Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(6), 1011-1026
Published Online June 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.126111

广义变指标 Morrey 空间上的 Marcinkiewicz 积分的多线性交换子

史鹏伟

西北师范大学，数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2022年5月16日；录用日期：2022年6月21日；发布日期：2022年6月28日

摘 要

借助变指标 Lebesgue 空间上的有界性，利用函数分层分解和实变技巧，得到了 Marcinkiewicz 积分和 BMO 函数生成的多线性交换子在广义变指标 Morrey 空间上的有界性。

关键词

广义变指标 Morrey 空间，Marcinkiewicz 积分，多线性交换子，BMO 函数

The Multilinear Commutator of Marcinkiewicz Integral on Generalized Variable Exponent Morrey Spaces

Pengwei Shi

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: May 16^{th}, 2022; accepted: Jun. 21^{st}, 2022; published: Jun. 28^{th}, 2022

Abstract

With the help of the boundedness of the Lebesgue space with variable exponent,

文章引用: 史鹏伟. 广义变指标 Morrey 空间上的 Marcinkiewicz 积分的多线性交换子[J]. 理论数学, 2022, 12(6): 1011-1026. DOI: 10.12677/pm.2022.126111

by applying hierarchical decomposition of function and real variable techniques, the boundedness of Marcinkiewicz integral and its multilinear commutator generated by BMO **function is obtained on generalized variable exponent Morrey spaces.**

Keywords

Generalized Variable Exponent Morrey Spaces, Marcinkiewicz Integral, Multilinear Commutator, BMO **Function**

1. 引言及主要结果

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 上的零次齐次函数且满足消失条件

$$\int_{S^{n-1}} \Omega(x')\mathrm{d}\sigma(x') = 0, \tag{1.1}$$

其中, S^{n-1} 表示 $\mathbb{R}^n(n \geq 2)$ 中的单位球面, $\mathrm{d}\sigma(x')$ 为 S^{n-1} 上的 Lebesgue 测度, $x' = \frac{x}{|x|}$, $x \neq 0$.

Marcinkiewicz 积分算子 μ_Ω 的定义为

$$\mu_\Omega(f)(x) = \left(\int_0^\infty \left|\int_{|x-y|\leq t} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1}} f(y)\mathrm{d}y\right|^2 \frac{\mathrm{d}t}{t^3}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.2}$$

1958 年, Stein [1]首次引入了形如 (1.2) 的高维 Marcinkiewicz 积分算子, 同时证明了当 Ω 连续且 $\Omega \in \mathrm{Lip}_\alpha(S^{n-1})$ $(0 < \alpha \leq 1)$ 时, μ_Ω 是 (p,p) 型 $(1 < p \leq 2)$ 和弱 $(1,1)$ 型的. 这里 $\Omega \in \mathrm{Lip}_\alpha(S^{n-1})$ $(0 < \alpha \leq 1)$ 是指存在一个常数 $C > 0$, 使得

$$|\Omega(x_1) - \Omega(x_2)| \leq C|x_1 - x_2|^\alpha, \ \forall x_1,\ x_2 \in S^{n-1}. \tag{1.3}$$

1962 年, Benedek 等 [2]证明了当 $\Omega \in C^1(S^{n-1})$, $1 < p < \infty$ 时, μ_Ω 是 (p,p) 型的. 2014 年, Wang [3]得到了 Marcinkiewicz 积分算子及其交换子在变指标 Herz 空间 $\dot{K}^{\alpha(\cdot),p}_{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 上的有界性. 2018年, 辛银萍和陶双平 [4]得到了带变量核的 Marcinkiewicz 积分算子在变指标 Herz 型 Hardy 空间上的有界性. 近年来, 更多关于 Marcinkiewicz 积分算子及其交换子的有界性结果, 可参见文献 [5–7].

设 b 是局部可积函数, 则 BMO (有界平均振动)函数空间的定义如下

$$\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n) := \{b \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) : \|b\|_* = \sup_{B\subset\mathbb{R}^n} \frac{1}{|B|}\int_B |b(x) - b_B|\mathrm{d}x < \infty\},$$

其中, $b_B = \frac{1}{|B|}\int_B b(y)\mathrm{d}y$. 则由 μ_Ω 和 b 生成的交换子定义为

$$[b,\mu_\Omega](f)(x) := b\mu_\Omega(f)(x) - \mu_\Omega(bf)(x). \tag{1.4}$$

设 $m \in \mathbb{N}$, $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m) \in \mathrm{BMO}^m(\mathbb{R}^n)$, 即 $b_i \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$, $i = 1, 2, \ldots, m$. 受到 Pérez 和 Trujillo-González [8]关于多线性交换子研究的启发, 我们定义 Marcinkiewicz 积分算子的多线性交换子为

$$\mu_{\Omega,\vec{b}}(f)(x) = \left(\int_0^\infty \left|\int_{|x-y|\le t} \prod_{i=1}^m (b_i(x) - b_i(y)) \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1}} f(y)\mathrm{d}y\right|^2 \frac{\mathrm{d}t}{t^3}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.5}$$

特别地, 如果取 $b_i = b$, $m = 1$, 则有 $\mu_{\Omega,\vec{b}}(f)(x) = [b,\mu_\Omega](f)(x)$.

2008 年, Zhang [9]证明了当 $\omega \in A_p$ 时, $\mu_{\Omega,\vec{b}}$ 的加权 L^p $(1 < p < \infty)$ 有界性, 并得到一种加权弱 $L(\log L)$ 型估计. 2019 年, Wang 和 Shu [10] 获得了 Marcinkiewicz 积分算子的多线性交换子在变指标 Lebesgue 空间和 Herz 型空间上的有界性.

变指标函数空间在流体动力学, 图像处理和具有非标准增长条件的微分方程等领域有广泛应用(参见文献 [11–13]). 为了研究二阶椭圆偏微分方程的解的局部行为及其应用, 最早由 Morrey [13]提出了一种函数空间 $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ $(1 < p < \infty, 0 < \lambda < n)$, 也就是现在的经典 Morrey 空间. 近几十年来, 许多作者推广了经典 Morrey 空间, 得到了不同形式的变指标 Morrey 空间并且获得了许多经典算子及其交换子的有界性结果. 2008 年, Almeida 等 [14]证明了极大算子和位势算子在变指标 Morrey 空间上的有界性. 2016 年, 陶双平和李露露 [15]建立了 Marcinkiewicz 积分及其交换子在变指标 Morrey 空间上的有界性. Ho [16]给出了分数次积分和奇异积分算子在变指标 Morrey 空间上有界性的充分条件, 与此同时作者 [17]得到分数次积分算子在变指标 Morrey 空间上的弱型估计. 最近, Guliyev 等 [18]证明了 ω 型 Calderón-Zygmund 算子及其多线性交换子在广义变指标 Morrey 空间 $\mathcal{M}^{p(\cdot),u}(\mathbb{R}^n)$ 上的有界性. 受上述研究结果的启发, 本文的主要目的是研究 Marcinkiewicz 积分和 BMO 函数生成的多线性交换子在广义变指标 Morrey 空间 $\mathcal{M}^{p(\cdot),u}(\mathbb{R}^n)$ 上的有界性. 为此, 我们首先回顾下面的定义.

