Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(5), 687-693
Published Online May 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.125079

形式三角矩阵环上的余挠三元组

曹家乐，杨晓燕*

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2022年4月11日；录用日期：2022年5月12日；发布日期：2022年5月20日

摘 要

本文研究了形式三角矩阵环上的余挠三元组的问题. 设 $T = \begin{pmatrix} A & 0 \\ U & B \end{pmatrix}$ 是形式三角矩阵环, 其中 A 和 B 是环, U 是左 B-右 A-双模. 本文利用 A-模上完备(完全)遗传的余挠三元组 $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3)$ 和 B-模上完备(完全)遗传的余挠三元组 $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3)$ 构造了形式三角矩阵环 T 上的完备(完全)遗传的余挠三元组 $(\mathfrak{B}^{\mathcal{C}_1}_{\mathcal{D}_1}, \mathfrak{U}^{\mathcal{C}_2}_{\mathcal{D}_2}, \mathfrak{I}^{\mathcal{C}_3}_{\mathcal{D}_3})$.

关键词

形式三角矩阵环，余挠对，余挠三元组

Cotorsion Triples over Formal Triangular Matrix Rings

Jiale Cao, Xiaoyan Yang*

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Apr. 11^{th}, 2022; accepted: May 12^{th}, 2022; published: May 20^{th}, 2022

Abstract

This paper consider cotorsion triples over formal triangular matrix rings. Let $T =$

* 通讯作者。

文章引用: 曹家乐, 杨晓燕. 形式三角矩阵环上的余挠三元组[J]. 理论数学, 2022, 12(5): 687-693.
DOI: 10.12677/pm.2022.125079

$\begin{pmatrix} A & 0 \\ U & B \end{pmatrix}$ **be formal triangular matrix ring, where** A **and** B **are two rings and** U **is a** (B, A)**-bimodule. In this paper, we use a complete (resp. perfect) hereditary cotorsion triple** $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3)$ **over** A **and a complete (resp. perfect) hereditary cotorsion triple** $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3)$ **over** B **to construct a complete (resp. perfect) hereditary cotorsion triple** $(\mathfrak{B}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1}, \mathfrak{U}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2}, \mathfrak{J}_{\mathcal{D}_3}^{\mathcal{C}_3})$ **over** T**.**

Keywords

Formal Triangular Matrix Ring, Cotorsion Pair, Cotorsion Triple

1. 引言

余挠理论由 Salce 在 Abel 群范畴和模的近似理论的研究中提出, 此后余挠理论得到了广泛的研究, 其中余挠对的完备性在相对同调代数的研究中起来至关重要的作用. Estrada 等在文献 [1]中利用 quiver 表示方法研究了余挠对和余挠三元组之间的联系, 在这样做的过程中, 他们发现了 Abel 范畴中的一个新的特征, 当存在完备遗传的余挠三元组时, 在 Abel 范畴中就有足够的投射和内射对象. 2019 年, Ren 在文献 [2] 中给出了余挠三元组的相关应用, 并由一个完备余挠三元组分别诱导了一个投射和内射的模型结构, 同时得到了这两种模型结构之间相应的等价关系.

形式三角矩阵环是一类重要的非交换环, 近年来, 许多学者对形式三角矩阵环进行了研究. 设 $\mathcal{C}_1$ 和 $\mathcal{C}_2$ 是两个左 A-模类, $\mathcal{D}_1$ 和 $\mathcal{D}_2$ 是两个左 B-模类. 2020 年, Mao 在文献 [3]中研究了形式三角矩阵环上的余挠对, 证明了 (1) 若对任意 $i \geq 1$, 有 $\mathrm{Tor}_i^A(U, \mathcal{C}_1) = 0$ 且 $\mathrm{Tor}_i^A(U, {}^{\perp}\mathcal{C}_2) = 0$, 则 $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ 和 $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ 是余挠对当且仅当 $(\mathfrak{B}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1}, \mathfrak{U}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2})$ 是余挠对. (2) 若对任意 $i \geq 1$, 有 $\mathrm{Ext}_B^i(U, \mathcal{D}_1^{\perp}) = 0$ 且 $\mathrm{Ext}_B^i(U, \mathcal{D}_2) = 0$, 则 $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ 和 $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ 是余挠对当且仅当 $(\mathfrak{U}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1}, \mathfrak{J}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2})$ 是余挠对. 同时利用 A-模和 B -模上特殊的预包络类和预覆盖类给出了 T-模上特殊的预包络类和预覆盖类, 并且给出了 $(\mathfrak{B}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1}, \mathfrak{U}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2})$ 和 $(\mathfrak{U}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1}, \mathfrak{J}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2})$ 为 T-模上完备遗传的余挠对的充要条件. 2021 年, Xu 和 Hu 在文献 [4]中利用 Mao 在三角矩阵环上构造的两个余挠对 $(\mathfrak{B}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1}, \mathfrak{U}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2})$ 和 $(\mathfrak{U}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1}, \mathfrak{J}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2})$ 构造了形式三角矩阵环上的余挠三元组 $(\mathfrak{B}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1}, \mathfrak{U}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2}, \mathfrak{J}_{\mathcal{D}_3}^{\mathcal{C}_3})$.

