Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(6), 1067-1073
Published Online June 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.126117

Hans汉斯

一元函数泰勒公式及泰勒级数的应用探究

王泽军，杨　梅，杨立敏

中国石油大学(北京)克拉玛依校区文理学院，新疆 克拉玛依

收稿日期：2022年5月16日；录用日期：2022年6月22日；发布日期：2022年6月29日

摘　要

泰勒公式及泰勒级数是重要的数学工具，但通常求解微积分题目过程中不易想到。针对一些典型问题，用常规的手段解决比较困难时，可尝试用泰勒公式及泰勒级数求解。本文将带有Peano余项泰勒公式、带有Lagrange余项泰勒公式及泰勒级数应用到了以下几个方面：求极限、误差估计、不等式证明、级数敛散性判别、寻找非初等原函数、求定积分、证明无理数。对这些典型的微积分题目给出了一种新的解法。希望这对扩展初学者视野及启发应用有所帮助。

关键词

泰勒公式，泰勒级数，微积分，应用

Application of Taylor Formula and Taylor Series for Single Variable Function

Zejun Wang, Mei Yang, Liming Yang

School of Arts and Sciences, China University of Petroleum-Beijing at Karamay, Karamay Xinjiang

Received: May 16th, 2022; accepted: Jun. 22nd, 2022; published: Jun. 29th, 2022

Abstract

Taylor formula and Taylor series are important mathematical tools, but it's not always easy to think about when you are solving calculus problems. For some typical problems, when it is difficult to solve them by conventional means, we can try to solve them by Taylor formula and Taylor series. In this paper, Taylor's formula with Peano remainder, Taylor's formula with Lagrange remainder and Taylor series are applied to the following aspects: The limit, Estimation of error, Proof of inequality, Criterion on convergence and diverge of series, Looking for non-elementary primitive function, Evaluating of definite integral, Proof of irrational. A new method for solving these typical calculus problems is given. I hope this will be helpful for beginner to expand views

文章引用: 王泽军, 杨梅, 杨立敏. 一元函数泰勒公式及泰勒级数的应用探究[J]. 理论数学, 2022, 12(6): 1067-1073. DOI: 10.12677/pm.2022.126117

and inspire application.

Keywords

Taylor Formula, Taylor Series, Calculus, Application

1. 引言

泰勒公式及泰勒级数是《微积分》中很重要的内容，在研究一些复杂函数的性态时，我们常考虑能不能用简单的函数近似表达它，而泰勒公式就可以做到用多项式函数近似表达复杂函数。这种化繁为简的办法，给近似计算及理论分析提供了有力的工具。文献[1]黄军华等讨论了泰勒公式在定积分计算中的应用，文献[2]张春红等研究了泰勒公式在近似计算及数值积分中的应用，文献[3]姚志健探讨了泰勒公式在证明不等式中的应用。本文基于泰勒公式及泰勒级数理论，通过对具体实例的分析，探讨了其在九个方面的典型应用。尽可能帮助初学者深入全面掌握泰勒公式及泰勒级数的应用。

2. 基本概念

2.1. 带有 Peano 余项的泰勒公式[4]

设 $f(x)$ 在 x_0 处有 n 阶导数，则存在 x_0 的一个邻域，对于该邻域中的任一点 x，成立

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+r_n(x)$$

其中余项 $r_n(x)$ 满足

$$r_n(x)=o\left((x-x_0)^n\right).$$

2.2. 带有 Lagrange 余项的泰勒公式[4]

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有 n 阶连续导数，且在 (a,b) 上有 $n+1$ 阶导数，设 $x_0\in[a,b]$ 为一定点，则对于任意 $x\in[a,b]$，成立

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+r_n(x)$$

其中余项 $r_n(x)$ 满足

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\text{，}\ \xi \text{ 在 } x \text{ 和 } x_0 \text{ 之间。}$$

泰勒级数[5]

假设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内是某个幂级数的和函数，即在该邻域内 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$，

$a_n=\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(k=0,1,2,\cdots)$ 我们将幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^n$ 称为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的泰勒级数。

3. 泰勒公式及泰勒级数的应用

3.1. 泰勒公式求极限[5]

例 1 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2\left[x+\ln(1-x)\right]}$。

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\left\{\dfrac{1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+o\left(x^4\right)}{x^2\left[x+\left(-x-\dfrac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)\right]}-\dfrac{1+\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)+\dfrac{1}{2!}\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)^2+o\left(x^4\right)}{x^2\left[x+\left(-x-\dfrac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)\right]}\right\}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\dfrac{1}{4!}-\dfrac{1}{8}\right)x^4+o\left(x^4\right)}{-\dfrac{x^4}{2}+o\left(x^4\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{1}{12}+\dfrac{o\left(x^4\right)}{x^4}}{-\dfrac{1}{2}+\dfrac{o\left(x^4\right)}{x^4}}=\frac{1}{6}$$