对任意的 $x \in \mathbb{R}^n$ 和 $r > 0$, $B(x,r)$ 表示以 x 为中心, r 为半径的球体. $B(x,r)^C$ 表示 $B(x,r)$ 的余集. 用 χ_B 表示 $B \subset \mathbb{R}^n$ 的特征函数, $|B|$ 表示 Lebesgue 测度. $f \approx g$ 是指存在常数 $C_1, C_2 > 0$, 使得 $C_1 g \le f \le C_2 g$. 本文中的 C 是一个正常数, 在不同地方可取不同的值.

用 $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 上所有满足下列条件的可测函数 $p(x) : \mathbb{R}^n \to [1,\infty)$ 组成的集合

$$p^- := \mathrm{ess\,inf}\{p(x) : x \in \mathbb{R}^n\} > 1,\ \ p^+ := \mathrm{ess\,sup}\{p(x) : x \in \mathbb{R}^n\} < \infty.$$

记 $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$ 是由所有满足 $0 < p^- \le p^+ < \infty$ 的可测函数 $p(x) : \mathbb{R}^n \to (0,\infty)$ 构成的集合. $\mathcal{P}_1(\mathbb{R}^n)$ 是由所有满足 $1 \le p^- \le p^+ < \infty$ 的 $p(x) : \mathbb{R}^n \to (0,\infty)$ 构成的集合. 设 $1 < p(x) < \infty$, 记 $p'(x)$ 为

$p(x)$ 的对偶指标, 即 $p'(x) = \frac{p(x)}{p(x)-1}$.

如果存在可测函数 $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, 满足

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{-C}{\ln(|x-y|)}, \quad |x-y| \leq \frac{1}{2}, \tag{1.6}$$

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{C}{\ln(|x|+e)}, \quad |y| \geq |x|, \tag{1.7}$$

则称 $p(\cdot) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. 若 $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, 则 $p(\cdot) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ 当且仅当 $p'(\cdot) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, 见文献 [10].

定义 1 [3] 设 $p(x) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, 变指标 Lebesgue 空间 $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 定义为

$$L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) := \Big\{ f \text{ 是可测函数} : \text{对某个常数 } \lambda > 0, \text{有} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{|\, f(x) \,|}{\lambda} \right)^{p(x)} \mathrm{d}x < \infty \Big\}.$$

当被赋予如下的 Luxemburg-Nakano 范数时, $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 是一个 Banach 函数空间

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} = \inf \Big\{ \lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{|\, f(x) \,|}{\lambda} \right)^{p(x)} \mathrm{d}x \leq 1 \Big\}.$$

显然, 当 $p(\cdot)$ 为常数时, 则 $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$ 是经典的 Lebesgue 空间.

局部变指标 Lebesgue 空间 $L^{p(\cdot)}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 定义为

$$L^{p(\cdot)}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) := \{ f : f\chi_E \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n), E \text{ 是 } \mathbb{R}^n \text{ 的任意紧子集} \}.$$

定义 2 [6] 设 $\lambda(\cdot) : \mathbb{R}^n \to (0, n)$ 是一个可测函数, $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. 变指标 Morrey 空间 $\mathcal{L}^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 定义为

$$\mathcal{L}^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\mathbb{R}^n) = \{ f : \|f\|_{\mathcal{L}^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r>0} r^{-\frac{\lambda(x)}{p(x)}} \|\chi_{B(x,r)} f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} < \infty \}.$$

容易看到, 如果 $p(\cdot)$, $\lambda(\cdot)$ 均为常数, 则 $\mathcal{L}^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{L}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ 是经典的 Morrey 空间, 并且此时 Morrey 空间可看作 Lebesgue 空间的推广(参见文献 [13]).

在本文中, $u(x,r)$, $u_1(x,r)$ 和 $u_2(x,r)$ 是 $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ 上的非负可测函数. 并且 $u(r)$, $u_1(r)$ 和 $u_2(r)$ 是 $(0,\infty)$ 上的非负可测函数.

定义 3 [18, 19] 设 $p(\cdot) \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^n)$, $u(x,r) : \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \to (0,\infty)$. 广义变指标 Morrey 空间 $\mathcal{M}^{p(\cdot),u}(\mathbb{R}^n)$ 定义为

$$\mathcal{M}^{p(\cdot),u}(\mathbb{R}^n) = \{ f \in L^{p(\cdot)}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{\mathcal{M}^{p(\cdot),u}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r>0} \frac{1}{u(x,r) r^{\theta_p(x,r)}} \|\chi_{B(x,r)} f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} < \infty \},$$

其中 $\theta_p(x,r) = \begin{cases} \frac{n}{p(x)}, & r \leq 1, \\ \frac{n}{p(\infty)}, & r \geq 1, \end{cases} \quad p(\infty) = \lim_{x \to \infty} p(x).$

注 1 根据定义 1.2, 如果 $u(x,r)=r^{-\theta_p(x,r)+\frac{\lambda(x)}{p(x)}}$, 则有 $\mathcal{M}^{p(\cdot),u}(\mathbb{R}^n)=\mathcal{L}^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. 如果 $u(x,r)=r^{\frac{\lambda-n}{p(x)}}$, 且 $0<\lambda<n$, 则 $\mathcal{M}^{p(\cdot),u}(\mathbb{R}^n)=\mathcal{L}^{p(\cdot),\lambda}(\mathbb{R}^n)$ 是由 Almeida 等 [14]定义的变指标 Morrey 空间. 若 $u(x,r)=r^{-\theta_p(x,r)}$, 则 $\mathcal{M}^{p(\cdot),u}(\mathbb{R}^n)=L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. 此外, 我们应该注意到, 本文给出的 $\mathcal{M}^{p(\cdot),u}(\mathbb{R}^n)$ 空间与文献 [14–17, 20]中所定义的变指标 Morrey 空间是有所不同的.

为了证明本文的主要结果, 我们需要介绍下面的一个重要不等式(见文献 [18]). 对于任意的 $x\in\mathbb{R}^n$, $p(\cdot)\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, 则存在一个常数 $C>0$, 使得

$$\|\chi_{B(x,r)}(\cdot)\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\leq Cr^{\theta_p(x,r)}. \tag{1.8}$$

定义 4 [21] 变指标 $\mathrm{BMO}_{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 空间定义为

$$\mathrm{BMO}_{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)=\{f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n):\|f\|_{\mathrm{BMO}_{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}=\sup_{x\in\mathbb{R}^n,r>0}\frac{\|(f-f_{B(x,r)})\chi_{B(x,r)}\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}}{\|\chi_{B(x,r)}\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}}<\infty\}.$$

注 2 设 $p(\cdot)\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, 则范数 $\|\cdot\|_{\mathrm{BMO}_{p(\cdot)}}$ 和 $\|\cdot\|_*$ 是相互等价的(见文献 [21]).

本文的主要结果如下.

