证明了分数阶积微分发展方程非局部问题

$$\begin{cases} D^q x(t) = Ax(t) + f\left(t, x(t), Gx(t)\right) + Bu(t), t \in [0,b], \\ x(0) = \sum_{k=1}^{m} c_k x(t_k) \end{cases} \tag{1.1}$$

的精确可控性。Deng 在文献[4]中指出在(1.1)中使用的非局部函数可以很好地描述少量气体在透明管中的扩散现象。

2020 年，陈鹏玉等[10]通过引入一个新的格林函数，应用 Schauder 不动点定理及预解算子理论研究了 Banach 空间中分数阶发展方程非局部问题

$$\begin{cases} D_t^q x(t) = Ax(t) + Bu(t) + f\left(t, x(t)\right), t \in [0,b], \\ x(0) = \sum_{k=1}^{m} c_k x(t_k) \end{cases}$$

mild 解的存在性和近似可控性。

受上述文献的启发，本文研究 Banach 空间 X 中半线性分数阶发展方程非局部问题

$$\begin{cases} D^q x(t) = Ax(t) + f\left(t, x(t)\right) + Bu(t), t \in [0,b], \\ x(0) = \sum_{k=1}^{m} c_k x(t_k) \end{cases} \tag{1.2}$$

的精确可控性，其中 D^q 为 $q \in (0,1)$ 阶 Caputo 分数阶导数，$A: D(A) \subset X \to X$ 是 C_0-半群 $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ 的无穷小生成元，控制函数 $u \in L^2(J,U)$， $J=[0,b]$， $b>0$ 为常数，U 为 Banach 空间， $B: U \to X$ 为有界线性算子，函数 f 为给定函数。 $0<t_1<t_2<\cdots<t_m<b$， $b \in N$， c_k 是实数且 $c_k \neq 0$， $k=1,2,\cdots,m$。

本文对非局部函数的紧性和连续性都不做要求。在 C_0-半群等度连续的情况下，通过定义一种新的非紧性测度(见文献[11])并应用 Mönch 不动点定理证明了系统(1.2)的精确可控性。在第 2 节中介绍了讨论问

题(1.2)的一些准备工作，主要的结果和证明将在第 3 节中给出，第 4 节通过一个具体的例子来验证本文获得的抽象结论。

2. 预备知识

设 $(X,\|\cdot\|)$ 是可分 Banach 空间，U 是另一个 Banach 空间。设 $C(J,X)$ 表示 J 上所有 $X-$值连续函数全体按范数 $\|u\|_C=\max_{t\in J}\|u(t)\|$ 构成的 Banach 空间。$L^p(J,X)(p\geq 1)$ 是 J 上的 $X-$值 p 方 Bochner 可积函数全体按范数 $\|x\|_{L^p}$ 构成的 Banach 空间。关于 Caputo 分数阶导数，我们介绍如下定义。

定义 1 [12]函数 $f\in C^n[0,\infty)$ 下限为 0 的 Caputo 分数阶导数为：

$$D^q f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-q)}\int_0^t(t-s)^{n-q-1}f^{(n)}(s)\mathrm{d}s,\ t>0,\ n-1<q<n,\ n\in N,$$

其中 $\Gamma(\cdot)$ 为 Gamma 函数。

对 $\forall h\in C(J,X)$，考虑线性发展方程的非局部问题

$$\begin{cases}D^q x(t)=Ax(t)+h(t),\ t\in[0,b],\\ x(0)=\sum_{k=1}^m c_k x(t_k)\end{cases}\tag{2.1}$$

引理 1 [9]设条件(H0)成立，其中

$$\text{(H0)}\quad \sum_{k=1}^m|c_k|\leq\frac{1}{M},\ M\geq 1,$$

则线性系统(2.1)有唯一 mild 解 $x\in C(J,X)$ 满足

$$x(t)=\sum_{k=1}^m c_k\widehat{T}_q(t)P\int_0^{t_k}(t_k-s)^{q-1}T_q(t_k-s)h(s)\mathrm{d}s+\int_0^t(t-s)^{q-1}T_q(t-s)h(s)\mathrm{d}s,\ t\in J,\tag{2.2}$$

其中 $P=\left(I-\sum_{k=1}^m c_k\widehat{T}_q(t_k)\right)^{-1}$ 满足 $\|P\|\leq\dfrac{1}{1-M\sum_{k=1}^m|c_k|}$，

$$\widehat{T}_q(t)=\int_0^\infty\xi_q(\theta)T(t^q\theta)\mathrm{d}\theta,$$

$$T_q(t)=q\int_0^\infty\theta\xi_q(\theta)T(t^q\theta)\mathrm{d}\theta,$$

其中

$$\xi_q(\theta)=\frac{1}{q}\theta^{-1-\frac{1}{q}}W_q\left(\theta^{-\frac{1}{q}}\right)\geq 0,\ \theta\in(0,\infty),$$

$$W_q(\theta)=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^m(-1)^{n-1}\theta^{-qn-1}\frac{\Gamma(1+nq)}{n!}\sin(n\pi q),\ \theta\in(0,\infty).$$

这里，$\xi_q(\theta)$ 表示定义在 $(0,\infty)$ 上的概率密度函数，满足

$$\xi_q(\theta)\geq 0,\ \forall\theta\in(0,\infty),\ \int_0^\infty\xi_q(\theta)\mathrm{d}\theta=1.$$

引理 2 [9] [12]线性算子族 $\{\widehat{T}_q(t)\}_{t\geq 0}$ 和 $\{T_q(t)\}_{t\geq 0}$ 具有下列性质：

(1) 对任意给定的 $t\geq 0$ 和 $\forall x\in X$，有

$$\left\|\widehat{T}_q(t)x\right\|\leq M\|x\|,\ \|T_q(t)x\|\leq\frac{Mq}{\Gamma(1+q)}\|x\|;$$

(2) 对 $\forall t \ge 0$，$\widehat{T}_q(t)$ 和 $T_q(t)$ 都是强连续的；

(3) 如果 $\{T(t)\}_{t\ge 0}$ 是等度连续半群，则对 $\forall x > 0$，$\widehat{T}_q(t)$ 和 $T_q(t)$ 都是等度连续的。

根据引理 1，本文采用如下 mild 解的定义。

定义 2 对 $\forall u \in L^2(J,U)$，如果函数 $x \in C(J,X)$ 满足积分方程

$$\begin{aligned} x(t) = {} & \sum_{k=1}^{m} c_k \widehat{T}_q(t) P \int_0^{t_k} (t_k - s)^{q-1} T_q(t_k - s)\left[Bu(s) + f(s, x(s))\right]\mathrm{d}s \\ & + \int_0^t (t-s)^{q-1} T_q(t-s)\left[Bu(s) + f(s,x(s))\right]\mathrm{d}s, \end{aligned} \tag{2.3}$$