受上述研究的启发, 本文进一步研究了余挠三元组 $(\mathfrak{B}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1}, \mathfrak{U}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2}, \mathfrak{J}_{\mathcal{D}_3}^{\mathcal{C}_3})$ 的性质. 首先在引理 1 中利用 A-模上余挠三元组 $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3)$ 和 B-模上余挠三元组 $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3)$ 构造了形式三角矩阵环 T

上的余挠三元组 $(\mathfrak{B}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1}, \mathfrak{U}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2}, \mathfrak{I}_{\mathcal{D}_3}^{\mathcal{C}_3})$; 其次在定理 3 中考虑了余挠三元组 $(\mathfrak{B}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1}, \mathfrak{U}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2}, \mathfrak{I}_{\mathcal{D}_3}^{\mathcal{C}_3})$ 的完备遗传性, 在推论 4 中考虑了余挠三元组 $(\mathfrak{B}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1}, \mathfrak{U}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2}, \mathfrak{I}_{\mathcal{D}_3}^{\mathcal{C}_3})$ 的完全遗传性; 最后再给出了有关余挠三元组 $(\mathfrak{B}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1}, \mathfrak{U}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2}, \mathfrak{I}_{\mathcal{D}_3}^{\mathcal{C}_3})$ 的几个推论.

2. 预备知识

设 $T = \begin{pmatrix} A & 0 \\ U & B \end{pmatrix}$ 是形式三角矩阵环, A , B 是环且 U 是 (B, A)-双模. 任意左 T-模均可用三元组 $M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi^M}$ 来表示, 其中 M_1 是左 A-模, M_2 是左 B-模, $\varphi^M : U \otimes_A M_1 \to M_2$ 是 B-模同态. 任意的两个左 T-模 $M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi^M}$ 和 $N = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix}_{\varphi^N}$ 之间的态射为 $\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$, 其中 $f_1 \colon M_1 \to N_1$ 是 A-模同态, $f_2 : M_2 \to N_2$ 是 B-模同态并且满足如下交换图:

$$\begin{tikzcd} U \otimes_A M_1 \arrow[r, "1\otimes f_1"] \arrow[d, "\varphi^M"'] & U \otimes_A N_1 \arrow[d, "\varphi^N"] \\ M_2 \arrow[r, "f_2"] & N_2 \end{tikzcd}$$

给定 T-模 $M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi^M}$, 有 $\widetilde{\varphi^M} \colon M_1 \to \mathrm{Hom}_B(U, M_2)$, 其中 $\widetilde{\varphi^M}(x)(u) = \varphi^M(u \otimes x)$, $x \in M_1$, $u \in U$.

定义1 [3]设 C 是一个左 A-模类且 D 是一个左 B-模类. 定义如下三个左 T-模类:

$$\mathfrak{U}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}} = \{ \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi^M} : M_1 \in \mathcal{C}, M_2 \in \mathcal{D} \}.$$

$$\mathfrak{B}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}} = \{ \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi^M} : M_1 \in \mathcal{C}, M_2/\mathrm{im}(\varphi^M) \in \mathcal{D}, \varphi^M \text{ 是单射} \}.$$

$$\mathfrak{I}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}} = \{ \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\widetilde{\varphi^M}} : \ker(\widetilde{\varphi^M}) \in \mathcal{C}, M_2 \in \mathcal{D}, \widetilde{\varphi^M} \text{ 是满射} \}.$$

定义2 [5]设 $\mathcal{A}$ 是一个有足够的投射和内射对象的 Abel 范畴, 称 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 为 $\mathcal{A}$ 中的余挠对, 如果满足 $\mathcal{X} = {}^{\perp}\mathcal{Y}$ 且 $\mathcal{Y} = \mathcal{X}^{\perp}$, 其中 ${}^{\perp}\mathcal{Y} = \{X \mid \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^1(X, Y) = 0, \forall\, Y \in \mathcal{Y}\}$ 且 $\mathcal{X}^{\perp} = \{Y \mid \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^1(X, Y) = 0, \forall\, X \in \mathcal{X}\}$.