定理 1 设 Ω 满足 (1.1) 和 (1.3), $p(\cdot)\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. 若 u_1 和 u_2 满足条件

$$\int_r^\infty\frac{\operatorname{ess\,inf}_{s<t<\infty}u_1(x,t)t^{\theta_p(x,t)}}{s^{\theta_p(x,s)}}\frac{\mathrm{d}s}{s}\leq C_0u_2(x,r), \tag{1.9}$$

其中 C_0 是不依赖于 x 和 r 的常数. 则 μ_Ω 是从 $\mathcal{M}^{p(\cdot),u_1}(\mathbb{R}^n)$ 到 $\mathcal{M}^{p(\cdot),u_2}(\mathbb{R}^n)$ 上有界的.

定理 2 设 Ω 满足 (1.1) 和 (1.3), $p(\cdot)\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $\vec{b}\in\mathrm{BMO}^m(\mathbb{R}^n)$. 若 u_1 和 u_2 满足条件

$$\int_r^\infty\left(1+\ln\frac{s}{r}\right)^m\frac{\operatorname{ess\,inf}_{s<t<\infty}u_1(x,t)t^{\theta_p(x,t)}}{s^{\theta_p(x,s)}}\frac{\mathrm{d}s}{s}\leq C_0u_2(x,r), \tag{1.10}$$

其中 C_0 是不依赖于 x 和 r 的常数. 则 $\mu_{\Omega,\vec{b}}$ 是从 $\mathcal{M}^{p(\cdot),u_1}(\mathbb{R}^n)$ 到 $\mathcal{M}^{p(\cdot),u_2}(\mathbb{R}^n)$ 上有界的.

特别地, 当 $b_i=b$, $m=1$ 时, 由定理 2, 我们有下面的结果.

推论 1 设 $[b,\mu_\Omega]$ 由 (1.4) 所定义, Ω 满足 (1.1) 和 (1.3), $p(\cdot)\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $b\in\mathrm{BMO}$. 若 u_1 和 u_2 满足条件

$$\int_r^\infty\left(1+\ln\frac{s}{r}\right)\frac{\operatorname{ess\,inf}_{s<t<\infty}u_1(x,t)t^{\theta_p(x,t)}}{s^{\theta_p(x,s)}}\frac{\mathrm{d}s}{s}\leq C_0u_2(x,r), \tag{1.11}$$

其中 C_0 是不依赖于 x 和 r 的常数. 则 $[b,\mu_\Omega]$ 是从 $\mathcal{M}^{p(\cdot),u_1}(\mathbb{R}^n)$ 到 $\mathcal{M}^{p(\cdot),u_2}(\mathbb{R}^n)$ 上有界的.

2. 定理的证明

为了证明主要定理, 我们需要以下的引理.

引理 2.1(广义 Hölder 不等式) [6] 设 $p(\cdot)\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, 若 $f\in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, $g\in L^{p'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, 则 fg 在 $\mathbb{R}^n$ 上可积, 且有

$$\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)g(x)|\mathrm{d}x\le r_p\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\|g\|_{L^{p'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)},$$

其中 $r_p=1+\frac{1}{p^-}-\frac{1}{p^+}$.

引理 2.2 [7] 设 $p(\cdot)\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, 则存在一个常数 $C>0$, 使得对 $\mathbb{R}^n$ 中所有的球 B 和所有的可测子集 $S\subset B$, 都有

$$\frac{\|\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}}{\|\chi_S\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}}\le C\frac{|B|}{|S|},$$

$$\frac{\|\chi_S\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}}{\|\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}}\le C\left(\frac{|S|}{|B|}\right)^{\delta_1},$$

$$\frac{\|\chi_S\|_{L^{p'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}}{\|\chi_B\|_{L^{p'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}}\le C\left(\frac{|S|}{|B|}\right)^{\delta_2},$$

其中 δ_1,δ_2 是常数且有 $0<\delta_1,\delta_2<1$.

引理 2.3 [10] 设 $p(\cdot)$, $p_i(\cdot)\in\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$, $i=1,2,\ldots,m$, 满足 $1/p(\cdot)=1/p_1(\cdot)+\cdots+1/p_m(\cdot)$. 那么当 $f_i\in L^{p_i(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, 有

$$\left\|\prod_{i=1}^m f_i\right\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\le C\prod_{i=1}^m\|f_i\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.$$

引理 2.4 [22] 设 f 是 E 上的实值非负可测函数, 则有

$$\left(\operatorname*{ess\,inf}_{x\in E}f(x)\right)^{-1}=\operatorname*{ess\,sup}_{x\in E}\frac{1}{f(x)}.$$

给定一个权函数 ϖ, 我们首先介绍以下的两类加权 Hardy 算子.

$$H_\varpi g(t):=\int_t^\infty g(s)\varpi(s)\mathrm{d}s,\ \ t\in(0,\infty),$$

$$H_\varpi^\star g(t):=\int_t^\infty\left(1+\ln\frac{s}{t}\right)^m g(s)\varpi(s)\mathrm{d}s,\ \ t\in(0,\infty).$$

引理 2.5 [23] 设 v_1,v_2 和 ϖ 是 $(0,\infty)$ 上的权函数, $v_1(t)$ 在原点之外是有界的. 对于某个常数 $C>0$ 和 $(0,\infty)$ 上的所有非负, 非增函数 g, 下述不等式

$$\sup_{t>0}v_2(t)H_\varpi g(t)\le C\sup_{t>0}v_1(t)g(t)$$

成立当且仅当

$$\sup_{t>0} v_2(t) \int_t^\infty \frac{\varpi(s)\mathrm{d}s}{\sup_{s<\sigma<\infty} v_1(\sigma)} < \infty.$$

引理 2.6 [19, 24] 设 v_1, v_2 和 ϖ 是 $(0,\infty)$ 上的权函数, $v_1(t)$ 在原点之外是有界的. 对于某个常数 $C>0$ 和 $(0,\infty)$ 上的所有非负, 非增函数 g, 下述不等式

$$\sup_{t>0} v_2(t) H_\varpi^\star g(t) \le C \sup_{t>0} v_1(t) g(t)$$

成立当且仅当

$$\sup_{t>0} v_2(t) \int_t^\infty \left(1+\ln\frac{s}{t}\right)^m \frac{\varpi(s)\mathrm{d}s}{\sup_{s<\sigma<\infty} v_1(\sigma)} < \infty.$$

引理 2.7 [24] 设 $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$, 则存在一个常数 $C>0$, 使得

$$|b_{B(x,r)} - b_{B(x,s)}| \le C\|b\|_* \ln\frac{s}{t},\ \ 0<2r<s,$$

其中 C 是不依赖于 b, x, r 和 s.