则称函数 x 为半线性分数阶发展系统(1.2)的 mild 解。

定义 3 [13]若对任一给定的 $x_b \in X$，存在控制函数 $u \in L^2(J,U)$，使得系统(1.2)的 mild 解 x 满足

$$x(b) = x_b,$$

则称系统(1.2)在 J 上是精确可控的。

本文主要采用非紧性测度方法和不动点定理研究半线性分数阶发展系统(1.2) mild 解的存在性和精确可控性，关于非紧性测度，我们有如下结论。

引理 3 [14] [15]设 $\Omega, \Omega_1, \Omega_2$ 是 X 中的非空有界集，$a \in R$，则 Hausdroff 非紧性测度 $\beta(\cdot)$ 具有下列性质：

(1) $\Omega_1 \subset \Omega_2 \Rightarrow \beta(\Omega_1) \le \beta(\Omega_2)$；

(2) $\beta(\Omega_1 + \Omega_2) \le \beta(\Omega_1) + \beta(\Omega_2)$，其中 $\Omega_1 + \Omega_2 = \{x + y : x \in \Omega_1, y \in \Omega_2\}$；

(3) $\beta(\Omega_1 \cup \Omega_2) \le \max\{\beta(\Omega_1), \beta(\Omega_2)\}$；

(4) $\beta(\lambda\Omega) \le |\lambda| \beta(\Omega)$，对 $\forall \lambda \in R$；

(5) $\beta(\{0\} \cup \Omega) = \beta(\Omega)$；

(6) $\beta(\Omega) = 0 \Leftrightarrow \Omega$ 在 X 中相对紧。

引理 4 [14]设 X 为 Banach 空间，$D \subset C(J,X)$ 有界且等度连续，则 $\beta(D(t))$ 在 J 上连续，且 $\beta(D) = \max_{t\in J} \beta(D(t))$。

引理 5 [16]设 X 是可分的 Banach 空间，$D_0 = \{x_m\} \subset C(J,X)$ 是可数集。若 $\exists \phi \in L^1(J)$，使得

$$\|x_m(t)\| \le \phi(t), t \in J, m = 1, 2, \cdots,$$

则 $\beta(D(t))$ 在 J 上 Lebesgue 可积，且

$$\beta\left(\left\{\int_J x_m(t)\mathrm{d}t : m = 1, 2, \cdots\right\}\right) \le 2\int_J \beta(D_0(t))\mathrm{d}t.$$

特别地，当 D_0 有界时上式成立。

定义 4 [11]如果序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 X 中对 $a.e.\, t \in J$ 是相对紧的，且对 $a.e.\, t \in J$，存在函数 $\mu \in L^1(J,X)$ 满足

$$\sup_{n\ge 1} \|f_n(t)\| \le \mu(t),$$

则称序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^1(J,X)$ 是半紧的。

引理 6 [11]设 $G : L^1(J,X) \to C(J,X)$ 定义为

$$(Gf)(t) = \int_0^t T_q(t-s) f(s)\mathrm{d}s.$$

如果序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^1(J,X)$ 是半紧的，则序列 $\{Gf_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $C(J,X)$ 上相对紧。此外，如果 $f_n \to f$，则 $(Gf_n)(t) \to (Gf)(t), n \to \infty$。

引理 7 [17]设 D 为 Banach 空间 X 的闭凸子集且 $0 \in D$。如果 $F : D \to X$ 是连续映射，且满足如下条件：若 $\Omega \subseteq D$ 可数，且 $\Omega \subseteq \overline{co}(\{0\} \cup F(\Omega))$，则 $\overline{\Omega}$ 是紧的，那么 F 在 D 中有不动点。

3. 主要结果及证明

为了证明本文的主要定理，我们先给出如下假设条件：

(H1) 线性算子 A 生成的 C_0-半群 $T(t)(t\geq 0)$ 是等度连续半群，且存在 $M\geq 1$，使得 $\|T(t)\|\leq M$ 。

(H2) 函数 $f:J\times X\to X$ 满足：

(1) 对 $a.e.\, t\in J$，函数 $f(t,\cdot):X\to X$ 连续；对每个 $x\in X$，函数 $f(\cdot,x):J\to X$ 强可测；

(2) 对 $\forall r>0$，存在常数 $q_1\in(0,q)$ 和函数 $m\in L^{\frac{1}{q_1}}(J,R^+)$，使得对 $\forall t\in J, x\in X$，有

$$\|f(t,x)\|\leq m(t), t\in J,$$

其中 $m(t)$ 满足 $\lim_{k\to+\infty}\inf\dfrac{\|m\|_{L^{\frac{1}{q_1}}}}{r}=\sigma<\infty$；

(3) 存在常数 $L>0$，使得对 X 中任意非空有界集 D，有

$$\beta(f(t,D))\leq L\beta(D).$$

(H3) $B:U\to X$ 是线性有界算子，即存在 $M_B>0$，使得

$$\|B\|\leq M_B.$$

(H4) 线性算子 $W:L^2(J,U)\to X$ 定义为：

$$Wu=\sum_{k=1}^{m}c_k\widehat{T_q}(t)P\int_0^{t_k}(t_k-s)^{q-1}T_q(t_k-s)Bu(s)\mathrm{d}s+\int_0^b(b-s)^{q-1}T_q(b-s)Bu(s)\mathrm{d}s,$$

满足下列条件：

(1) W 存在取值于 $L^2(J,U)\setminus Ker\,W$ 中的线性逆算子 W^{-1}，其中

$$Ker\,W=\{x\in L^2(J,U):Wx=0\};$$

(2) 存在常数 L_W，使得 $\|W^{-1}\|\leq L_W$；

(3) 存在常数 $L'>0$，使得对 X 中任意非空有界集 D，有

$$\beta(W^{-1}(D))\leq L'\beta(D).$$

(H5) 存在常数 $R>0$，使得

$$p=[2qMLl_1l_2(2qML'M_Bl_1l_2+1)]\sup_{t\in[0,b]}\int_0^t \mathrm{e}^{-R(t-s)}\mathrm{d}s<1,$$

其中，

$$l_1=\frac{1}{\Gamma(1+q)\left(1-M\sum_{k=1}^{m}|c_k|\right)},\quad l_2=\frac{b^{q-q_1}}{(1+a)^{1-q_1}}.$$

定理 3.1 设条件(H1)~(H5)成立。如果

$$l_1l_2qM\sigma(ql_1MM_BL_W+1)<1, \tag{3.1}$$

则半线性分数阶发展系统(1.2)在 J 上精确可控。

证明： 根据条件(H3) (1)，对每个 $x\in X, t\in J$，定义控制 $u(t):=u_x(t)$ 如下：

$$u_x(t)=W^{-1}\Big[x_1-\widehat{T_q}(b)\sum_{k=1}^{m}c_kP\int_0^{t_k}(t_k-s)^{q-1}T_q(t_k-s)f(s,x(s))\mathrm{d}s$$
$$-\int_0^b(b-s)^{q-1}T_q(b-s)f(s,x(s))\mathrm{d}s\Big](t).$$

