Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(6), 981-985
Published Online June 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.126107

Hans汉斯

Julia集为Cantor集的一族有理函数

孙　霞

云南开放大学公共基础教学部，云南　昆明

收稿日期：2022年5月11日；录用日期：2022年6月16日；发布日期：2022年6月23日

摘　要

参数空间的研究是复解析动力系统研究的一个重要部分，著名的Mandelbrot集是含有单参数的多项式 $p(z)=z^2+c$ (c为复常数)的参数空间，它是一个复杂的分形图。人们猜测，对同样含有单参数的函数族，应该也有像M集一样复杂的参数空间。为此，我们研究了含有单参数的二次有理函数族 $R_\lambda(z)=\lambda z/(1-z)^2$ (λ 为复常数)。运用复解析动力系统中临界点与Fatou分支的关系，我们得到当参数 $\lambda\in(-1,0)\cup(0,1)$ 时，其Julia集为广义cantor集。此时由于该函数族的所有临界点都在Fatou集的一个吸性分支里面，所以该函数族中的函数全为双曲有理函数。

关键词

Fatou集，Julia集，Cantor集

A Class of Rational Functions with Cantor Julia Sets

Xia Sun

Department of Public and Basic Education, Yunnan Open University, Kunming Yunnan

Received: May 11th, 2022; accepted: Jun. 16th, 2022; published: Jun. 23rd, 2022

Abstract

Parameter space is an important part of complex analytic dynamics. Mandelbrot set, which is famous in the world, is the parameter space of $p(z)=z^2+c$ (c is a complex constant). And $p(z)$ has one parameter. Many people conjecture that functions with one parameter also have the intricate parameter space as Mandelbrot set. Similarly, we study a class of rational functions with

文章引用: 孙霞. Julia 集为 Cantor 集的一族有理函数[J]. 理论数学, 2022, 12(6): 981-985.
DOI: 10.12677/pm.2022.126107

one parameter. They are $R_\lambda(z)=\lambda z/(1-z)^2$ (λ is a complex constant). By using the relation between critical points and the component of Fatou set, we have found that they have cantor Julia sets when $\lambda\in(-1,0)\cup(0,1)$. Moreover, they are all hyperbolic rational functions since all critical points of them stay in an attract component of Fatou set.

Keywords

Fatou Sets, Julia Sets, Cantor Sets

1. 引言及主要结果

在复解析动力系统的研究中，参数空间的研究是一个极其重要的方面。对二次多项式族 $P_c(z)=z^2+c$ (c 为复常数)，我们考虑集合

$$M=\{c\in\mathbb{C}\mid J(P_c)\text{是连通的}\}。$$

此时，集合 M 即为著名的 Mandelbrot 集[1] [2] [3]。M 集有许多问题吸引着众多的数学家去进行研究，至今仍有很多问题是没有解决的，例如 ∂M 的局部连通性以及 $H=\operatorname{int}(M)$，其中 $H=\{c\mid p_c$ 具有吸性或超吸性周期轨道$\}$ 等[2]。

人们猜测，对含有单参数的函数族，应该也有像 M 集一样复杂的参数空间。对超越整函数族 $f(z)=\mathrm{e}^{\lambda z}$，$\lambda\in\mathbb{C}$，当参数 $0<\lambda<1/\mathrm{e}$ 时，f 的 Julia 集 $J(f)\neq\mathbb{C}$，$J(f)$ 含有 cantor 束；当 $\lambda>1/\mathrm{e}$ 时，$J(f)=\mathbb{C}$。而对整个参数平面结构的研究，仍很不完整[1]。

我们研究的是含有单参数的有理函数族 $R_\lambda(z)=\lambda z/(1-z)^2$ (λ 为复常数)，发现当参数沿实轴并且在 $(-1,1)$ 之间取值时，其 Julia 集 $J(R_\lambda)$ 为 cantor 集，此时函数全为双曲有理函数。为此，我们有如下的结论：

定理 若 $T:=\left\{R_\lambda(z)=\lambda z/(1-z)^2,\lambda\in(-1,0)\cup(0,1)\right\}$，则对任意的 $R_\lambda(z)\in T$，$J(R_\lambda)$ 为 cantor 集，且 $R_\lambda(z)$ 为双曲有理函数。