引理 2.8 [15] 设 Ω 满足 (1.1) 和 (1.3), $p(\cdot) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. 则存在一个常数 $C>0$, 使得

$$\|\mu_\Omega(f)\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \le C\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.$$

引理 2.9 [10] 设 $\Omega \in \mathrm{Lip}_\alpha(S^{n-1})$ $(0<\alpha\le 1)$, $p(\cdot)\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $\vec{b} \in \mathrm{BMO}^m(\mathbb{R}^n)$. 则存在一个常数 $C>0$, 使得

$$\|\mu_{\Omega,\vec{b}}(f)\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \le C\|\vec{b}\|_*\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)},$$

其中 $\|\vec{b}\|_* = \prod_{j=1}^m \|b_j\|_*$.

定理 1 的证明 设 $p(\cdot)\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. 对于任意的 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 和 $r>0$, $B(x_0,r)$ 表示以 x_0 为中心, r 为半径的球体. 对任意的 $f \in L^{p(\cdot)}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, 把 $f(x)$ 分解为

$$f = f_1 + f_2,\ \ f_1 = f\chi_{B(x_0,2r)},\ \ f_2 = f\chi_{B(x_0,2r)^C},\ \ r>0. \tag{3.1}$$

进而有,

$$\|\chi_{B(x_0,r)}\mu_\Omega(f)\|_{L^{p(\cdot)}} \le \|\chi_{B(x_0,r)}\mu_\Omega(f_1)\|_{L^{p(\cdot)}} + \|\chi_{B(x_0,r)}\mu_\Omega(f_2)\|_{L^{p(\cdot)}} =: \mathrm{E}+\mathrm{F}.$$

下面分别估计 E 和 F. 对于 E, 利用 μ_Ω 的 $(L^{p(\cdot)}, L^{p(\cdot)})$ 有界性 (引理 2.8), 有

$$\|\chi_{B(x_0,r)}\mu_\Omega(f_1)\|_{L^{p(\cdot)}} \le \|\mu_\Omega(f_1)\|_{L^{p(\cdot)}} \le C\|\chi_{B(x_0,2r)}f\|_{L^{p(\cdot)}},$$

其中常数 $C>0$ 是不依赖于 f.

另一方面, 由引理 2.1, 引理 2.2 和 (1.8), 容易得到

$$\begin{aligned}
\|\chi_{B(x_0,2r)}f\|_{L^{p(\cdot)}} &\leq C|B(x_0,r)|\|\chi_{B(x_0,2r)}f\|_{L^{p(\cdot)}}\int_{2r}^{\infty}\frac{\mathrm{d}s}{s^{n+1}} \\
&\leq C|B(x_0,r)|\int_{2r}^{\infty}\|\chi_{B(x_0,s)}f\|_{L^{p(\cdot)}}\frac{\mathrm{d}s}{s^{n+1}} \\
&\leq Cr^{\theta_p(x_0,r)}\|\chi_{B(x_0,r)}\|_{L^{p'(\cdot)}}\int_{2r}^{\infty}\|\chi_{B(x_0,s)}f\|_{L^{p(\cdot)}}\frac{\mathrm{d}s}{s^{n+1}} \\
&\leq Cr^{\theta_p(x_0,r)}\int_{2r}^{\infty}\|\chi_{B(x_0,s)}f\|_{L^{p(\cdot)}}\|\chi_{B(x_0,s)}\|_{L^{p'(\cdot)}}\frac{\mathrm{d}s}{s^{n+1}} \\
&\leq Cr^{\theta_p(x_0,r)}\int_{2r}^{\infty}\|\chi_{B(x_0,s)}f\|_{L^{p(\cdot)}}t^{-\theta_p(x_0,s)}\frac{\mathrm{d}s}{s}. \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

其次估计 F. 注意到当 $x\in B(x_0,r)$, $y\in B(x_0,2r)^C$, 有

$$\frac{1}{2}|x_0-y|\leq|x-y|\leq\frac{3}{2}|x_0-y|. \qquad (3.3)$$

因此

$$\begin{aligned}
|\mu_\Omega(f_2)(x)| \leq& \left(\int_0^{|x_0-y|}\left|\int_{|x-y|\leq t}\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1}}f_2(y)\mathrm{d}y\right|^2\frac{\mathrm{d}t}{t^3}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&+\left(\int_{|x_0-y|}^{\infty}\left|\int_{|x-y|\leq t}\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1}}f_2(y)\mathrm{d}y\right|^2\frac{\mathrm{d}t}{t^3}\right)^{\frac{1}{2}} =: \mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2.
\end{aligned}$$

对于 I_1. 由 (3.3), 可得 $|x-y|\approx|x_0-y|$. 结合中值定理, 有

$$\left|\frac{1}{|x-y|^2}-\frac{1}{|x_0-y|^2}\right|\leq C\frac{|x-x_0|}{|x-y|^3}. \qquad (3.4)$$

注意到 $|x-y|\approx|x_0-y|$, 由 Minkowski's 不等式和 (3.4), 可得

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_1 &\leq C\int_{B(x_0,2r)^C}\frac{|\Omega(x-y)|}{|x-y|^{n-1}}|f(y)|\left(\int_{|x-y|}^{|x_0-y|}\frac{\mathrm{d}t}{t^3}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y \\
&\leq C\int_{B(x_0,2r)^C}\frac{|\Omega(x-y)|}{|x-y|^{n-1}}|f(y)|\frac{|x-x_0|^{1/2}}{|x-y|^{3/2}}\mathrm{d}y \\
&\leq C\frac{1}{|x_0-y|^{1/2}}\int_{B(x_0,2r)^C}\frac{|\Omega(x-y)|}{|x_0-y|^n}|f(y)|\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

类似地, 我们考虑 I_2,

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_2 &\leq C\int_{B(x_0,2r)^C}\frac{|\Omega(x-y)|}{|x-y|^{n-1}}|f(y)|\left(\int_{|x_0-y|}^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^3}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y \\
&\leq C\int_{B(x_0,2r)^C}\frac{|\Omega(x-y)|}{|x_0-y|^n}|f(y)|\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

因为 $\Omega \in \mathrm{Lip}_\alpha(S^{n-1}) \subset L^\infty(S^{n-1})$, 故 Ω 是有界的. 结合 I_1 和 I_2 的估计, 有

$$\begin{aligned}|\mu_\Omega(f_2)(x)| &\leq C\int_{B(x_0,2r)^C}\frac{|\Omega(x-y)|}{|x_0-y|^n}|f(y)|\mathrm{d}y\\ &\leq C\int_{B(x_0,2r)^C}\frac{|f(y)|}{|x_0-y|^n}\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

由 Fubini's 定理, 引理 2.1 和 (1.8), 容易得到

$$\begin{aligned}\int_{B(x_0,2r)^C}\frac{|f(y)|}{|x_0-y|^n}\mathrm{d}y &\approx \int_{B(x_0,2r)^C}|f(y)|\left(\int_{|x_0-y|}^\infty\frac{\mathrm{d}s}{s^{n+1}}\right)\mathrm{d}y\\ &\approx \int_{2r}^\infty\int_{2r\leq|x_0-y|\leq s}|f(y)|\mathrm{d}y\frac{\mathrm{d}s}{s^{n+1}}\\ &\leq C\int_{2r}^\infty\int_{B(x_0,s)}|f(y)|\mathrm{d}y\frac{\mathrm{d}s}{s^{n+1}}\\ &\leq C\int_{2r}^\infty\|\chi_{B(x_0,s)}f\|_{L^{p(\cdot)}}t^{-\theta_p(x_0,s)}\frac{\mathrm{d}s}{s}.\end{aligned}\tag{3.5}$$