按此控制函数，分数阶发展系统(1.2)在 J 上的精确可控等价于算子 $G:C(J,X)\to C(J,X)$ 存在不动点，其中算子 G 定义如下：

$$(Gx)(t)=\sum_{k=1}^{m}c_k\widehat{T_q}(t)P\int_0^{t_k}(t_k-s)^{q-1}T_q(t_k-s)\left[Bu_x(s)+f(s,x(s))\right]\mathrm{d}s \\ +\int_0^t(t-s)^{q-1}T_q(t-s)\left[Bu_x(s)+f(s,x(s))\right]\mathrm{d}s. \tag{3.2}$$

下面我们将用引理 7 证明算子 G 在 $C(J,X)$ 上存在不动点，证明过程分为 4 步。

第 1 步，证明存在 $r>0$，使得 $G(B_r)\subseteq B_r$，其中 $B_r=\left\{x\in C(J,X):\|x\|_C\le r\right\}$。

反设不成立，则对任意 $r>0$，存在函数 $x^r(\cdot)\in B_r$，但 $G(x^r)\notin B_r$，即 $\left\|G(x^r)(t)\right\|>r,t\in J$。易知 $(t-s)^{q-1}\in L^{\frac{1}{1-q_1}}([0,b],R)$，其中 $q_1\in[0,q),\ a=\dfrac{q-1}{1-q_1}$。由条件(H2) (2)及 Hölder 不等式，有

$$\begin{aligned}\left\|u_{x^r}(t)\right\|&=\left\|W^{-1}\left[x_1-\widehat{T_q}(b)\sum_{k=1}^{m}c_kP\int_0^{t_k}(t_k-s)^{q-1}T_q(t_k-s)f(s,x^r(s))\mathrm{d}s\right.\right.\\&\qquad\left.\left.-\int_0^b(b-s)^{q-1}T_q(b-s)f(s,x^r(s))\mathrm{d}s\right]\right\|\\&\le L_W\left[\|x_1\|+\frac{M\sum_{k=1}^{m}|c_k|}{1-M\sum_{k=1}^{m}|ck|}\frac{Mq}{\Gamma(1+q)}\left\|\int_0^{t_k}(t_k-s)^{q-1}f(s,x^r(s))\mathrm{d}s\right\|\right.\\&\qquad\left.+\frac{Mq}{\Gamma(1+q)}\left\|\int_0^b(b-s)^{q-1}f(s,x^r(s))\mathrm{d}s\right\|\right]\\&\le L_W\|x_1\|+\frac{qL_WM^2\sum_{k=1}^{m}|c_k|}{\Gamma(1+q)\left(1-M\sum_{k=1}^{m}|c_k|\right)}\left[\left(\int_0^{t_k}(t_k-s)^{\frac{q-1}{1-q_1}}\mathrm{d}s\right)^{1-q_1}\|m\|_{L^{\frac{1}{q_1}}}\right]\\&\qquad+\frac{L_WMq}{\Gamma(1+q)}\left[\left(\int_0^b(b-s)^{\frac{q-1}{1-q_1}}\mathrm{d}s\right)^{1-q_1}\|m\|_{L^{\frac{1}{q_1}}}\right]\\&\le L_W\|x_1\|+\frac{qL_WM}{\Gamma(1+q)\left(1-M\sum_{k=1}^{m}|c_k|\right)}\frac{b^{q-q_1}}{(1+a)^{1-q_1}}\|m\|_{L^{\frac{1}{q_1}}}.\end{aligned}$$

所以

$$\left\|u_{x^r}\right\|\le L_W\|x_1\|+ql_1l_2L_WM\|m\|_{L^{\frac{1}{q_1}}}. \tag{3.3}$$

则

$$\left\|Bu_{x^r}(t)\right\|+\left\|f(s,x^r(s))\right\|\le M_BL_W\|x_1\|+ql_1l_2ML_WM_B\|m\|_{L^{\frac{1}{q_1}}}+m(t).$$

因此，

$$\begin{aligned}r&<\left\|(Gx^r)(t)\right\|\\&\le\left\|\sum_{k=1}^{m}c_k\widehat{T_q}(t)P\int_0^{t_k}(t_k-s)^{q-1}T_q(t_k-s)\left[Bu_{x^r}(s)+f(s,x^r(s))\right]\mathrm{d}s\right\|\\&\quad+\left\|\int_0^t(t-s)^{q-1}T_q(t-s)\left[Bu_{x^r}(s)+f(s,x^r(s))\right]\mathrm{d}s\right\|\\&\le\frac{qM^2\sum_{k=1}^{m}|c_k|}{\Gamma(1+q)\left(1-M\sum_{k=1}^{m}|c_k|\right)}\int_0^{t_k}(t_k-s)^{q-1}\left[\left\|Bu_{x^r}(s)\right\|+\left\|f(s,x^r(s))\right\|\right]\mathrm{d}s\\&\quad+\frac{Mq}{\Gamma(1+q)}\int_0^b(b-s)^{q-1}\left[\left\|Bu_{x^r}(s)\right\|+\left\|f(s,x^r(s))\right\|\right]\mathrm{d}s\end{aligned}$$

$$\leq \frac{b^q M^2 \sum_{k=1}^{m}|c_k|}{\Gamma(1+q)\left(1-M\sum_{k=1}^{m}|c_k|\right)}\left(M_B L_W \|x_1\| + l_1 l_2 q M L_W M_B \|m\|_{L^{\frac{1}{q_1}}}\right)$$
$$+\frac{qM^2 \sum_{k=1}^{m}|c_k|}{\Gamma(1+q)\left(1-M\sum_{k=1}^{m}|c_K|\right)} l_2 \|m\|_{L^{\frac{1}{q_1}}} + \frac{Mq}{\Gamma(1+q)} l_2 \|m\|_{L^{\frac{1}{q_1}}}$$
$$+\frac{Mb^q}{\Gamma(1+q)}\left(M_B L_W \|x_1\| + l_1 l_2 q M L_W M_B \|m\|_{L^{\frac{1}{q_1}}}\right)$$
$$\leq l_1 M M_B L_W b^q \|x_1\| + l_1 l_2 q M \left(q l_1 M M_B L_W + 1\right)\|m\|_{L^{\frac{1}{q_1}}}.$$

两边同时除以 r，并令 $r \to \infty$，得

$$1 \leq l_1 l_2 q M \sigma \left(q l_1 M M_B L_W + 1\right),$$

这与(3.1)式矛盾。因此，$\exists r > 0$，使得 $G(B_r) \subseteq B_r$。

第 2 步，证明 $G: B_r \to B_r$ 连续。

设 $\{x^n\} \subset B_r$ 满足 $x^n \to x$。由(H2) (1)和(2)及 Lebesgue 控制收敛定理，有

$$\int_0^t (t-s)^{q-1}\left\|f\left(s,x^n(s)\right)-f\left(s,x(s)\right)\right\|\mathrm{d}s \to 0,\ t \in J,\ n \to \infty.$$

