Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(6), 1092-1094
Published Online June 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.126120

取整函数在数列极限应用中的一个常见错误

杨继明

玉溪师范学院，数学系，云南 玉溪

收稿日期：2022年5月16日；录用日期：2022年6月23日；发布日期：2022年6月30日

摘　要

取整函数在数列极限中有着广泛的应用。本文指出了该函数在应用中的常见错误。同时本文提出了一种基于函数特性的解决方案，并且举例证明了该方法的有效性。

关键词

取整函数，数列极限，教学

A Common Mistake of Integer Functions in Application to the Limits of Sequence

Jiming Yang

Department of Mathematics, Yuxi Normal University, Yuxi Yunnan

Received: May 16th, 2022; accepted: Jun. 23rd, 2022; published: Jun. 30th, 2022

Abstract

The integer function has a wide range of applications in the limits of series. This article points out the common errors in the application of this function. In addition, this article proposes a solution based on function properties and proves the effectiveness of the method with examples.

Keywords

Integer Function, The Limit of Sequence, Instruction

文章引用: 杨继明. 取整函数在数列极限应用中的一个常见错误[J]. 理论数学, 2022, 12(6): 1092-1094.
DOI: 10.12677/pm.2022.126120

设 x 是一个实数，把不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分，记作 $[x]$。函数 $[x]$ 的定义域是实数集 R，函数 $[x]$ 通常称为取整函数，这一函数在数论及计算机领域中有着广泛的应用。这一函数在数列极限问题中也经常被用到，但是容易被用错。在证明数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 时，需要任意取定一个正数 ε，然后证明存在一个正整数 N，使得当正整数 $n > N$ 时，有 $|a_n - a| < \varepsilon$。在取正整数 N 时，经常需要用到取整函数。下面我们将先给出取整函数的两个简单性质，即性质 1 和性质 2。然后列举一个例子说明如何应用这性质 2 证明数列极限，接着列举三个例子，说明一些书刊中存在的错误。

性质 1 [1] $[x] \le x < [x]+1$。

性质 2 设 x 为实数，n 为整数，且 $n > [x]$，则 $n > x$。

证 由性质 1 得，$[x] > x-1$。又因 n 及 $[x]$ 都为整数，且 $n > [x]$，故 $n \ge [x]+1 > (x-1)+1 = x$，从而 $n > x$。

例 1 证明数列 $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$ 的极限为零。

证 对任意给定的 $\varepsilon > 0$，要使

$$\left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon, \tag{1}$$

只需 $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$ 即可。

由 $N = \max\left\{\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right], 1\right\}$ 可得， $N \ge \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$， $N \ge 1$，而 $\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$ 和 1 都为整数，故 N 为正整数，当正整数 $n > N$ 时， $n > \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$。于是，由数列极限定义可知，数列 $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$ 的极限为零。

说明：如果取 $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，这是不妥的，因为当 $\varepsilon > 1$ 时， $\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$ 不是正整数．当然，如果限定 $0 < \varepsilon < 1$，倒是可以取 $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$ 的。

例 2 [2] 证明：对 $|q| < 1$ 的任何常数 q，数列 $\{q^n\}$ 为无穷小量。

证 当 $q = 0$ 时，结论显然正确。下面考虑 $q \ne 0$ 的情形。对任意给定的 $\varepsilon > 0$，要使

$$|q^n - 0| = |q|^n < \varepsilon, \tag{2}$$

只需 $n \ln|q| < \ln\varepsilon$，即 $n > \dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$。

取正整数 $N = \max\left\{\left[\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\right], 1\right\}$，则当正整数 $n > N$ 时，(2)式成立。这是因为当正整数 $n > N$ 时，$n > \left[\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\right]$。由性质(2)得，$n > \dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$，从而(2)成立。故数列 $\{q^n\}$ 为无穷小量。

附记：文[2]在假定$0<\varepsilon<1$时，取正整数$N=\left[\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\right]$。但这种取法欠妥，因为当$q=\mathrm{e}^{-2}$，$\varepsilon=\mathrm{e}^{-1}$时，$\left[\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\right]=\left[\dfrac{\ln\mathrm{e}^{-1}}{\ln\left|\mathrm{e}^{-2}\right|}\right]=\left[\dfrac{1}{2}\right]=0$不是正整数。

例 3 [2] 设q为适合不等式$|q|>1$的任意常数，则$\left\{q^n\right\}$为无穷大量。

证 对任意给定的$G>0$，要使

$$\left|q^n\right|=|q|^n>G, \tag{3}$$

只需$n\ln|q|>\ln G$，即$n>\dfrac{\ln G}{\ln|q|}$。

取正整数$N=\max\left\{\left[\dfrac{\ln G}{\ln|q|}\right],1\right\}$，则当正整数$n>N$时，(3)式成立。这是因为，当正整数$n>N$时，$n>\left[\dfrac{\ln G}{\ln|q|}\right]$。由性质(2)得，$n>\dfrac{\ln G}{\ln|q|}$，从而(3)式成立。

附记：文[2]在假定$G>1$时，取正整数$N=\left[\dfrac{\ln G}{\ln|q|}\right]$。这也是欠妥的，因为当$G=\mathrm{e}$，$q=\mathrm{e}^2$时，$\left[\dfrac{\ln G}{\ln|q|}\right]=0$不是正整数。

例 4 [3] 已知$x_n=\dfrac{(-1)^n}{(n+1)^2}$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$。

证 因为

$$\left|x_n-0\right|=\left|\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}-0\right|=\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{n+1},$$

所以，对任意给定的$\varepsilon>0$，要使$\dfrac{1}{n+1}<\varepsilon$，只需$n>\dfrac{1}{\varepsilon}-1$即可。取正整数$N=\max\left\{\left[\dfrac{1}{\varepsilon}-1\right],1\right\}$，则当正整数$n>N$时，$\left|x_n-0\right|<\varepsilon$。故由数列极限定义得，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$。

附记：文[3]在假定$\varepsilon\in(0,1)$下，取正整数$N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}-1\right]$不妥，这是因为，当$\varepsilon=\dfrac{2}{3}$时，$\left[\dfrac{1}{\varepsilon}-1\right]=\left[\dfrac{1}{\frac{2}{3}}-1\right]=\left[\dfrac{1}{2}\right]=0$不是正整数。

参考文献

[1] 闵嗣鹤, 严士健. 初等数论[M]. 第三版. 北京: 高等教育出版社, 2003.

[2] 陈传璋, 金福临, 等. 数学分析(上册) [M]. 北京: 人民教育出版社, 1978.

[3] 何桂添, 田艳. 取整函数的性质在极限概念教学中的应用[J]. 高等数学研究, 2015, 18(5): 34-36.