称余挠对 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 是完备的, 若满足下面两个条件中的一个条件:

1) 对任意的 R-模 M , 存在正合列 $0 \longrightarrow M \longrightarrow B \longrightarrow A \longrightarrow 0$, 其中 $A \in \mathcal{X}$, $B \in \mathcal{Y}$.

2) 对任意的 R-模 M , 存在正合列 $0 \longrightarrow B' \longrightarrow A' \longrightarrow M \longrightarrow 0$, 其中 $A' \in \mathcal{X}$, $B' \in \mathcal{Y}$.

称余挠对 $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ 是遗传的, 若对任意 $i \geq 1$, $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(X,Y) = 0$, 其中 $X \in \mathcal{X}$, $Y \in \mathcal{Y}$. 等价于, 若 $0 \longrightarrow X_3 \longrightarrow X_2 \longrightarrow X_1 \longrightarrow 0$ 是正合的, $X_2, X_1 \in \mathcal{X}$, 则 $X_3 \in \mathcal{X}$; 或等价于, 若 $0 \longrightarrow Y_1 \longrightarrow Y_2 \longrightarrow Y_3 \longrightarrow 0$ 是正合的, $Y_1, Y_2 \in \mathcal{Y}$, 则 $Y_3 \in \mathcal{Y}$.

称余挠对 $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ 是完全的, 若 $\mathcal{X}$ 是覆盖类且 $\mathcal{Y}$ 是包络类.

定义3 [2] [6]称 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中的三元组 $(\mathcal{X},\mathcal{Z},\mathcal{Y})$ 为余挠三元组, 如果 $(\mathcal{X},\mathcal{Z})$ 和 $(\mathcal{Z},\mathcal{Y})$ 都为余挠对. 称余挠三元组 $(\mathcal{X},\mathcal{Z},\mathcal{Y})$ 是完备(遗传)的, 如果 $(\mathcal{X},\mathcal{Z})$ 和 $(\mathcal{Z},\mathcal{Y})$ 是两个完备(遗传)的余挠对.

称 $\mathcal{A}$ 的满子范畴 $\mathcal{C}$ 是 thick 的, 若 $\mathcal{C}$ 关于直和封闭且满足: 对 $\mathcal{A}$ 中任意正合列

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

若 A, B, C 中有两个在 $\mathcal{C}$ 中, 则第三个也在 $\mathcal{C}$ 中.

定义4 [3]设 R 是环且 $\mathcal{C}$ 是一个左 R-模类.

1) 称 $\mathcal{C}$ 是可解的, 若 $\mathcal{C}$ 关于扩张封闭, 关于满同态的核封闭且 $\mathcal{C}$ 包含所有的投射左 R-模.

2) 称 $\mathcal{C}$ 是余可解的, 若 $\mathcal{C}$ 关于扩张封闭, 关于单同态的余核封闭且 $\mathcal{C}$ 包含所有的内射左 R-模.

定义5 [5]设 R 为环, 给定模类 $\mathcal{X}$, 对左 R-模 M , 有以下三个条件:

1) 存在 $\phi : M \to X$, 其中 $X \in \mathcal{X}$:

2) 对任意 $X' \in \mathcal{X}$, 任意 $\phi' : M \to X'$ 都存在 $f : X \to X'$, 使得 $\phi' = f\phi$;

3) 如果 $f : X \to X$, 使得 $\phi = f\phi$, 则 f 为自同构.

当 1) 2) 满足时, 称 $\phi : M \to X$ 为 M 的 $\mathcal{X}$-预包络; 当 3) 也满足时, 称 $\phi : M \to X$ 为 M 的 $\mathcal{X}$-包络. 对偶地, 可定义 $\mathcal{X}$-预覆盖和 $\mathcal{X}$-覆盖.