因此，

$$\left\|u_{x^n}(s)-u_x(s)\right\|$$
$$=\Big\|W^{-1}\Big[x_1-\widehat{T}_q(b)\sum_{k=1}^{m}c_k P\int_0^{t_k}(t_k-s)^{q-1}T_q(t_k-s)f\left(s,x^n(s)\right)\mathrm{d}s-\int_0^b(b-s)^{q-1}T_q(b-s)f\left(s,x^n(s)\right)\mathrm{d}s\Big]$$
$$-W^{-1}\Big[x_1-\widehat{T}_q(b)\sum_{k=1}^{m}c_k P\int_0^{t_k}(t_k-s)^{q-1}T_q(t_k-s)f\left(s,x(s)\right)\mathrm{d}s-\int_0^b(b-s)^{q-1}T_q(b-s)f\left(s,x(s)\right)\mathrm{d}s\Big]\Big\|$$
$$\leq\left\|W^{-1}\widehat{T}_q(b)\sum_{k=1}^{m}c_k P\int_0^{t_k}(t_k-s)^{q-1}T_q(t_k-s)\left[f\left(s,x^n(s)\right)-f\left(s,x(s)\right)\right]\mathrm{d}s\right\|$$
$$+\left\|W^{-1}\int_0^b(b-s)^{q-1}T_q(b-s)\left[f\left(s,x^n(s)\right)-f\left(s,x(s)\right)\right]\mathrm{d}s\right\|$$
$$\leq\frac{L_W qM^2\sum_{k=1}^{m}|c_k|}{\Gamma(1+q)\left(1-M\sum_{k=1}^{m}|c_k|\right)}\int_0^{t_k}(t_k-s)^{q-1}\left\|f\left(s,x^n(s)\right)-f\left(s,x(s)\right)\right\|\mathrm{d}s$$
$$+\frac{L_W Mq}{\Gamma(1+q)}\int_0^b(b-s)^{q-1}\left\|f\left(s,x^n(s)\right)-f\left(s,x(s)\right)\right\|\mathrm{d}s$$
$$\to 0.$$

因此，由算子 G 的定义，有

$$\left\|\left(Gx^n\right)(t)-(Gx)(t)\right\|$$
$$=\Big\|\sum_{k=1}^{m}c_k\widehat{T}_q(t)P\int_0^{t_k}(t_k-s)^{q-1}T_q(t_k-s)\left[Bu_{x^n}(s)+f\left(s,x^n(s)\right)\right]\mathrm{d}s$$
$$+\int_0^t(t-s)^{q-1}T_q(t-s)\left[Bu_{x^n}(s)+f\left(s,x^n(s)\right)\right]\mathrm{d}s$$
$$-\sum_{k=1}^{m}c_k\widehat{T}_q(t)P\int_0^{t_k}(t_k-s)^{q-1}T_q(t_k-s)\left[Bu_x(s)+f\left(s,x(s)\right)\right]\mathrm{d}s$$
$$-\int_0^t(t-s)^{q-1}T_q(t-s)\left[Bu_x(s)+f\left(s,x(s)\right)\right]\mathrm{d}s\Big\|$$

$$
\begin{aligned}
&\le \frac{qM^2\sum_{k=1}^{m}|c_k|}{\Gamma(1+q)\left(1-M\sum_{k=1}^{m}|c_k|\right)}\int_0^{t_k}(t_k-s)^{q-1}\left\|Bu_{x^n}(s)-Bu_x(s)\right\|\mathrm{d}s \\
&+\frac{Mq}{\Gamma(1+q)}\int_0^{b}(b-s)^{q-1}\left\|Bu_{x^n}(s)-Bu_x(s)\right\|\mathrm{d}s \\
&\le \frac{qM^2M_B\sum_{k=1}^{m}|c_k|}{\Gamma(1+q)\left(1-M\sum_{k=1}^{m}|c_k|\right)}\int_0^{t_k}(t_k-s)^{q-1}\left\|u_{x^n}(s)-u_x(s)\right\|\mathrm{d}s \\
&+\frac{M_BMq}{\Gamma(1+q)}\int_0^{b}(b-s)^{q-1}\left\|u_{x^n}(s)-u_x(s)\right\|\mathrm{d}s \\
&\to 0.
\end{aligned}
$$

所以，$G:B_r\to B_r$ 连续。

第 3 步，证明 $G(B_r)$ 在 J 上等度连续。

取 $t_1,t_2\in J,t_1<t_2$。对 $\forall x\in B_r$，及 $\forall\varepsilon\in(0,t_1)$，有

$$
\begin{aligned}
&\left\|(Gx)(t_2)-(Gx)(t_1)\right\| \\
&=\Big\|\sum_{k=1}^{m}c_k\widehat{T}_q(t_2)P\int_0^{t_k}(t_k-s)^{q-1}T_q(t_k-s)\left[Bu(s)+f(s,x(s))\right]\mathrm{d}s \\
&+\int_0^{t_2}(t_2-s)^{q-1}T_q(t_2-s)\left[Bu(s)+f(s,x(s))\right]\mathrm{d}s \\
&-\sum_{k=1}^{m}c_k\widehat{T}_q(t)P\int_0^{t_k}(t_k-s)^{q-1}T_q(t_k-s)\left[Bu(s)+f(s,x(s))\right]\mathrm{d}s \\
&-\int_0^{t_1}(t_1-s)^{q-1}T_q(t_1-s)\left[Bu(s)+f(s,x(s))\right]\mathrm{d}s\Big\| \\
&\le\left\|\left[\widehat{T}_q(t_2)-\widehat{T}_q(t_1)\right]\sum_{k=1}^{m}c_kP\int_0^{t_k}(t_k-s)^{q-1}T_q(t_k-s)\left[Bu(s)+f(s,x(s))\right]\mathrm{d}s\right\| \\
&+\left\|\int_0^{t_1}(t_2-s)^{q-1}T_q(t_2-s)\left[Bu(s)+f(s,x(s))\right]\mathrm{d}s\right\| \\
&+\left\|\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{q-1}T_q(t_2-s)\left[Bu(s)+f(s,x(s))\right]\mathrm{d}s\right\| \\
&+\left\|\int_0^{t_1}(t_1-s)^{q-1}T_q(t_1-s)\left[Bu(s)+f(s,x(s))\right]\mathrm{d}s\right\| \\
&\le\left\|\left[\widehat{T}_q(t_2)-\widehat{T}_q(t_1)\right]\sum_{k=1}^{m}c_kP\int_0^{t_k}(t_k-s)^{q-1}T_q(t_k-s)\left[Bu(s)+f(s,x(s))\right]\mathrm{d}s\right\| \\
&+\left\|\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{q-1}T_q(t_2-s)\left[Bu(s)+f(s,x(s))\right]\mathrm{d}s\right\| \\
&+\left\|\int_0^{t_1}(t_2-s)^{q-1}T_q(t_2-s)\left[Bu(s)+f(s,x(s))\right]\mathrm{d}s\right\| \\
&-\left\|\int_0^{t_1}(t_1-s)^{q-1}T_q(t_2-s)\left[Bu(s)+f(s,x(s))\right]\mathrm{d}s\right\| \\
&+\left\|\int_0^{t_1}(t_1-s)^{q-1}T_q(t_2-s)\left[Bu(s)+f(s,x(s))\right]\mathrm{d}s\right\| \\
&+\left\|\int_0^{t_1}(t_1-s)^{q-1}T_q(t_1-s)\left[Bu(s)+f(s,x(s))\right]\mathrm{d}s\right\|
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}&\le\left\|\left[\widehat{T}_q(t_2)-\widehat{T}_q(t_1)\right]\sum_{k=1}^{m}c_kP\int_0^{t_k}(t_k-s)^{q-1}T_q(t_k-s)\left[Bu(s)+f(s,x(s))\right]\mathrm{d}s\right\|\\&\quad+\left\|\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{q-1}T_q(t_2-s)\left[Bu(s)+f(s,x(s))\right]\mathrm{d}s\right\|\\&\quad+\left\|\int_0^{t_1}\left[(t_2-s)^{q-1}-(t_1-s)^{q-1}\right]T_q(t_2-s)\left[Bu(s)+f(s,x(s))\right]\mathrm{d}s\right\|\\&\quad+\left\|\int_0^{t_1}(t_1-s)^{q-1}\left[T_q(t_2-s)-T_q(t_1-s)\right]\left[Bu(s)+f(s,x(s))\right]\mathrm{d}s\right\|\\&:=I_1+I_2+I_3+I_4.\end{aligned}$$