2. 预备知识和引理

为了证明定理，本节对有理函数动力系统的一些概念和结果进行回顾。

设 $R:\hat{\mathbb{C}}\to\hat{\mathbb{C}}$ 是有理函数，则 R 可表示为 $R(z)=P(z)/Q(z)$，这里 P 和 Q 是两个互质的多项式，记 $\deg(P)$ 为多项式 P 的次数，定义

$$\deg(R)=\max\{\deg(P),\deg(Q)\},$$

称为有理函数 R 的度，它等于方程 $R(z)=a\in\hat{\mathbb{C}}$ 的根的个数(重根记重数)。记 $R^n=\underbrace{R\circ R\circ\cdots\circ R}_{n\text{个}}$，如果序列 $\{R^n\}$ 在 $z_0\in\hat{\mathbb{C}}$ 是正规的，则称 z_0 是 R 的正规点，R 的所有正规点集称为 R 的 Fatou 集，记为 $F(R)$。$F(R)$ 关于 $\hat{\mathbb{C}}$ 的余集称为 R 的 Julia 集，记为 $J(R)$。$F(R)$ 是开集，也称为稳定点集，$J(R)$ 是闭集，也称为不稳定点集。$F(R)$ 的连通分支称为 Fatou 分支或稳定域。

定义 2.1 [3]若 g 是集合 X 上的一个自映射，E 为 X 的一个子集，则

1) 称 E 为向前不变的，如果 $g(E)=E$；

2) 称 E 为向后不变的，如果 $g^{-1}(E)=E$；

3) 称 E 为完全不变的，如果 $g(E)=E=g^{-1}(E)$。

引理 2.1 [3] [4] $J(R)$ 和 $F(R)$ 都是完全不变的，即 $R(F(R))=F(R)=R^{-1}(F(R))$，$R(J(R))=J(R)=R^{-1}(J(R))$。

定义 2.2 设 R 为有理函数，$\deg(R)\geq 2, z_0\in\hat{\mathbb{C}}$，称序列 $\{z_0, z_1=R(z_0),\cdots,z_n=R^n(z_0),\cdots\}$ 为 R 在点 z_0 的轨道(或称为正向轨道)，记为 $O_R(z_0)$ 或 $O(z_0)$，称点集 $\{z_0, R^{-1}(z_0),\cdots,R^{-n}(z_0),\cdots\}$ 为 R 在点 z_0 的逆轨道(或称为逆向轨道)，记为 $O_R^-(z_0)$ 或 $O^-(z_0)$。

一类重要的轨道是周期轨道，其定义如下。

定义 2.3 称 $z_0\in\hat{\mathbb{C}}$ 为 R 的周期点，如果存在正整数 p 使得 $R^p(z_0)=z_0$，满足该式的最小的 p 称为 z_0 的周期，这时，z_0 的轨道是一条有限轨道：$O(z_0)=\{z_0, z_1=R(z_0),\cdots,z_{p-1}=R^{p-1}(z_0)\}$，称其为周期轨道或循环，$p$ 为其周期。若 $p=1$，即 $R(z_0)=z_0$，我们称 z_0 为 $R(z)$ 的不动点。

显然，周期轨道内每一点都是周期点，都具有相同的周期 p。

定义 2.4 设 $z_0\in\hat{\mathbb{C}}$ 为 R 的周期点，周期为 p，则称 $\lambda=(R^p)'(z_0)$ 为 z_0 的乘子，若 z_0 的轨道为 $O(z_0)=\{z_0,z_1,\cdots,z_{p-1}\}$，则 $\lambda=\prod_{j=0}^{p-1}R'(z_j)$。因此，周期轨道内每一点都有相同的乘子，故 λ 也称为周期轨道 $O(z_0)$ 的乘子。若 $z=\infty$ 或 $R(z)=\infty$，则在 ∞ 的邻域内取局部坐标 $1/z$，这时，求导运算在 ∞ 的邻域内也有定义。

依据乘子 λ，我们对周期点有如下分类。

定义 2.5 设 z_0 是 R 的周期点，周期为 p，乘子为 $\lambda=(R^p)'(z_0)$，那么

1) 如果 $0<|\lambda|<1$，则称 z_0 为吸引周期点；

2) 如果 $\lambda=0$，则称 z_0 为超吸引周期点；

3) 如果 $|\lambda|=1$，则称 z_0 为中性周期点，此时，$\lambda=e^{2\pi i\theta}$，$\theta\in\mathbb{R}$。进一步，如果 θ 是有理数，则称 z_0 为有理中性周期点；如果 θ 是无理数，则称 z_0 为无理中性周期点。