称单态射 $\alpha : M \to X$, 其中 $X \in \mathcal{X}$ 为 M 的特殊 $\mathcal{X}$-预包络, 若对任意 $X' \in \mathcal{X}$, 有 $\mathrm{Ext}^1_R(\mathrm{coker}(\alpha), X') = 0$. 对偶地, 可定义特殊 $\mathcal{X}$-预覆盖.

3. 主要结果

引理 1 设 $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ 是三个左 A-模类, $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ 是三个左 B-模类. 假设对任意 $i \geq 1$, 有 $\mathrm{Tor}^A_i(U, \mathcal{C}_1) = 0 = \mathrm{Tor}^A_i(U, {}^{\perp}\mathcal{C}_2)$ 且 $\mathrm{Ext}^i_B(U, \mathcal{D}_2{}^{\perp}) = 0 = \mathrm{Ext}^i_B(U, \mathcal{D}_3)$. 则 $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3)$ 和 $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3)$ 是余挠三元组当且仅当 $(\mathfrak{B}^{\mathcal{C}_1}_{\mathcal{D}_1}, \mathfrak{U}^{\mathcal{C}_2}_{\mathcal{D}_2}, \mathfrak{I}^{\mathcal{C}_3}_{\mathcal{D}_3})$ 是 T-模上的余挠三元组.

证明: 要证明 $(\mathfrak{B}^{\mathcal{C}_1}_{\mathcal{D}_1}, \mathfrak{U}^{\mathcal{C}_2}_{\mathcal{D}_2}, \mathfrak{I}^{\mathcal{C}_3}_{\mathcal{D}_3})$ 为 T-模上的余挠三元组, 只需证 $(\mathfrak{B}^{\mathcal{C}_1}_{\mathcal{D}_1}, \mathfrak{U}^{\mathcal{C}_2}_{\mathcal{D}_2})$ 和 $(\mathfrak{U}^{\mathcal{C}_2}_{\mathcal{D}_2}, \mathfrak{I}^{\mathcal{C}_3}_{\mathcal{D}_3})$ 为 T-模上的两个余挠对. 因为 $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3)$ 是 A-模上的余挠三元组, $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3)$ 是 B-模上的余挠三元组, 所以 $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ 和 $(\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3)$ 为 A-模上的余挠对, $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ 和 $(\mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3)$ 为 B-模上的余挠对. 由 [3] [定

DOI: 10.12677/pm.2022.125079

理4.4(1)] 及假设知, $(\mathfrak{B}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1}, \mathfrak{U}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2})$ 为 T-模上的余挠对. 再由 [3] [定理4.4(2)] 及假设知, $(\mathfrak{U}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2}, \mathfrak{I}_{\mathcal{D}_3}^{\mathcal{C}_3})$ 为 T-模上的余挠对. 因此 $(\mathfrak{B}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1}, \mathfrak{U}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2}, \mathfrak{I}_{\mathcal{D}_3}^{\mathcal{C}_3})$ 为 T-模上的余挠三元组.

反之, 若 $(\mathfrak{B}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1}, \mathfrak{U}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2}, \mathfrak{I}_{\mathcal{D}_3}^{\mathcal{C}_3})$ 为 T-模上的余挠三元组, 则 $(\mathfrak{B}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1}, \mathfrak{U}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2})$ 和 $(\mathfrak{U}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2}, \mathfrak{I}_{\mathcal{D}_3}^{\mathcal{C}_3})$ 为 T-模上的两个余挠对. 再由 [3] [定理4.4] 及假设知, $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$, $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ 和 $(\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3)$, $(\mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3)$ 分别为 A-模和 B-模上的余挠对, 即 $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3)$ 为 A-模上的余挠三元组且 $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3)$ 为 B-模上的余挠三元组. □

引理 2 [3]设 $\mathcal{C}$ 是一个左 A-模类且 $\mathcal{D}$ 是一个左 B-模类.

1) 假设 $\mathfrak{U}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}$ 是余可解类且对任意 $i \geq 1$, 有 $\mathrm{Tor}_i^A(U, {}^{\perp}\mathcal{C}) = 0$. 若 C 和 D 是特殊的预包络类, 则 $\mathfrak{U}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}$ 是一个特殊的预包络类. 若 $U \otimes_A {}^{\perp}\mathcal{C} \subseteq {}^{\perp}\mathcal{D}$, 则逆命题成立.