由引理 2 可知，当 $t_2\to t_1$ 时，$\widehat{T}_q(t_2)-\widehat{T}_q(t_1)\to 0$，即 $I_1\to 0$。

$$\begin{aligned}I_2&\le\frac{Mq}{\Gamma(1+q)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{q-1}\left[M_BL_W\|x_1\|+l_1qML_WM_B\frac{b^{q-q_1}}{(1+a)^{1-q_1}}\|m\|_{L^{\frac{1}{q_1}}}+\|m(t)\|\right]\mathrm{d}s\\&\le\frac{Mq}{\Gamma(1+q)}\left[M_BL_W\|x_1\|+l_1qML_WM_Bl_2\|m\|_{L^{\frac{1}{q_1}}}\right](t_2-t_1)^q+\frac{Mq}{\Gamma(1+q)}\frac{(t_2-t_1)^q}{(1+a)^{1-q_1}}\|m\|_{L^{\frac{1}{q_1}}}.\end{aligned}$$

当 $t_2-t_1\to 0$ 时，$I_2\to 0$。

$$\begin{aligned}I_3&\le\frac{Mq}{\Gamma(1+q)}\left[M_BL_W\|x_1\|+l_1l_2qML_WM_B\|m\|_{L^{\frac{1}{q_1}}}\right]\int_0^{t_1}\left[(t_2-s)^{q-1}-(t_1-s)^{q-1}\right]\mathrm{d}s\\&\quad+\frac{Mq}{\Gamma(1+q)}\int_0^{t_1}\left[(t_2-s)^{q-1}-(t_1-s)^{q-1}\right]m(t)\mathrm{d}s\\&\le\frac{Mq}{\Gamma(1+q)}\left[M_BL_W\|x_1\|+l_1l_2qML_WM_B\|m\|_{L^{\frac{1}{q_1}}}\right]\int_0^{t_1}\left[(t_2-s)^{q-1}-(t_1-s)^{q-1}\right]\mathrm{d}s\\&\quad+\frac{Mq}{\Gamma(1+q)}\|m\|_{L^{\frac{1}{q_1}}}\left(\int_0^{t_1}\left|(t_2-s)^{q-1}-(t_1-s)^{q-1}\right|^{\frac{1}{1-q_1}}\mathrm{d}s\right)^{1-q_1}.\end{aligned}$$

当 $t_2-t_1\to 0$ 时，$I_3\to 0$。

对 I_4，由引理 2(3)可知，对 $\forall t>0$，$T_q(t)$ 是等度连续算子，当 $t_2-t_1\to 0$ 且 $\varepsilon\to 0$ 时，有

$$\begin{aligned}I_4&\le\left\|\int_0^{t_1-\varepsilon}(t_1-s)^{q-1}\left[T_q(t_2-s)-T_q(t_1-s)\right]\left[Bu(s)+f(s,x(s))\right]\mathrm{d}s\right\|\\&\quad+\left\|\int_{t_1-\varepsilon}^{t_1}(t_1-s)^{q-1}\left[T_q(t_2-s)-T_q(t_1-s)\right]\left[Bu(s)+f(s,x(s))\right]\mathrm{d}s\right\|\\&\le\sup_{s\in[0,t_1-\varepsilon]}\left\|T_q(t_2-s)-T_q(t_1-s)\right\|\int_0^{t_1-\varepsilon}(t_1-s)^{q-1}\left\|Bu(s)+f(s,x(s))\right\|\mathrm{d}s\\&\quad+\frac{2Mq}{\Gamma(1+q)}\int_{t_1-\varepsilon}^{t_1}(t_1-s)^{q-1}\left\|Bu(s)+f(s,x(s))\right\|\mathrm{d}s\\&\to 0.\end{aligned}$$

所以，$\|(Gx)(t_2)-(Gx)(t_1)\|\le I_1+I_2+I_3+I_4\to 0$，即 $G(B_r)$ 在 J 上等度连续。

第 4 步，证明由(3.2)式定义的函数 $G:B_r\to B_r$ 满足 M 不动点条件。为此，我们设 $W\subseteq B_r$ 可数，其中 $W\subseteq\overline{co}(\{0\}\cup G(W))$，仅证明 W 相对紧即可。

我们用 ϕ 定义 B_r 中的非紧性测度如下：

$$\phi(\Omega)=\max_{E\in\Delta(\Omega)}\left(\alpha(E),mod_c(E)\right),\tag{3.4}$$

其中，Ω 是 B_r 的所有有界集，$\Delta(\Omega)$ 是 Ω 的可数子集的集合。α 是实的非紧性测度，且

$$\alpha(E)=\sup_{t\in[0,b]} \mathrm{e}^{-Lt}\beta(E(t)),$$

其中，$E(t)=\{x(t):x\in E\}$，L 是我们选取的适当的一个常数。$mod_c(E)$ 是函数集 E 的等度连续模，且

$$mod_c(E)=\lim_{\delta\to 0}\sup_{x\in E}\max_{\|t_1-t_2\|<\delta}\|x(t_1)-x(t_2)\|, t_1,t_2\in J.$$