上述分类对周期轨道也适合，对应地称为吸引周期轨道、超吸引周期轨道等。不动点是周期为 1 的周期点，关于不动点的个数，有如下结论。

引理 2.2 [2] [3] [4]若 R 是度 $d\geq 1$ 的有理函数，则 R 在 $\hat{\mathbb{C}}$ 中有 $d+1$ 个不动点。

在动力系统的研究中，我们不仅要准确掌握不动点，还需要明确临界点以及它的轨道。

定义 2.6 如果 $R(z)$ 在 z 的任何邻域内都不是单叶的，则称点 z 为 $R(z)$ 的临界点，也即 $R'(z)$ 的零点及其 $R(z)$ 的重级极点(如果有重级极点)称为 $R(z)$ 的临界点。R 在临界点的值称为临界值，R 的临界点的集合通常记为 C_R，C_R^+ 指的是临界点的向前轨道。

引理 2.3 [2] [3] [4]度为 d 的有理函数 R，在 $\hat{\mathbb{C}}$ 中有 $2d-2$ 个临界点。

关于临界点和周期轨道，有很多重要的结论，这里，我们回顾一下临界点和吸引周期轨道的关系。

引理 2.4 [2]设 $O(z_0)=\{z_0,z_1,\cdots,z_{p-1}\}$ 是 R 的吸引周期轨道，则其直接吸引域中至少包含 R 的一个临界点 c，且 $O(c)\cap O(z_0)=\varnothing$。

一个拓扑空间(或子集)称为完全不连通的，如果它的每个连通分支由单个点组成。Cantor 集就是完全不连通的，其定义如下。

定义 2.7 $\hat{\mathbb{C}}$ 中的子集 E 称为是 cantor 集，如果 E 是一个非空闭的完全集且 E 是完全不连通的。

这里的 cantor 集是广义 cantor 集，其原型是康托的“middle-third”集，若 Julia 集为 cantor 集，则此时的 Julia 集像一片片叶子的碎片，它不再是连续的，而由许许多多的离散点组成。

关于 Julia 集何时为 cantor 集，我们有下面的结论。

引理 2.5 [3]设 R 是度 $\deg(R)\ge 2$ 的有理函数，z_0 为 R 的吸引或超吸引不动点，如果 R 的所有临界点均在 z_0 的直接吸性域中，则 $J(R)$ 为 cantor 集。

接下来，我们需要回顾动力学性质相对简单的双曲有理函数。

定义 2.8 一个有理函数 $R:\hat{\mathbb{C}}\mapsto\hat{\mathbb{C}}$，$\deg(R)\ge 2$，称为是双曲的，如果 R 在 Julia 集 $J(R)$ 上是扩张的。

引理 2.6 [2]设 R 是度 $\deg(R)\ge 2$ 的有理函数，那么下列条件等价：

1) R 是双曲的，即在 $J(R)$ 上是扩张的；

2) $\overline{O_R(c)\cap J(R)}=\varnothing$；

3) 每个临界点的正向轨道收敛于某个吸引(或超吸引)周期轨道。

3. 定理的证明

证明：对任意的 $R_\lambda\in T$，由于 $\deg(R_\lambda)=2$，由引理 2.2 和引理 2.3 知函数 R_λ 在 $\hat{\mathbb{C}}$ 中有 3 个不动点和 2 个临界点，其 2 个临界点分别为−1 和 1，0 为其中一个不动点，由于 $|R'(0)|=|\lambda|$，且 $\lambda\in(-1,0)\cup(0,1)$，所以 0 为 R_λ 的吸性不动点，记 $F(R_\lambda)$ 包含 0 的分支为 D_0，则 D_0 是吸性分支且 $R_\lambda(D_0)\subset D_0$。由于 D_0 是 $F(R_\lambda)$ 吸性分支，由引理 2.4，D_0 含有 R_λ 的一个临界点，因为 $\deg(R_\lambda)=2$，所以 D_0 是 R_λ 的完全不变的分支。由于 $R_\lambda^2(1)=0$，所以临界点 $1\in D_0$。接下来分两种情形来讨论另一临界点−1 的轨迹。