利用 (1.8) 得

$$\begin{aligned}\|\chi_{B(x_0,r)}\mu_\Omega(f_2)\|_{L^{p(\cdot)}} &\leq C\|\chi_{B(x_0,r)}\|_{L^{p(\cdot)}}\int_{2r}^\infty\|\chi_{B(x_0,s)}f\|_{L^{p(\cdot)}}t^{-\theta_p(x_0,s)}\frac{\mathrm{d}s}{s}\\ &\leq Cr^{\theta_p(x_0,r)}\int_{2r}^\infty\|\chi_{B(x_0,s)}f\|_{L^{p(\cdot)}}t^{-\theta_p(x_0,s)}\frac{\mathrm{d}s}{s}.\end{aligned}$$

从而,

$$\begin{aligned}\|\chi_{B(x_0,r)}\mu_\Omega(f)\|_{L^{p(\cdot)}} &\leq C\|\chi_{B(x_0,2r)}f\|_{L^{p(\cdot)}}+Cr^{\theta_p(x_0,r)}\int_{2r}^\infty\|\chi_{B(x_0,s)}f\|_{L^{p(\cdot)}}t^{-\theta_p(x_0,s)}\frac{\mathrm{d}s}{s}\\ &\leq Cr^{\theta_p(x_0,r)}\int_{2r}^\infty\|\chi_{B(x_0,s)}f\|_{L^{p(\cdot)}}t^{-\theta_p(x_0,s)}\frac{\mathrm{d}s}{s}.\end{aligned}$$

设

$$v_2(r)=u_2^{-1}(x_0,r),\quad v_1(t)=u_1^{-1}(x_0,t)t^{-\theta_p(x_0,t)},$$
$$g(s)=\|\chi_{B(x,s)}f\|_{L^{p(\cdot)}},\quad \varpi(s)=s^{-1}t^{-\theta_p(x_0,s)}.$$

由引理 2.4, 可得

$$\frac{1}{\sup_{s<t<\infty}v_1(t)}=\mathrm{ess}\inf_{s<t<\infty}u_1(x,t)t^{\theta_p(x,t)}.\tag{3.6}$$

结合 (1.9) 和 (3.6), 容易得到下面的不等式

$$\sup_{r>0}v_2(r)\int_r^\infty\frac{\varpi(s)\mathrm{d}s}{\sup_{s<t<\infty}v_1(t)}<\infty$$

是成立的. 所以, 由引理 2.5 可得

$$
\begin{aligned}
\|\mu_\Omega(f)\|_{\mathcal{M}^{p(\cdot),u_2}} &\le C\sup_{x\in\mathbb{R}^n,r>0}\frac{1}{u_2(x,r)}\int_r^\infty \|\chi_{B(x_0,s)}f\|_{L^{p(\cdot)}}t^{-\theta_p(x_0,s)}\frac{\mathrm{d}s}{s}\\
&\le C\sup_{x\in\mathbb{R}^n,r>0}\frac{1}{u_1(x,r)r^{\theta_p(x_0,r)}}\|\chi_{B(x,r)}f\|_{L^{p(\cdot)}}\\
&= C\|f\|_{\mathcal{M}^{p(\cdot),u_1}}.
\end{aligned}
$$

定理 2 的证明 不失一般性, 我们仅考虑 $m=2$ 的情况. 对任意的 $f\in L^{p(\cdot)}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, 把 $f(x)$ 分解为 $f=f_1+f_2$, $f_1=f\chi_{B(x_0,2r)}$, $f_2=f\chi_{B(x_0,2r)^C}$. 进而有

$$
\|\chi_{B(x_0,r)}\mu_{\Omega,\vec{b}}(f)\|_{L^{p(\cdot)}}\le\|\chi_{B(x_0,r)}\mu_{\Omega,\vec{b}}(f_1)\|_{L^{p(\cdot)}}+\|\chi_{B(x_0,r)}\mu_{\Omega,\vec{b}}(f_2)\|_{L^{p(\cdot)}}.=:\mathrm{G}+\mathrm{H}.
$$

下面分别估计 G 和 H. 对于 G, 利用 $\mu_{\Omega,\vec{b}}$ 的 $(L^{p(\cdot)},L^{p(\cdot)})$ 有界性 (引理 2.9), 有

$$
\begin{aligned}
\|\chi_{B(x_0,r)}\mu_{\Omega,\vec{b}}(f_1)\|_{L^{p(\cdot)}} &\le \|\mu_{\Omega,\vec{b}}(f_1)\|_{L^{p(\cdot)}}\\
&\le C\|\vec{b}\|_*\|\chi_{B(x_0,2r)}f\|_{L^{p(\cdot)}},
\end{aligned}
$$

其中常数 $C>0$ 是不依赖于 f.

对于 H. 为了方便计算, 用 $(b_i)_B$ 表示函数 b_i, $i=1,2$ 在球体 $B(x_0,r)$ 上的平均. 因此有

$$
\begin{aligned}
\mu_{\Omega,\vec{b}}(f_2)(x) &= (b_1(x)-(b_1)_B)(b_2(x)-(b_2)_B)\mu_\Omega(f_2)(x)\\
&\quad -(b_1(x)-(b_1)_B)\mu_\Omega((b_2(\cdot)-(b_2)_B)(f_2))(x)\\
&\quad +(b_2(x)-(b_2)_B)\mu_\Omega((b_1(\cdot)-(b_1)_B)(f_2))(x)\\
&\quad -\mu_\Omega((b_1(\cdot)-(b_1)_B)(b_2(\cdot)-(b_2)_B)(f_2))(x).
\end{aligned}
$$

注意到当 $x\in B(x_0,r)$, $y\in B(x_0,2r)^C$ 时, 有 $\frac{1}{2}|x_0-y|\le|x-y|\le\frac{3}{2}|x_0-y|$. 由定理 1 中关于 $|\mu_\Omega(f_2)(x)|$ 的估计, 可得

$$
\begin{aligned}
|\mu_{\Omega,\vec{b}}(f_2)(x)| &\le C|b_1(x)-(b_1)_B||b_2(x)-(b_2)_B|\int_{B(x_0,2r)^C}\frac{|f(y)|}{|x_0-y|^n}\mathrm{d}y\\
&\quad +C|b_1(x)-(b_1)_B|\int_{B(x_0,2r)^C}|b_2(y)-(b_2)_B|\frac{|f(y)|}{|x_0-y|^n}\mathrm{d}y\\
&\quad +C|b_2(x)-(b_2)_B|\int_{B(x_0,2r)^C}|b_1(y)-(b_1)_B|\frac{|f(y)|}{|x_0-y|^n}\mathrm{d}y\\
&\quad +C\int_{B(x_0,2r)^C}|b_1(y)-(b_1)_B||b_2(y)-(b_2)_B|\frac{|f(y)|}{|x_0-y|^n}\mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