2) 假设 $\mathfrak{U}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}$ 是可解类且对任意 $i \geq 1$, 有 $\mathrm{Ext}_B^i(U, \mathcal{D}^{\perp}) = 0$. 若 C 和 D 是特殊的预覆盖类, 则 $\mathfrak{U}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}$ 是一个特殊的预覆盖类. 若 $\mathrm{Hom}_B(U, \mathcal{D}^{\perp}) \subseteq \mathcal{C}^{\perp}$, 则逆命题成立.

下面是本文的主要结果.

定理 3 设 $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ 是三个左 A-模类, $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ 是三个左 B-模类. 假设对任意 $i \geq 1$, 有 $\mathrm{Tor}_i^A(U, \mathcal{C}_1) = 0 = \mathrm{Ext}_B^i(U, \mathcal{D}_3)$. 若 $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3)$ 是 A-模上完备遗传的余挠三元组, $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3)$ 是 B-模上完备遗传的余挠三元组, 则 $(\mathfrak{B}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1}, \mathfrak{U}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2}, \mathfrak{I}_{\mathcal{D}_3}^{\mathcal{C}_3})$ 是 T-模上完备遗传的余挠三元组. 逆命题成立的条件为对任意 $i \geq 1$, $\mathrm{Tor}_i^A(U, \mathcal{C}_1) = \mathrm{Tor}_i^A(U, {}^{\perp}\mathcal{C}_2) = 0 = \mathrm{Ext}_B^i(U, \mathcal{D}_2^{\perp}) = \mathrm{Ext}_B^i(U, \mathcal{D}_3) = 0$ 且 $U \otimes_A {}^{\perp}\mathcal{C}_2 \subseteq {}^{\perp}\mathcal{D}_2$, $\mathrm{Hom}_B(U, \mathcal{D}_2^{\perp}) \subseteq \mathcal{C}_2^{\perp}$.

证明: 由引理 1 知, $(\mathfrak{B}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1}, \mathfrak{U}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2})$ 和 $(\mathfrak{U}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2}, \mathfrak{I}_{\mathcal{D}_3}^{\mathcal{C}_3})$ 为 T-模上的余挠对. 因为 $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3)$ 是 A-模上完备遗传的余挠三元组且 $\mathrm{Tor}_i^A(U, \mathcal{C}_1) = 0 = \mathrm{Tor}_i^A(U, {}^{\perp}\mathcal{C}_2)$, 所以由引理 2(1) 知, $\mathfrak{U}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2}$ 是特殊的预包络类, 所以 $(\mathfrak{B}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1}, \mathfrak{U}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2})$ 是完备的余挠对. 又因为 $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3)$ 是 B-模上完备遗传的余挠三元组且 $\mathrm{Ext}_B^i(U, \mathcal{D}_2^{\perp}) = 0 = \mathrm{Ext}_B^i(U, \mathcal{D}_3)$, 所以由引理 2(2) 知, $\mathfrak{U}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2}$ 是特殊的预覆盖类, 所以 $(\mathfrak{U}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2}, \mathfrak{I}_{\mathcal{D}_3}^{\mathcal{C}_3})$ 是完备的余挠对. 即 $(\mathfrak{B}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1}, \mathfrak{U}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2}, \mathfrak{I}_{\mathcal{D}_3}^{\mathcal{C}_3})$ 是 T-模上的完备的余挠三元组. 因为 $\mathcal{C}_2, \mathcal{D}_2$ 是余可解的, 所以 $\mathfrak{U}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2}$ 是余可解的. 于是 $(\mathfrak{B}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1}, \mathfrak{U}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2})$ 是 T-模上遗传的余挠对; 因为 $\mathcal{C}_2, \mathcal{D}_2$ 是可解的, 所以 $\mathfrak{U}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2}$ 是可解的. 于是 $(\mathfrak{U}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2}, \mathfrak{I}_{\mathcal{D}_3}^{\mathcal{C}_3})$ 是 T-模上遗传的余挠对. 因此 $(\mathfrak{B}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1}, \mathfrak{U}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2}, \mathfrak{I}_{\mathcal{D}_3}^{\mathcal{C}_3})$ 是 T-模上完备遗传的余挠三元组.