在文献[11]中证明了 ϕ 是有意义的，即存在 $E_0\in\Delta(\Omega)$，使得(3.4)式在 E_0 处达到最大值，并且 ϕ 是一个单调非奇异正则的非紧性测度。

对于(3.2)式定义的 Gx，由 ϕ 的正则性，只需证明 $\phi(W)=(0,0)$。因此 $\phi(G(W))$ 是一个最大值。

$$\begin{aligned}
&mod_c(W)=\lim_{\delta\to 0}\sup_{x\in E}\max_{\|t_1-t_2\|<\delta}\|x(t_1)-x(t_2)\| \\
&=\lim_{\delta\to 0}\sup_{x\in E}\max_{\|t_1-t_2\|<\delta}\Big\|\sum_{k=1}^{m}c_k\widehat{T}_q(t_2)P\int_0^{t_k}(t_k-s)^{q-1}T_q(t_k-s)\big[Bu(s)+f(s,x(s))\big]\mathrm{d}s \\
&\quad+\int_0^{t_2}(t_2-s)^{q-1}T_q(t_2-s)\big[Bu(s)+f(s,x(s))\big]\mathrm{d}s \\
&\quad-\sum_{k=1}^{m}c_k\widehat{T}_q(t_1)P\int_0^{t_k}(t_k-s)^{q-1}T_q(t_k-s)\big[Bu(s)+f(s,x(s))\big]\mathrm{d}s \\
&\quad-\int_0^{t_1}(t_1-s)^{q-1}T_q(t_1-s)\big[Bu(s)+f(s,x(s))\big]\mathrm{d}s\Big\| \\
&\le\lim_{\delta\to 0}\sup_{x\in E}\max_{\|t_1-t_2\|<\delta}\Big(\Big\|\big[\widehat{T}_q(t_2)-\widehat{T}_q(t_1)\big]\sum_{k=1}^{m}c_kP\int_0^{t_k}(t_k-s)^{q-1}T_q(t_k-s)\big[Bu(s)+f(s,x(s))\big]\mathrm{d}s\Big\| \\
&\quad+\Big\|\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{q-1}T_q(t_2-s)\big[Bu(s)+f(s,x(s))\big]\mathrm{d}s\Big\| \\
&\quad+\Big\|\int_0^{t_1}\big[(t_2-s)^{q-1}-(t_1-s)^{q-1}\big]T_q(t_2-s)\big[Bu(s)+f(s,x(s))\big]\mathrm{d}s\Big\| \\
&\quad+\Big\|\int_0^{t_1}(t_1-s)^{q-1}\big[T_q(t_2-s)-T_q(t_1-s)\big]\big[Bu(s)+f(s,x(s))\big]\mathrm{d}s\Big\|\Big) \\
&:=\lim_{\delta\to 0}\sup_{x\in E}\max_{\|t_1-t_2\|<\delta}(I_1+I_2+I_3+I_4).
\end{aligned}$$

由第 3 步的证明易知当 $\|t_1-t_2\|<\delta$ 且 $\varepsilon\to 0$ 时，$I_1\to 0, I_2\to 0, I_3\to 0, I_4\to 0$。所以 $mod_c(W)=0$。

设 $\{z^n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq G(W)$ 是 ϕ 取得最大值的可数值，那么存在集合 $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq W$，使得

$$z^n(t)=(Gx^n)(t), n\ge 1, t\in J. \tag{3.5}$$

因为

$$\begin{aligned}
&\beta\left(\{u_{x^n}(s)\}_{n=1}^{\infty}\right) \\
&=\beta\Big(W^{-1}\Big[x_1-\widehat{T}_q(b)\sum_{k=1}^{m}c_kP\int_0^{t_k}(t_k-s)^{q-1}T_q(t_k-s)\{f(s,x^n(s))\}_{n=1}^{\infty}\mathrm{d}s \\
&\quad-\int_0^{b}(b-s)^{q-1}T_q(b-s)\{f(s,x^n(s))\}_{n=1}^{\infty}\mathrm{d}s\Big]\Big) \\
&\le L'\beta\Bigg(\frac{qM\sum_{k=1}^{m}|c_k|}{\Gamma(1+q)\left(1-M\sum_{k=1}^{m}|c_k|\right)}\int_0^{t_k}(t_k-s)^{q-1}\{f(s,x^n(s))\}_{n=1}^{\infty}\mathrm{d}s \\
&\quad-\frac{Mq}{\Gamma(1+q)}\int_0^{b}(b-s)^{q-1}\{f(s,x^n(s))\}_{n=1}^{\infty}\mathrm{d}s\Bigg)
\end{aligned}$$

$$\le L'\left[\frac{qM\sum_{k=1}^{m}|c_k|}{\Gamma(1+q)\left(1-M\sum_{k=1}^{m}|c_k|\right)}\frac{b^{q-q_1}}{(1+a)^{1-q_1}}\beta\left(\int_0^{t_k}(t_k-s)^{q-1}\left\{f\left(s,x^n(s)\right)\right\}_{n=1}^{\infty}\mathrm{d}s\right)\right.$$

$$\left.+\frac{Mq}{\Gamma(1+q)}\frac{b^{q-q_1}}{(1+a)^{1-q_1}}\beta\left(\int_0^{b}(b-s)^{q-1}\left\{f\left(s,x^n(s)\right)\right\}_{n=1}^{\infty}\mathrm{d}s\right)\right]$$

$$\le\frac{qML'}{\Gamma(1+q)\left(1-M\sum_{k=1}^{m}|c_k|\right)}\frac{b^{q-q_1}}{(1+a)^{1-q_1}}\cdot 2\int_0^{b}\beta\left(\left\{f\left(s,x^n(s)\right)\right\}_{n=1}^{\infty}\right)\mathrm{d}s$$

$$\le\frac{2qML'L}{\Gamma(1+q)\left(1-M\sum_{k=1}^{m}|c_k|\right)}\frac{b^{q-q_1}}{(1+a)^{1-q_1}}\int_0^{b}\beta\left(\left\{x^n(s)\right\}_{n=1}^{\infty}\right)\mathrm{d}s.$$