于是, 我们有

$$
\begin{aligned}
&\|\chi_{B(x_0,r)}\mu_{\Omega,\vec{b}}(f_2)\|_{L^{p(\cdot)}}\\
\leq\ & C\left\|\prod_{i=1}^{2} b_i(\cdot)-(b_i)_B\chi_{B(x_0,r)}\right\|_{L^{p(\cdot)}}\int_{B(x_0,2r)^C}\frac{|f(y)|}{|x_0-y|^n}\mathrm{d}y\\
&+C\|b_1(\cdot)-(b_1)_B\chi_{B(x_0,r)}\|_{L^{p(\cdot)}}\int_{B(x_0,2r)^C}|b_2(y)-(b_2)_B|\frac{|f(y)|}{|x_0-y|^n}\mathrm{d}y\\
&+C\|b_2(\cdot)-(b_2)_B\chi_{B(x_0,r)}\|_{L^{p(\cdot)}}\int_{B(x_0,2r)^C}|b_1(y)-(b_1)_B|\frac{|f(y)|}{|x_0-y|^n}\mathrm{d}y\\
&+C\|\chi_{B(x_0,r)}\|_{L^{p(\cdot)}}\int_{B(x_0,2r)^C}\prod_{i=1}^{2}|b_i(y)-(b_i)_B|\frac{|f(y)|}{|x_0-y|^n}\mathrm{d}y\\
:=\ & \mathrm{H}_1+\mathrm{H}_2+\mathrm{H}_3+\mathrm{H}_4.
\end{aligned}
$$

对于 H_1, 注意到 $p(\cdot)\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, 利用引理 2.3, 有

$$
\mathrm{H}_1\leq C\prod_{i=1}^{2}\left\|b_i(\cdot)-(b_i)_B\chi_{B(x_0,r)}\right\|_{L^{2p(\cdot)}}\int_{B(x_0,2r)^C}\frac{|f(y)|}{|x_0-y|^n}\mathrm{d}y.
$$

由注 2, (1.8) 和 (3.5), 可得

$$
\begin{aligned}
\mathrm{H}_1\ &\leq\ C\|\vec{b}\|_*\|\chi_{B(x_0,r)}\|^2_{L^{2p(\cdot)}}\int_{B(x_0,2r)^C}\frac{|f(y)|}{|x_0-y|^n}\mathrm{d}y\\
&\leq\ C\|\vec{b}\|_* r^{\theta_p(x_0,r)}\int_{B(x_0,2r)^C}\frac{|f(y)|}{|x_0-y|^n}\mathrm{d}y\\
&\leq\ C\|\vec{b}\|_* r^{\theta_p(x_0,r)}\int_{2r}^{\infty}\|\chi_{B(x_0,s)}f\|_{L^{p(\cdot)}}t^{-\theta_p(x_0,s)}\frac{\mathrm{d}s}{s}
\end{aligned}
$$

对于 H_2, 类似于 (3.5), 有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{H}_2\ &\leq\ C\|b_1\|_* r^{\theta_p(x_0,r)}\int_{B(x_0,2r)^C}|b_2(y)-(b_2)_B|\frac{|f(y)|}{|x_0-y|^n}\mathrm{d}y\\
&\leq\ C\|b_1\|_* r^{\theta_p(x_0,r)}\int_{B(x_0,2r)^C}|b_2(y)-(b_2)_B||f(y)|\left(\int_{|x_0-y|}^{\infty}\frac{\mathrm{d}s}{s^{n+1}}\right)\mathrm{d}y\\
&\leq\ C\|b_1\|_* r^{\theta_p(x_0,r)}\int_{2r}^{\infty}\int_{B(x_0,s)}|b_2(y)-(b_2)_B||f(y)|\mathrm{d}y\frac{\mathrm{d}s}{s^{n+1}}.
\end{aligned}
$$

事实上, 由注 2, 引理 2.7, 可得

$$\begin{aligned}\|b_2(\cdot)-(b_2)_B\chi_{B(x_0,s)}\|_{L^{p'(\cdot)}} &\le C\|b_2(\cdot)-(b_2)_{B(x_0,s)}\|_{L^{p'(\cdot)}(B(x_0,s))}\\ &\quad +C\|(b_2)_{B(x_0,s)}-(b_2)_B\|_{L^{p'(\cdot)}(B(x_0,s))}\\ &\le C\|b_2\|_*\|\chi_{B(x_0,s)}\|_{L^{p'(\cdot)}}\left(1+\ln\frac{s}{r}\right). \end{aligned}\tag{3.7}$$

由引理 2.1, 注 2 和 (3.7), 容易得到

$$\begin{aligned}\mathrm{H}_2 &\le C\|b_1\|_* r^{\theta_p(x_0,r)}\int_{2r}^{\infty}\|\chi_{B(x_0,s)}f\|_{L^{p(\cdot)}}\|b_2(\cdot)-(b_2)_B\chi_{B(x_0,s)}\|_{L^{p'(\cdot)}}\frac{\mathrm{d}s}{s^{n+1}}\\ &\le C\prod_{i=1}^{2}\|b_i\|_* r^{\theta_p(x_0,r)}\int_{2r}^{\infty}\|\chi_{B(x_0,s)}f\|_{L^{p(\cdot)}}\|\chi_{B(x_0,s)}\|_{L^{p'(\cdot)}}\left(1+\ln\frac{s}{r}\right)\frac{\mathrm{d}s}{s^{n+1}}\\ &\le C\|\vec{b}\|_* r^{\theta_p(x_0,r)}\int_{2r}^{\infty}\left(1+\ln\frac{s}{r}\right)\|\chi_{B(x_0,s)}f\|_{L^{p(\cdot)}}t^{-\theta_p(x_0,s)}\frac{\mathrm{d}s}{s^{n+1}}.\end{aligned}$$

对于 H_3, 应用与上述估计相同的讨论方法, 可得

$$\begin{aligned}\mathrm{H}_3 &\le C\|b_2\|_* r^{\theta_p(x_0,r)}\int_{B(x_0,2r)^C}|b_1(y)-(b_1)_B|\frac{|f(y)|}{|x_0-y|^n}\mathrm{d}y\\ &\le C\|b_2\|_* r^{\theta_p(x_0,r)}\int_{2r}^{\infty}\int_{B(x_0,s)}|b_1(y)-(b_1)_B||f(y)|\mathrm{d}y\frac{\mathrm{d}s}{s^{n+1}}\\ &\le C\|b_2\|_* r^{\theta_p(x_0,r)}\int_{2r}^{\infty}\|\chi_{B(x_0,s)}f\|_{L^{p(\cdot)}}\|b_1(\cdot)-(b_1)_B\chi_{B(x_0,s)}\|_{L^{p'(\cdot)}}\frac{\mathrm{d}s}{s^{n+1}}\\ &\le C\|\vec{b}\|_* r^{\theta_p(x_0,r)}\int_{2r}^{\infty}\left(1+\ln\frac{s}{r}\right)\|\chi_{B(x_0,s)}f\|_{L^{p(\cdot)}}t^{-\theta_p(x_0,s)}\frac{\mathrm{d}s}{s^{n+1}}.\end{aligned}$$