反之, 若 $(\mathfrak{B}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1}, \mathfrak{U}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2}, \mathfrak{I}_{\mathcal{D}_3}^{\mathcal{C}_3})$ 是 T-模上的完备遗传的余挠三元组, 则 $(\mathfrak{B}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1}, \mathfrak{U}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2})$ 和 $(\mathfrak{U}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2}, \mathfrak{I}_{\mathcal{D}_3}^{\mathcal{C}_3})$ 是 T-模上完备遗传的余挠对. 由条件和引理 1 可得, $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3)$ 为 A-模上的余挠三元组且 $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3)$ 为 B-模上的余挠三元组. 又因为 $U \otimes_A {}^{\perp}\mathcal{C}_2 \subseteq {}^{\perp}\mathcal{D}_2$ 且 $\mathrm{Hom}_B(U, \mathcal{D}_2^{\perp}) \subseteq \mathcal{C}_2^{\perp}$, 所以由引理 2 和 [3] [定理5.6], 可得 $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3)$ 是 A-模上完备遗传的余挠三元组, $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3)$ 是 B-模上完备遗传的余挠三元组. □

类似于定理 3 可考虑 T-模上完全遗传的余挠三元组 $(\mathfrak{B}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1}, \mathfrak{U}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2}, \mathfrak{I}_{\mathcal{D}_3}^{\mathcal{C}_3})$.

推论 4 设 $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ 是三个左 A-模类, $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ 是三个左 B-模类. 假设对任意 $i \geq 1$, 有 $\mathrm{Tor}_i^A(U, \mathcal{C}_1) = 0 = \mathrm{Tor}_i^A(U, {}^{\perp}\mathcal{C}_2)$ 且 $\mathrm{Ext}_B^i(U, {\mathcal{D}_2}^{\perp}) = 0 = \mathrm{Ext}_B^i(U, \mathcal{D}_3)$. 若 $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3)$ 是 A-模上的完全遗传的余挠三元组, $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3)$ 是 B-模上的完全遗传的余挠三元组且 $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ 和 $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ 关于正向极限封闭, 则 $(\mathfrak{B}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1}, \mathfrak{U}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2}, \mathfrak{I}_{\mathcal{D}_3}^{\mathcal{C}_3})$ 是 T-模上完全遗传的余挠三元组.

证明: 类似于定理 3 的证明可得, $(\mathfrak{B}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1}, \mathfrak{U}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2})$ 和 $(\mathfrak{U}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2}, \mathfrak{I}_{\mathcal{D}_3}^{\mathcal{C}_3})$ 是 T-模上的两个遗传的余挠对. 因为 $\mathcal{C}_1$ 和 $\mathcal{D}_1$ 关于正向极限封闭, 所以由 [3] [推论5.8(1)] 知, $(\mathfrak{B}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1}, \mathfrak{U}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2})$ 是 T-模上完全遗传的余挠对. 因

为 $\mathcal{C}_2$ 和 $\mathcal{D}_2$ 关于正向极限封闭, 所以由 [3] [推论5.8(2)] 知, $(\mathfrak{U}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2}, \mathfrak{I}_{\mathcal{D}_3}^{\mathcal{C}_3})$ 是 T-模上完全遗传的余挠对. 于是 $(\mathfrak{B}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1}, \mathfrak{U}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2}, \mathfrak{I}_{\mathcal{D}_3}^{\mathcal{C}_3})$ 是 T-模上完全遗传的余挠三元组.

本文的研究对象均为环, 模等较为抽象的代数结构, 较难给出具体的仿真例子, 但为了说明本文方法的有效性, 可给出 T-模上余挠三元组 $(\mathfrak{B}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1}, \mathfrak{U}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2}, \mathfrak{I}_{\mathcal{D}_3}^{\mathcal{C}_3})$ 的几个推论.

若改变定理 3 的假设条件后, 可给出如下推论:

推论 5 设 $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ 是三个左 A-模类, $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ 是三个左 B-模类. 假设 U_A 是平坦的, ${}_BU$ 是投射的且$U \otimes_A {}^{\perp}\mathcal{C}_2 \subseteq {}^{\perp}\mathcal{D}_2$, $\mathrm{Hom}_B(U, \mathcal{D}_2^{\perp}) \subseteq \mathcal{C}_2^{\perp}$. 则 $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3)$ 和 $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3)$ 是完备遗传的余挠三元组当且仅当 $(\mathfrak{B}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1}, \mathfrak{U}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2}, \mathfrak{I}_{\mathcal{D}_3}^{\mathcal{C}_3})$ 是 T-模上的完备遗传的余挠三元组.