所以，由算子 G 的定义，有

$$\beta\left(\left\{\left(Gx^n\right)(t)\right\}_{n=1}^{\infty}\right)$$

$$=\beta\left(\sum_{k=1}^{m}c_k\widehat{T_q}(t)P\int_0^{t_k}(t_k-s)^{q-1}T_q(t_k-s)\left[\left\{Bu_{x^n}(s)\right\}_{n=1}^{\infty}+\left\{f\left(s,x^n(s)\right)\right\}_{n=1}^{\infty}\right]\mathrm{d}s\right.$$

$$\left.+\int_0^{b}(b-s)^{q-1}T_q(b-s)\left[\left\{Bu_{x^n}(s)\right\}_{n=1}^{\infty}+\left\{f\left(s,x^n(s)\right)\right\}_{n=1}^{\infty}\right]\mathrm{d}s\right)$$

$$\le\frac{2qM^2\sum_{k=1}^{m}|c_k|}{\Gamma(1+q)\left(1-M\sum_{k=1}^{m}|c_k|\right)}\left[\int_0^{t_k}(t_k-s)^{q-1}\beta\left(\left\{Bu_{x^n}(s)\right\}_{n=1}^{\infty}+\left\{f\left(s,x^n(s)\right)\right\}_{n=1}^{\infty}\right)\mathrm{d}s\right]$$

$$+\frac{2Mq}{\Gamma(1+q)}\left[\int_0^{b}(b-s)^{q-1}\beta\left(\left\{Bu_{x^n}(s)\right\}_{n=1}^{\infty}+\left\{f\left(s,x^n(s)\right)\right\}_{n=1}^{\infty}\right)\mathrm{d}s\right]$$

$$\le\left[\frac{2qM^2\sum_{k=1}^{m}|c_k|}{\Gamma(1+q)\left(1-M\sum_{k=1}^{m}|c_k|\right)}+\frac{2Mq}{\Gamma(1+q)}\right]\left[2qML'LM_Bl_2^2\int_0^{b}\beta\left(\left\{x^n(s)\right\}_{n=1}^{\infty}\right)\mathrm{d}s+Ll_2\int_0^{b}\beta\left(\left\{x^n(s)\right\}_{n=1}^{\infty}\right)\mathrm{d}s\right]$$

$$\le\left[2qMLl_1l_2\left(2qML'M_Bl_1l_2+1\right)\right]\int_0^{t}\beta\left(\left\{x^n(s)\right\}_{n=1}^{\infty}\right)\mathrm{d}s$$

$$\le\left[2qMLl_1l_2\left(2qML'M_Bl_1l_2+1\right)\right]\int_0^{t}\mathrm{e}^{Rs}\left(\mathrm{e}^{-Rs}\beta\left(\left\{x^n(s)\right\}_{n=1}^{\infty}\right)\right)\mathrm{d}s$$

$$=\left[2qMLl_1l_2\left(2qML'M_Bl_1l_2+1\right)\right]\alpha\left(\left\{x^n\right\}_{n=1}^{\infty}\right)\int_0^{t}\mathrm{e}^{Rs}\mathrm{d}s,\ t\in J.$$

现在我们给出 $\alpha\left(\left\{z^n\right\}_{n=1}^{\infty}\right)$ 的一个估计：

$$\alpha\left(\left\{z^n\right\}_{n=1}^{\infty}\right)=\sup_{t\in[0,b]}\mathrm{e}^{-Rt}\beta\left(\left\{\left(Gx^n\right)(t)\right\}_{n=1}^{\infty}\right)$$

$$\le\sup_{t\in[0,b]}\mathrm{e}^{-Rt}\left[2qMLl_1l_2\left(2qML'M_Bl_1l_2+1\right)\right]\alpha\left(\left\{x^n\right\}_{n=1}^{\infty}\right)\int_0^{t}\mathrm{e}^{Rs}\mathrm{d}s$$

$$\le\alpha\left(\left\{x^n\right\}_{n=1}^{\infty}\right)\left[2qMLl_1l_2\left(2qML'M_Bl_1l_2+1\right)\right]\sup_{t\in[0,b]}\int_0^{t}\mathrm{e}^{-R(t-s)}\mathrm{d}s$$

$$=p\alpha\left(\left\{x^n\right\}_{n=1}^{\infty}\right).$$

因此，

$$\alpha\left(\left\{x^n\right\}_{n=1}^{\infty}\right)\le\alpha(W)\le\alpha\left(\overline{co}\left(\{0\}\cup G(W)\right)\right)=\alpha\left(\left\{z^n\right\}_{n=1}^{\infty}\right)\le\alpha\left(\left\{x^n\right\}_{n=1}^{\infty}\right)p.$$

由 $p<1$ 得

$$\alpha\left(\left\{x^n\right\}_{n=1}^{\infty}\right)=\alpha(W)=\alpha\left(\left\{z^n\right\}_{n=1}^{\infty}\right)=0.$$

根据 α 定义可知，

$$\beta\left(\left\{x^n(t)\right\}_{n=1}^{\infty}\right)=0.$$

又因为

$$\begin{aligned}&\beta\left(\left\{Bu_{x^n}(t)\right\}_{n=1}^{\infty}+\left\{f\left(t,x^n(t)\right)\right\}_{n=1}^{\infty}\right)\\&\le\frac{2qMLL'}{\Gamma(1+q)\left(1-M\sum_{k=1}^{m}|c_k|\right)}\frac{b^{q-q_1}}{(1+a)^{1-q_1}}\int_0^b\beta\left(\left\{x^n(t)\right\}_{n=1}^{\infty}\right)\mathrm{d}t+L\int_0^b\beta\left(\left\{x^n(t)\right\}_{n=1}^{\infty}\right)\mathrm{d}t\\&=0.\end{aligned}$$

所以，$\left\{Bu_{x^n}(t)+f\left(t,x^n(t)\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ 在 X 中对几乎所有 $t\in J$ 相对紧。再由(H2) (2)和(3.3)式，易知 $\left\{Bu_{x^n}(t)+f\left(t,x^n(t)\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ 对几乎处处 $t\in[0,b]$ 是一致可积的。所以根据定义 4，$\left\{Bu_{x^n}+f\left(\cdot,x^n(\cdot)\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ 是半紧的。由引理 6 可知，$G\left(\left\{x^n\right\}_{n=1}^{\infty}\right)$ 在 B_r 中相对紧。通过(3.5)式得，$\left\{z^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ 在 B_r 中也相对紧。因为 ϕ 是单调非奇异正则的非紧性测度，根据 Mönch 不动点的条件，所以

$$\phi(W)\le\phi\left(\overline{co}\left(\{0\}\cup G(W)\right)\right)=\phi\left(\left\{z^n\right\}_{n=1}^{\infty}\right)=0.$$

故 W 在 B_r 中相对紧。

4. 例子

例 1 设 $X=U:=C([0,1])$。考虑分数阶发展方程非局部问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^{\frac{1}{2}}}{\partial t^{\frac{1}{2}}}x(t,z)+\dfrac{\partial x(t,z)}{\partial t}=\dfrac{\mathrm{e}^{-2t}}{1+\mathrm{e}^{t}}x(t,z)+\lambda\mu(t,z),\ t\in[0,b]=J,\ z\in(0,1),\\ x(t,0)=x(t,1)=0,\ t\in J,\\ x(0,z)=\sum_{k=1}^{m}\arctan\dfrac{1}{2k^2}x(k,z),\ z\in(0,1),\end{cases}\tag{4.1}$$