最后我们估计 H_4. 由 (1.8) 和引理 2.1, 与 (3.5) 类似, 可得

$$\begin{aligned}\mathrm{H}_4 &\le Cr^{\theta_p(x_0,r)}\int_{B(x_0,2r)^C}\prod_{i=1}^{2}|b_i(y)-(b_i)_B|\frac{|f(y)|}{|x_0-y|^n}\mathrm{d}y\\ &\le Cr^{\theta_p(x_0,r)}\int_{B(x_0,2r)^C}\prod_{i=1}^{2}|b_i(y)-(b_i)_B||f(y)|\left(\int_{|x_0-y|}^{\infty}\frac{\mathrm{d}s}{s^{n+1}}\right)\mathrm{d}y\\ &\le Cr^{\theta_p(x_0,r)}\int_{2r}^{\infty}\int_{B(x_0,s)}\prod_{i=1}^{2}|b_i(y)-(b_i)_B||f(y)|\mathrm{d}y\frac{\mathrm{d}s}{s^{n+1}}\\ &\le Cr^{\theta_p(x_0,r)}\int_{2r}^{\infty}\|\chi_{B(x_0,s)}f\|_{L^{p(\cdot)}}\left\|\prod_{i=1}^{2}|b_i(\cdot)-(b_i)_B|\chi_{B(x_0,s)}\right\|_{L^{p'(\cdot)}}\frac{\mathrm{d}s}{s^{n+1}}.\end{aligned}$$

由引理 2.3, 引理 2.7 和注 2, 有

$$
\begin{aligned}
&\int_{2r}^{\infty}\|\chi_{B(x_0,s)}f\|_{L^{p(\cdot)}}\left\|\prod_{i=1}^{2}|b_i(\cdot)-(b_i)_B|\chi_{B(x_0,s)}\right\|_{L^{p'(\cdot)}}\frac{\mathrm{d}s}{s^{n+1}}\\
\le\ & C\int_{2r}^{\infty}\|\chi_{B(x_0,s)}f\|_{L^{p(\cdot)}}\left\|\prod_{i=1}^{2}|b_i(\cdot)-(b_i)_{B(x_0,s)}|\chi_{B(x_0,s)}\right\|_{L^{p'(\cdot)}}\frac{\mathrm{d}s}{s^{n+1}}\\
&+C\int_{2r}^{\infty}\|\chi_{B(x_0,s)}f\|_{L^{p(\cdot)}}|(b_1)_{B(x_0,s)}-(b_1)_B|\|b_2(\cdot)-(b_2)_{B(x_0,s)}\chi_{B(x_0,s)}\|_{L^{p'(\cdot)}}\frac{\mathrm{d}s}{s^{n+1}}\\
&+C\int_{2r}^{\infty}\|\chi_{B(x_0,s)}f\|_{L^{p(\cdot)}}|(b_2)_{B(x_0,s)}-(b_2)_B|\|b_1(\cdot)-(b_1)_{B(x_0,s)}\chi_{B(x_0,s)}\|_{L^{p'(\cdot)}}\frac{\mathrm{d}s}{s^{n+1}}\\
&+C\int_{2r}^{\infty}\|\chi_{B(x_0,s)}f\|_{L^{p(\cdot)}}\left\|\prod_{i=1}^{2}|(b_i)_{B(x_0,s)}-(b_i)_B|\chi_{B(x_0,s)}\right\|_{L^{p'(\cdot)}}\frac{\mathrm{d}s}{s^{n+1}}\\
\le\ & C\int_{2r}^{\infty}\|\chi_{B(x_0,s)}f\|_{L^{p(\cdot)}}\prod_{i=1}^{2}\left\|b_i(\cdot)-(b_i)_{B(x_0,s)}\chi_{B(x_0,s)}\right\|_{L^{2p'(\cdot)}}\frac{\mathrm{d}s}{s^{n+1}}\\
&+C\|b_1\|_*\|b_2\|_*\int_{2r}^{\infty}\ln\frac{s}{r}\|\chi_{B(x_0,s)}f\|_{L^{p(\cdot)}}\|\chi_{B(x_0,s)}\|_{L^{p'(\cdot)}}\frac{\mathrm{d}s}{s^{n+1}}\\
&+C\int_{2r}^{\infty}\prod_{i=1}^{2}|(b_i)_{B(x_0,s)}-(b_i)_B|\|\chi_{B(x_0,s)}f\|_{L^{p(\cdot)}}\|\chi_{B(x_0,s)}\|_{L^{p'(\cdot)}}\frac{\mathrm{d}s}{s^{n+1}}\\
\le\ & C\|\vec{b}\|_*\int_{2r}^{\infty}\left(1+\ln\frac{s}{r}\right)^2\|\chi_{B(x_0,s)}f\|_{L^{p(\cdot)}}\|\chi_{B(x_0,s)}\|_{L^{p'(\cdot)}}\frac{\mathrm{d}s}{s^{n+1}}\\
\le\ & C\|\vec{b}\|_*\int_{2r}^{\infty}\left(1+\ln\frac{s}{r}\right)^2\|\chi_{B(x_0,s)}f\|_{L^{p(\cdot)}}t^{-\theta_p(x_0,s)}\frac{\mathrm{d}s}{s}.
\end{aligned}
$$

于是

$$
\mathrm{H}_4\le C\|\vec{b}\|_*r^{\theta_p(x_0,r)}\int_{2r}^{\infty}\left(1+\ln\frac{s}{r}\right)^2\|\chi_{B(x_0,s)}f\|_{L^{p(\cdot)}}t^{-\theta_p(x_0,s)}\frac{\mathrm{d}s}{s}.
$$

结合 H_1–H_4 的估计, 可得

$$
\|\chi_{B(x_0,r)}\mu_{\Omega,\vec{b}}(f_2)\|_{L^{p(\cdot)}}\le C\|\vec{b}\|_*r^{\theta_p(x_0,r)}\int_{2r}^{\infty}\left(1+\ln\frac{s}{r}\right)^2\|\chi_{B(x_0,s)}f\|_{L^{p(\cdot)}}t^{-\theta_p(x_0,s)}\frac{\mathrm{d}s}{s}.
$$

因此, 由 (3.2)可得

$$
\|\chi_{B(x_0,r)}\mu_{\Omega,\vec{b}}(f)\|_{L^{p(\cdot)}}\le C\|\vec{b}\|_*r^{\theta_p(x_0,r)}\int_{2r}^{\infty}\left(1+\ln\frac{s}{r}\right)^2\|\chi_{B(x_0,s)}f\|_{L^{p(\cdot)}}t^{-\theta_p(x_0,s)}\frac{\mathrm{d}s}{s}.
$$