假设 R 是环, 若 T 为特殊的形式三角矩阵环 $\begin{pmatrix} R & 0 \\ R & R \end{pmatrix}$, 可给出如下推论:

推论 6 假设 R 是环且 $T = \begin{pmatrix} R & 0 \\ R & R \end{pmatrix}$, 则 $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3)$ 是 R-模上的完备遗传的余挠三元组当且仅当 $(\mathfrak{B}_{\mathcal{C}_1}^{\mathcal{C}_1}, \mathfrak{U}_{\mathcal{C}_2}^{\mathcal{C}_2}, \mathfrak{I}_{\mathcal{C}_3}^{\mathcal{C}_3})$ 是 T-模上的完备遗传的余挠三元组.

推论 7 假设 R 是环且 $T = \begin{pmatrix} R & 0 \\ R & R \end{pmatrix}$, $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ 是三个左 R-模类. 若 $\mathcal{C}_1$ 和 $\mathcal{C}_2$ 关于正向极限封闭且 $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3)$ 是 R-模上的完全遗传的余挠三元组, 则 $(\mathfrak{B}_{\mathcal{C}_1}^{\mathcal{C}_1}, \mathfrak{U}_{\mathcal{C}_2}^{\mathcal{C}_2}, \mathfrak{I}_{\mathcal{C}_3}^{\mathcal{C}_3})$ 是 T-模上的完全遗传的余挠三元组.

推论 8 若 $(\mathfrak{B}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1}, \mathfrak{U}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2}, \mathfrak{I}_{\mathcal{D}_3}^{\mathcal{C}_3})$ 是 T-模上的余挠三元组, 则 $\mathfrak{U}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2}$ 是 thick 的当且仅当 $(\mathfrak{B}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1}, \mathfrak{U}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2}, \mathfrak{I}_{\mathcal{D}_3}^{\mathcal{C}_3})$ 是 T-模上遗传的余挠三元组.

证明: 若 $(\mathfrak{B}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1}, \mathfrak{U}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2}, \mathfrak{I}_{\mathcal{D}_3}^{\mathcal{C}_3})$ 是 T-模上的余挠三元组, 则 $(\mathfrak{B}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1}, \mathfrak{U}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2})$ 和 $(\mathfrak{U}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2}, \mathfrak{I}_{\mathcal{D}_3}^{\mathcal{C}_3})$ 是 T-模上的余挠对. 因此, $\mathfrak{U}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2}$ 是 thick 的当且仅当 $(\mathfrak{B}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1}, \mathfrak{U}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2})$ 和 $(\mathfrak{U}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2}, \mathfrak{I}_{\mathcal{D}_3}^{\mathcal{C}_3})$ 是遗传的余挠对当且仅当 $(\mathfrak{B}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1}, \mathfrak{U}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2}, \mathfrak{I}_{\mathcal{D}_3}^{\mathcal{C}_3})$ 是 T-模上遗传的余挠三元组.

基金项目

国家自然科学基金资助项目(11761060)。

参考文献

[1] Enochs, E.E., Estrada, S., Garcia Rozas, J.R. and Iacob, A. (2007) Gorenstein Quivers. *Archiv der Mathematik*, **88**, 199-206. https://doi.org/10.1007/s00013-006-1921-5

[2] Ren, W. (2019) Applications of Cotorsion Triples. *Communications in Algebra*, **47**, 2341-2356.

[3] Mao, L.X. (2020) Cotorsion Pairs and Approximation Classes over Formal Triangular Matrix Rings. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **224**, Article ID: 106271. https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2019.106271

[4] Fu, X.R. and Hu, Y.G. (2021) The Recollements of Abelian Categories: Cotorsion Dimensions and Cotorsion Triples. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, **48**, 963-977.

[5] Beligiannis, A. and Reiten, I. (2007) Homological and Homotopical Aspects of Torsion Theories. Department of Mathematics, University of Ioannina, Ioannina.

[6] Estrada, S., Perez, M.A. and Zhu, H.Y. (2020) Balance Pairs, Cotorsion Triplets and Quiver. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, **63**, 67-90. https://doi.org/10.1017/S0013091519000270