总结：此题若用洛必达法则，求解过程是繁琐的，需要多次求导，计算量大。对于一些复杂的“未定式”求极限问题，有时采用泰勒公式可以化繁为简。当然用泰勒公式求极限，经常会遇到一个展开阶数的问题，对于这个问题，可尝试“分子分母同阶”原则。求极限时分子分母展开到最高次幂一致。

3.2. 一些复合函数的泰勒公式

例 2 求 $f(x)=\sqrt{2+\sin x}$ 在 $x=0$ 处的带有皮亚诺余项的 3 阶泰勒公式。

解 $f(x)=\sqrt{2}\left(1+\dfrac{\sin x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$=\sqrt{2}\left[1+\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\sqrt{2}\left\{1+\left[\frac{1}{4}\left(x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right)\right]-\left[\frac{1}{32}\left(x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right)^2\right]+\left[\frac{1}{128}\left(x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right)^3\right]\right\}$$

$$=\sqrt{2}\left[1+\frac{x}{4}-\frac{x^2}{32}-\frac{13}{384}x^3+o\left(x^3\right)\right]$$

$$=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}x-\frac{\sqrt{2}}{32}x^2-\frac{13\sqrt{2}}{384}x^3+o\left(x^3\right)$$

总结：求复合函数的泰勒公式，一般有两种方法：直接展开法与间接展开法，有时直接展开法计算量较大，可考虑通过套用已知的常见函数的泰勒公式做间接展开，给出复杂函数的泰勒公式。

3.3. 利用泰勒公式做近似计算

例 3 计算 π 的近似值，并估计误差。

解 $\pi=4\cdot\dfrac{\pi}{4}=4\cdot\arctan 1$，则

$$\pi \approx 4\left[x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]\Bigg|_{x=1}=4\left[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}\right].$$

$$R_{2n+2}=4\left|(-1)^{n+2}\frac{\xi^{2n+3}}{2n+3}\right|\le\frac{4}{2n+3}.$$

总结：利用泰勒公式做近似计算并估计误差，关键是在恰当的点处展开到合适的阶数，通常展开的点与做近似的点越近近似效果越好，同时提高展开的阶数也能提升近似的精度，但对于部分函数，如果展开的点与做近似的点距离较远，仅提高展开阶数不能提升精度，如 $\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)}$，其中 $\theta\in(0,1)$，用这个泰勒公式近似计算 $x>1$ 处的函数值，提高展开的阶数并不能提高精度，由于对应的泰勒级数 $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$ 收敛域是 $|x|<1$，在收敛域之外这个级数发散。

3.4. 利用泰勒公式证明不等式

例 4 [4] 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f(0)=f(1)=0$，$\min\limits_{0\le x\le 1}f(x)=-1$。证明：$\max\limits_{0\le x\le 1}f''(x)\ge 8$。

证明 由于 $\min\limits_{0\le x\le 1}f(x)=-1$ 且 $f(0)=f(1)=0$，则 $\exists x_0\in(0,1)$，使得 $f(x_0)=-1$。由 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导知 $f'(x_0)=0$。

考虑 $f(x)$ 在 x_0 处的带有拉格朗日余项的 1 阶泰勒公式，即

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2=-1+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2，\ \xi \text{ 介于 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间。}$$

分别令 $x=0$，$x=1$ 得：

$$f(0)=0=-1+\frac{1}{2}f''(\xi_1)x_0^2，\ \xi_1\in(0,x_0).$$

$$f(1)=0=-1+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x_0)^2，\ \xi_2\in(x_0,1).$$

由上述两式得：

$$f''(\xi_1)x_0^2=f''(\xi_2)(1-x_0)^2=1.$$

当 $x_0\le\frac{1}{2}$ 时，$f''(\xi_1)=\frac{2}{x_0^2}\ge 8$；

当 $x_0>\frac{1}{2}$ 时，$f''(\xi_1)=\frac{2}{(1-x_0)^2}>8$。

所以 $\max\limits_{0\le x\le 1}f''(x)\ge 8$。

总结：对于涉及 $f(x)$ 及 $f^{(k)}(x)$ (其中 $k\ge 1$)的不等式证明问题，常规的方法求解是困难的，此时可考虑写出特殊点处泰勒公式，利用泰勒公式作证明，对于这类问题提供了新的思路。

3.5. 利用泰勒公式判断反常积分的敛散性

例 5 讨论反常积分 $\int_1^{+\infty}\left(\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$ 的敛散性。

解 因为$\sin\frac{1}{x}=\frac{1}{x}-\frac{1}{6x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)$，所以

$$\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}=-\frac{1}{6x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

又$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-\frac{1}{6x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)}{\frac{1}{x^3}}=-\frac{1}{6}$，且$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3}\mathrm{d}x$收敛，由比较判别法知$\int_1^{+\infty}\left(\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$收敛。

总结：反常积分敛散性的判别方法较多，但是结合泰勒公式判断级数的敛散性不常见，这里补充一个用泰勒公式判别反常积分的敛散性的方法，对于反常积分敛散性的判别提供了一种可行的思路。