1) 当参数 $\lambda\in(0,1)$ 时，取 $x\in(-\infty,0)$，则 $R_\lambda(x)=\lambda x\big/(1-x)^2$ 且 $R_\lambda(x)<0$。此时，R_λ 在 $\hat{\mathbb{C}}$ 中有 3 个不动点分别为 $0,1-\sqrt{\lambda}$ 和 $1+\sqrt{\lambda}$。由于 $\left|\dfrac{x}{R_\lambda(x)}\right|=\left|x\cdot\dfrac{(1-x)^2}{\lambda x}\right|=\left|\dfrac{(1-x)^2}{\lambda}\right|>\left|(1-x)^2\right|>1$，所以当 $x\in(-\infty,0)$ 时，有 $x<R_\lambda(x)<0$，由于 R_λ 在 $(-\infty,0)$ 上没有不动点，所以 $R_\lambda^n(x)\to 0\ (n\to\infty)$，特别地有 $R_\lambda^n(-1)\to 0\ (n\to\infty)$，从而 $-1\in D_0$。

2) 当参数 $\lambda\in(-1,0)$ 时，取 $x\in(-\infty,0)$，则 $R_\lambda^2(x)=\lambda^2x(1-x)^2\Big/\left(\lambda x-(1-x)^2\right)^2$ 且 $R_\lambda^2(x)<0$，此时，$\deg(R_\lambda^2)=4$，由引理 2.2 知 R_λ 在 $\hat{\mathbb{C}}$ 中有 5 个不动点分别为 $0,1-\sqrt{|\lambda|}i$，$1+\sqrt{|\lambda|}i$，$(\lambda+1)+\sqrt{|\lambda^2+\lambda|}i$ 和 $(\lambda+1)-\sqrt{|\lambda^2+\lambda|}i$。由于

$$\left|\frac{x}{R_\lambda^2(x)}\right|=\left|x\cdot\frac{\left(\lambda x-(1-x)^2\right)^2}{\lambda^2x(1-x)^2}\right|=\left|\frac{\left(\lambda x-(1-x)^2\right)^2}{\lambda^2(1-x)^2}\right|>\left|\frac{\left((1-x)^2-\lambda x\right)^2}{(1-x)^2}\right|>\left|\frac{(1-x)^2+x}{1-x}\right|^2=\left|\frac{1-x+x^2}{1-x}\right|=\left|1+\frac{x^2}{1-x}\right|>1$$

所以 $x<R_\lambda^2(x)<0$，由于 R_λ 在 $(-\infty,0)$ 上没有不动点，所以 $R_\lambda^n(x)\to 0\ (n\to\infty)$，同情形(1)我们也有 $-1\in D_0$。由于对任意的 $R_\lambda\in T$，其所有的临界点都在吸引分支 D_0 中，从而由引理 2.5 知 $J(R_\lambda)$ 为 cantor 集。此时，由于 $\overline{O_{R_\lambda}(c)\cap J(R_\lambda)}=\varnothing$，由引理 2.6 得函数族中的函数均为双曲有理函数。定理证毕。

如果有理函数 R 是双曲的，那么在 R 附近的有理函数都是双曲的[3]。在定理中，我们发现当参数沿实轴在 $(-1,0)$ 和 $(0,1)$ 取值时，函数 R_λ 都是双曲的，所以在实轴附近一个不规整的区域内，函数都是双曲有理函数，这样的区域能否拓展？具体形状如何？这将是我们后续研究的问题，进一步，我们可以考虑函数的 J-稳定性以及 Julia 集的 hausdorff 维数。

基金项目

云南开放大学云南国防工业职业技术学院科学研究基金项目，项目编号：21YNOU13。

参考文献

[1] 蔡克聚, 邓小成. 复解析动力系统发展概况[J]. 数学进展, 1994(1): 1-24.

[2] 任福尧. 复解析动力系统[M]. 上海: 复旦大学出版社, 1997.

[3] Beardon, A.F. (1991) Iteration of Rational Function. Springer-Verlag, New York.

[4] Steinmetz, N. (1993) Rational Iteration. Water de Gruyter, Berlin, New York.