其中 $\lambda>0,\ 0<m<b,\ \mu:J\times(0,1)\to(0,1)$。

定义算子 $A:D(A)\subset X\to X$ 如下：

$$D(A)=\left\{x\in X:x'\in X,x(0)=x(1)=0\right\}.$$

$$Ax=-x',\ x\in D(A),$$

则 A 生成 X 中的等度连续半群 $\{T(t)\}_{t\ge0}$，且对任意的 $x\in X$，$T(t)$ 满足

$$T(t)x(s)=x(t+s),$$

那么 $T(t)(t\ge 0)$ 在 X 中非紧，并且有 $\sup_{t\in J}\|T(t)\|\le 1$。

定义 $x(t)(z)=x(t,z)$; $f(t,x(t))=\frac{e^{-2t}}{1+e^{t}}x(t,z)$; $u(t)(z)=\mu(t,z)$; $c_k=\arctan\frac{1}{2k^2}$。对 $\forall x\in B_r:=\left\{x\in C(J,X):\|x\|_{C(J,X)}\le r\right\},t\in J$，有

$$\|f(t,x)\|\le\left\|\frac{e^{-2t}}{1+e^{t}}x(t,z)\right\|\le\frac{r}{e^{2t}(1+e^{t})}\le\frac{1}{2},$$

则条件(H2)成立。

又因为 $\sum_{k=1}^{m}|c_k|\le\sum_{k=1}^{m}\arctan\frac{1}{2k^2}=\frac{\pi}{4}<1$，所以条件(H0)成立。

定义算子 W 如下

$$(Wt)(z)=\widehat{T}_q(b)\sum_{k=1}^{m}\arctan\frac{1}{2k^2}\left[I-\sum_{k=1}^{m}\arctan\frac{1}{2k^2}\widehat{T}_q(t_k)\right]^{-1}\int_0^k(k-s)^{-\frac{1}{2}}T_q(k-s)\lambda\mu(s,z)ds$$
$$+\int_0^b(b-s)^{-\frac{1}{2}}T_q(b-s)\lambda\mu(s,z)ds.$$

$\left\{\widehat{T}_q(t)\right\}_{t\ge 0}$ 与 $\left\{T_q(t)\right\}_{t\ge 0}$ 定义如下：

$$\widehat{T}_q(t)x(s)=\int_0^\infty\eta_{\frac{1}{2}}(\theta)x\left(t^{\frac{1}{2}}\theta+s\right)d\theta,$$

$$T_q(t)x(s)=\frac{1}{2}\int_0^\infty\theta\eta_{\frac{1}{2}}(\theta)x\left(t^{\frac{1}{2}}\theta+s\right)ds,$$

其中 $\eta_{\frac{1}{2}}(\theta)=2\theta^{-3}W_{\frac{1}{2}}\left(\theta^{-\frac{1}{2}}\right),W_{\frac{1}{2}}(\theta)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\theta^{-\frac{n}{2}-1}\frac{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)}{n!}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right),\theta\in(0,\infty)$。

我们假设 W 满足条件(H4)，且不等式条件(H5)和(3.1)式成立，则由定理 3.1 可知，分数阶发展系统(4.1)在 J 上精确可控。

基金项目

国家基金委青年科学资助项目(12061062)。

参考文献

[1] Agarwal, R., Benchohra, M. and Slimani, B. (2008) Existence Results for Differential Equations with Fractional Order and Impulses. *Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics*, **44**, 1-21.

[2] Byszewski, L. (1991) Theorems about the Existence and Uniqueness of Solutions of a Semi Linear Evolution Nonlocal Cauchy Problem. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **162**, 494-505. https://doi.org/10.1016/0022-247X(91)90164-U

[3] Chen, P. and Li, Y. (2014) Existence and Uniqueness of Strong Solutions for Nonlocal Evolution Equations. *Electronic Journal of Differential Equations*, No. 18, 1-9.

[4] Deng, K. (1993) Exponential Decay of Solutions of Semilinear Parabolic Equations with Nonlocal Initial Conditions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **179**, 630-637. https://doi.org/10.1006/jmaa.1993.1373

[5] Ji, S., Li, G. and Wang, M. (2011) Controllability of Impulsive Differential Systems with Nonlocal Conditions. *Applied Mathematics and Computation*, **217**, 6981-6989. https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.01.107

[6] Nashine, H.K., Yang, H. and Agarwal, R.P. (2018) Fractional Evolution Equations with Nonlocal Conditions in Par-

tially Ordered Banach Space. *Carpathian Journal of Mathematics*, **34**, 379-390.

[7] Zhang, X.P., Chen, P.Y., Abdelmonem, A. and Li, Y.X. (2018) Fractional Stochastic Evolution Equations with Nonlocal Initial Conditions and Noncompact Semigroups. *Stochastics*, **90**, 1005-1022. https://doi.org/10.1080/17442508.2018.1466885

[8] Zhang, X.P., Gou, H.D. and Li, Y.X. (2019) Existence Results of Mild Solutions for Impulsive Fractional Integrodifferential Evolution Equations with Nonlocal Conditions. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, **20**, 1-16. https://doi.org/10.1515/ijnsns-2017-0166

[9] Liang, J. and Yang, H. (2015) Controllability of Fractional Integro-Differential Evolution Equations with Nonlocal Conditions. *Applied Mathematics and Computation*, **254**, 20-29. https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.12.145

[10] Chen, P., Zhang, X. and Li, Y. (2020) Existence and Approximate Controllability of Fractional Evolution Equations with Nonlocal Conditions via Resolvent Operators. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, **23**, 268-291. https://doi.org/10.1515/fca-2020-0011

[11] Kamenskii, M., Obukhovskii, V. and Zecca, P. (2001) Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces. De Gruyter, New York. https://doi.org/10.1515/9783110870893

[12] Zhou, Y. and Feng, J. (2010) Existence of Mild Solutions for Fractional Neutral Evolution Equations. *Computers & Mathematics with Applications*, **59**, 1063-1077. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2009.06.026

[13] Sakthivel, R., Mahmudov, N.I. and Nieto, J.J. (2012) Controllability of a Class of Fractional Order Nonlinear Neutral Functional Differential Equations. *Applied Mathematics and Computation*, **218**, 10334-10340. https://doi.org/10.1016/j.amc.2012.03.093

[14] 郭大钧, 孙经先. 抽象空间常微分方程[M]. 济南: 山东科学技术出版社, 1998.

[15] Pazy, A. (1983) Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. Springer-Verlag, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5561-1

[16] Heinz, H.P. (1983) On the Behaviour of Measures of Noncompactness with Respect to Differentiation and Integration of Vector Valued Functions. *Nonlinear Analysis*, **7**, 1351-1371. https://doi.org/10.1016/0362-546X(83)90006-8

[17] Monch, H. (1980) Boundary Value Problems for Nonlinear Ordinary Differential Equations of Second Order in Banach Spaces. *Nonlinear Analysis*, **4**, 985-999. https://doi.org/10.1016/0362-546X(80)90010-3