3.6. 利用泰勒级数求原函数

例 6 求函数$f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$ ($x\in(-\infty,+\infty)$)的原函数。

解 由$\mathrm{e}^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$，$x\in(-\infty,+\infty)$知

$$\mathrm{e}^{x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!},\quad x\in(-\infty,+\infty),$$

则

$$\int\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x=\int\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\int\frac{x^{2n}}{n!}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\cdot n!},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

总结：有些函数虽存在原函数，但其原函数不是初等函数，不能直接给出。此时可考虑写出此函数的泰勒级数，并对其逐项积分，进而得出原函数。这对于原函数是非初等函数的原函数求法提供了一种思路。

3.7. 求函数图形的斜渐近线

例 7 [6]求曲线$f(x)=(4x-3)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$的斜渐近线。

解 利用泰勒公式：

$$(4x-3)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=(4x-3)\left[1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]=4x+1+o\left(\frac{1}{x}\right),$$

其中，$\lim\limits_{x\to\infty}o\left(\frac{1}{x}\right)=0$。

因此，曲线$f(x)=(4x-3)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$的斜渐进线为

$$y=4x+1.$$

总结：一般涉及曲线斜渐近线的问题可借助斜渐近线公式求解，这里尝试用泰勒公式求曲线的斜渐近线，对于一些复杂的函数斜渐近线求解提供了一种新的思路。

3.8. 求原函数是非初等函数的定积分

例 8 计算定积分$\int_0^1\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$。

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，故此积分不是瑕积分，

被积函数的泰勒级数为：

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)}+\cdots$$

则

$$\int_0^1\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}\right]_0^1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!},\quad x\in R.$$

总结：对于某些原函数是非初等函数的定积分，直接应用微积分基本公式计算是行不通的，但有时在实际问题当中我们需要计算这种定积分，此时可考虑先写出被积函数的泰勒级数，对于此级数在收敛域内逐项积分并求值，进而得到此定积分的近似值。这对于一些不能直接求解的定积分提供了一种可行的方法。

3.9. 其他应用

例 9 证明 e 为无理数[7]。

证 采用反证法，设 e 是有理数 $e=\dfrac{m}{n}$， m,n 为正整数且 m,n 互素，所以 $n\geq 2$

根据泰勒公式 $e^x=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{x^n}{k!}+\dfrac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1},\theta\in(0,1)$

令 $x=1$，则 $e=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}+\dfrac{e^{\theta}}{(n+1)!},\theta\in(0,1)$

$$\frac{m}{n}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\frac{e^{\theta}}{(n+1)!}$$

$$m((n-1)!)-n!-\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{k!}=\frac{e^{\theta}}{n+1}$$

上式左端为整数，右边 $1<e^{\theta}<3$，$0<\dfrac{e^{\theta}}{n+1}<1(n\geq 2)$ 等式左端为整数右端为小数，矛盾，故 e 为无理数。

总结：e 是我们熟知的无理数，但是如何证明其为无理数，初等的方法是困难的，这里应用泰勒公式给出了一种巧妙的证法。

4. 结论

泰勒公式及泰勒级数在微积分上有重要的用途，对于一些复杂的函数可以考虑通研究它的泰勒公式来间接的研究这个函数的性态。本文通过举实例，探讨了泰勒公式在求极限、求复合函数泰勒公式、近似计算、证明不等式、讨论反常积分的敛散性、求斜渐近线、求定积分的近似值等方面的典型应用。希望通过此文能为初学者提供一些思路，更好的理解并应用泰勒公式及泰勒级数解决一些具体的问题。当然泰勒公式及泰勒级数的应用不局限于此，尤其在涉及多元向量函数的问题中，如空间曲线在一点处的近似曲线、曲面上一点处的弯曲程度等问题有待进一步探究。

基金项目

中国石油大学(北京)克拉玛依校区教学改革项目(JG2021030)。

参考文献

[1] 黄军华. 带积分型余项的泰勒公式在定积分计算中的应用[J]. 玉林师范学院学报, 2006, 27(3): 15-17.
[2] 张春红. 泰勒公式在近似计算及数值积分中的应用[J]. 黑龙江科学, 2014, 5(7): 136-137.
[3] 姚志健. 泰勒公式在证明不等式中的应用[J]. 兰州文理学院学报(自然科学版), 2015, 29(1): 86-89.
[4] 陈纪修, 於崇华, 金路. 数学分析[M]. 第3版. 北京: 高等教育出版社, 2019.
[5] 同济大学数学系. 高等数学[M]. 第7版. 北京: 高等教育出版社, 2014.
[6] 谭康. 泰勒公式及泰勒级数之妙用[J]. 高等数学研究, 2010, 13(3): 11-12.
[7] 龚冬保, 武忠祥, 毛怀遂, 邸双亮. 高等数学典型题[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2000.