同理设

$$
v_2(r)=u_2^{-1}(x_0,r),\quad v_1(t)=u_1^{-1}(x_0,t)t^{-\theta_p(x_0,t)},
$$

$$
g(s)=\|\chi_{B(x,s)}f\|_{L^{p(\cdot)}},\quad \varpi(s)=s^{-1}s^{-\theta_p(x_0,s)}.
$$

因此, 由引理 2.6, 可得

$$\begin{aligned}\|\mu_{\Omega,\vec{b}}(f)\|_{\mathcal{M}^{p(\cdot),u_2}} &\leq C\|\vec{b}\|_* \sup_{x\in\mathbb{R}^n,r>0}\frac{1}{u_2(x,r)}\int_r^\infty\left(1+\ln\frac{s}{r}\right)^2\|\chi_{B(x_0,s)}f\|_{L^{p(\cdot)}}t^{-\theta_p(x_0,s)}\frac{\mathrm{d}s}{s}\\ &\leq C\|\vec{b}\|_* \sup_{x\in\mathbb{R}^n,r>0}\frac{1}{u_1(x,r)r^{\theta_p(x_0,r)}}\|\chi_{B(x,r)}f\|_{L^{p(\cdot)}}\\ &= C\|\vec{b}\|_*\|f\|_{\mathcal{M}^{p(\cdot),u_1}}.\end{aligned}$$

参考文献

[1] Stein, E. (1958) On the Functions of Littlewood-Paley, Lusin and Marcinkiewicz. *Transactions of the American Mathematical Society*, **88**, 430-692.
https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1958-0112932-2

[2] Benedek, A., Calderón, A. and Panzone, R. (1962) Convolution Operators and Their Commutators on Generalized Local Morrey Spaces. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **48**, 356-365. https://doi.org/10.1073/pnas.48.3.356

[3] Wang, L.W. (2014) Marcinkiewicz Integral Operators and Commutators on Herz Spaces with Variable Exponents. *Journal of Function Spaces*, **2014**, Article ID: 430365.
https://doi.org/10.1155/2014/430365

[4] 辛银萍, 陶双平. 带变量核的Marcinkiewicz积分算子在变指标Herz型Hardy空间上的有界性[J]. 山东大学学报(理学版), 2018, 53(6): 38-43.

[5] Nafis, H., Rafeiro, H. and Zaighum, M.A. (2021) Boundedness of the Marcinkiewicz Integral on Grand Variable Herz Spaces. *Journal of Mathematical Inequalities*, **15**, 739-753.
https://doi.org/10.7153/jmi-2021-15-52

[6] Shao, X.K. and Tao, S.P. (2021) Weighted Estimates of Variable Kernel Fractional Integral and Its Commutators on Vanishing Generalized Morrey Spaces with Variable Exponent. *Chinese Annals of Mathematics, Series B*, **42**, 451-470. https://doi.org/10.1007/s11401-021-0268-3

[7] Wang, H.B. and Yan, D.Y. (2018) Commutators of Marcinkiewicz Integrals with Rough Kernels on Herz-Type Hardy Spaces with Variable Exponent. *Journal of Mathematical Inequalities*, **12**, 1173-1188. https://doi.org/10.7153/jmi-2018-12-89

[8] Pérez, C. and Trujillo-González, R. (2002) Sharp Weighted Estimates for Multilinear Commutators. *Journal of the London Mathematical Society*, **65**, 672-692.
https://doi.org/10.1112/S0024610702003174

[9] Zhang, P. (2008) Weighted Estimates for Multilinear Commutators of Marcinkiewicz Integral. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, **24**, 1387-1400.
https://doi.org/10.1007/s10114-008-6649-7

[10] Wang, L.W. and Shu, L.S. (2019) On Multilinear Commutators of Marcinkiewicz Integrals in Variable Exponent Lebesgue and Herz Type Spaces. *Mathematical Inequalities and Applications*, **22**, 77-96. https://doi.org/10.7153/mia-2019-22-06

[11] Fazio, G., Hakim, D. and Sawano, Y. (2017) Elliptic Equations with Discontinuous Coefficients in Generalized Morrey Spaces. *European Journal of Mathematics*, **3**, 728-762. https://doi.org/10.1007/s40879-017-0168-y

[12] Eroglu, A., Omarova, M. and Muradova, S. (2017) Elliptic Equations with Measurable Coefficients in Generalized Weighted Morrey Spaces. *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan*, **43**, 197-213.

[13] Morrey, C. (1838) On Solutions of Quasi-Linear Elliptic Partial Differential Equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, **43**, 126-166. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1938-1501936-8

[14] Almeida, A., Hasanov, J. and Samko, S. (2008) Maximal and Potential Operators in Variable Exponent Morrey Spaces. *Georgian Mathematical Journal*, **15**, 195-208. https://doi.org/10.1515/GMJ.2008.195

[15] 陶双平, 李露露. 变指标Morrey空间上的Marcinkiewicz积分[J]. 数学年刊, 2016, 37A(1): 55-70.

[16] Ho, K. (2017) Fractional Integral Operators with Homogeneous Kernels on Morrey Spaces with Variable Exponents. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, **69**, 1059-1077. https://doi.org/10.2969/jmsj/06931059

[17] Ho, K. (2019) Weak Type Estimates of Fractional Integral Operators on Morrey Spaces with Variable Exponents. *Acta Applicandae Mathematicae*, **159**, 1-10. https://doi.org/10.1007/s10440-018-0181-2

[18] Guliyev, V. and Ismayilova, A. (2021) Calderón-Zygmund Operators with Kernels of Dini's Type and Their Multilinear Commutators on Generalized Variable Exponent Morrey Spaces. *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan*, **47**, 286-300. https://doi.org/10.30546/2409-4994.47.2.286

[19] Xu, B. (2022) Bilinear θ-type Calderón-Zygmund Operators and Its Commutators on Generalized Variable Exponent Morrey Spaces. *AIMS Mathematics*, **7**, 12123-12143. https://doi.org/10.3934/math.2022674

[20] 邵旭馗, 陶双平. 带变量核的Marcinkiewicz积分及其交换子在变指标Morrey空间上的有界性[J]. 数学物理学报, 2018, 38A(6): 1067-1075.

[21] Ho, K. (2016) Singular Integral Operators, John-Nirenberg Inequalities and Tribel-Lizorkin Type Spaces on Weighted Lebesgue Spaces with Variable Exponents. *Revista de la Unión Matemática Argentina*, **57**, 85-101.

[22] Chen, Y.P., Ding, Y. and Wang, X.X. (2012) Compactness of Commutators for Singular Integrals on Morrey Spaces. *Canadian Journal of Mathematics*, **64**, 257-281. https://doi.org/10.4153/CJM-2011-043-1

[23] Guliyev, V. (2013) Generalized Local Morrey Spaces and Fractional Integral Operators with Rough Kernel. *Journal of Mathematical Sciences*, **193**, 211-227.
https://doi.org/10.1007/s10958-013-1448-9

[24] Guliyev, V. (2012) Generalized Weighted Morrey Spaces and Higher Order Commutators of Sublinear Operators. *Eurasian Mathematical Journal*, **3**, 33-61.