Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(6), 1041-1046
Published Online June 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.126114

Gorenstein FI-内射复形的性质

原雪娟

西北师范大学，数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2022年5月16日；录用日期：2022年6月21日；发布日期：2022年6月28日

摘 要

本文将 Gorenstein FI-内射模推广到复形范畴。首先引入 Gorenstein FI-内射复形的概念。其次研究 Gorenstein FI-内射复形的一些性质。最后证明复形 X 是 Gorenstein FI-内射复形，则每个 X_n 是 Gorenstein FI-内射模，且对任意 FI-内射复形 I，复形 $\mathcal{H}om(\mathbf{I},\mathbf{X})$ 正合。

关键词

Gorenstein FI-内射模，FI-内射复形，Gorenstein FI-内射复形

Properties of Gorenstein FI-Injective Complexes

Xuejuan Yuan

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: May 16^{th}, 2022; accepted: Jun. 21^{st}, 2022; published: Jun. 28^{th}, 2022

Abstract

In this paper, Gorenstein FI-injective modules are extended to the category of complex. Firstly, the concept of Gorenstein FI-injective complex is introduced. Secondly, some properties of Gorenstein FI-injective complex are studied. Finally, it is proved

文章引用: 原雪娟. Gorenstein FI-内射复形的性质[J]. 理论数学, 2022, 12(6): 1041-1046.
DOI: 10.12677/pm.2022.126114

that a complex $\mathbf{X}$ is Gorenstein FI-injective complex, and then each term X_n is Gorenstein FI-injective in R-Mod and $\mathcal{H}om(\mathbf{I}, \mathbf{X})$ is acyclic for any FI-injective complex $\mathbf{I}$.

Keywords

Gorenstein FI-Injective Module, FI-Injective Complex, Gorenstein FI-Injective Complex

1. 引言

1995年, 在 [1]中, Enochs 等人引入了 Gorenstein 内射模的概念. 称左 R-模 M 是 Gorenstein 内射模, 如果存在内射左 R-模的正合列 $\mathbf{E}: \cdots \to E_1 \to E_0 \to E_{-1} \to E_{-2} \to \cdots$, 使得 $M \cong \mathrm{Ker}(E_{-1} \to E_{-2})$, 且对任意内射左 R-模 E, 函子 $\mathrm{Hom}_R(E, \mathbf{E})$ 正合. 随后, 许多学者将经典同调理论中的模推广到 Gorenstein 同调理论中. 2007年, 在 [2]中, 毛立新等人引入了 FI-内射模的概念, 并给出这类模的一些性质和等价刻画. 2016年, 在 [3]中, 作者将 FI-内射模推广到 Gorenstein 同调理论中, 引入并研究了 Gorenstein FI-内射模. 在此基础上, 陈东等人在 [4]中进一步研究了这类模的诸多性质, 给出了 Gorenstein FI-内射模是内射模的一个充分条件. 1998年, 在 [5]中, Enochs 和 García Rozas 将 Gorenstein 内射模的概念推广到复形范畴, 定义了 Gorenstein 内射复形. 称复形 $\mathbf{X}$ 是 Gorenstein 内射复形, 如果存在内射复形的正合列 $\cdots \to \mathbf{E_1} \to \mathbf{E_0} \to \mathbf{E_{-1}} \to \mathbf{E_{-2}} \to \cdots$, 使得 $\mathbf{X} \cong \mathrm{Ker}(\mathbf{E_{-1}} \to \mathbf{E_{-2}})$, 且对任意内射复形 $\mathbf{E}$, 函子 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(R)}(\mathbf{E}, -)$ 使上述正合列保持正合. 2016年, 在 [6]中, 辛大伟等人引入并研究了 FI-内射复形, 给出了 FI-内射复形的等价刻画.

受以上工作的启发, 本文将 Gorenstein FI-内射模推广到复形范畴, 引入并研究了 Gorenstein FI -内射复形. 本文第二部分是预备知识, 第三部分讨论了 Gorenstein FI-内射复形的一些基本性质和 Gorenstein FI-内射复形与其层次模之间的联系. 并且给出 R-模 X 是 Gorenstein FI-内射模的一个充分必要条件.

2. 预备知识

本文中若无特别说明, R 表示有单位元的环, 模均指左 R-模. 称 R-模的序列 $\cdots \to X_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}^{\mathbf{X}}} X_i \xrightarrow{d_i^{\mathbf{X}}} X_{i-1} \to \cdots$ 是复形, 如果对任意整数 i, 满足 $d_i^{\mathbf{X}} d_{i+1}^{\mathbf{X}} = 0$, 并将复形简记为 $\mathbf{X}$. 复形 $\mathbf{X}$ 的第 i 次平移记为 $\mathbf{X}[i]$. 设 M 是 R-模, 则 $S^m(M)$ 表示如下的复形

$$\cdots \to 0 \to M \to 0 \to \cdots,$$

其中 M 在第 m 层次, $\underline{M} = S^0(M)$. $D^m(M)$ 表示如下的复形

$$\cdots \to 0 \to M \xrightarrow{id_M} M \to 0 \to \cdots ,$$

其中 M 在第 $m-1$ 和 m 层次, $\overline{M} = D^0(M)$.

我们用 $\mathcal{C}(R)$ 表示所有 R-模的复形范畴. 设 $\mathbf{X}$ 和 $\mathbf{Y}$ 是复形, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(R)}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ 表示 $\mathbf{X}$ 到 $\mathbf{Y}$ 的所有复形链映射构成的 Abel 群. 对任意整数 $i \geq 1$, $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{C}(R)}(-,-)$ 表示左正合函子 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(R)}(-,-)$ 的第 i 次右导出函子. $\mathrm{Ext}^1_{dw}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ 表示由层次可裂的复形短正合列构成的群, 它是 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}(R)}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ 的子群. $\mathcal{H}om(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ 表示如下 Abel 群的复形

$$\cdots \to \Pi_{t \in \mathrm{Z}} \mathrm{Hom}_R(X_t, Y_{i+t}) \xrightarrow{d_i} \Pi_{t \in \mathrm{Z}} \mathrm{Hom}_R(X_t, Y_{i-1+t}) \to \cdots ,$$

$\mathcal{H}om(\mathbf{X}, \mathbf{Y})_i = \Pi_{t \in \mathrm{Z}} \mathrm{Hom}_R(X_t, Y_{i+t})$, 对任意 $f = (f_t)_{t \in \mathrm{Z}} \in \mathcal{H}om(\mathbf{X}, \mathbf{Y})_i$, $d_i((f_t)_{t \in \mathrm{Z}})$
$= (d^{\mathbf{Y}}_{i+t} f_t - (-1)^i f_{t-1} d^{\mathbf{X}}_t)_{t \in \mathrm{Z}}$.

设 $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ 是复形的链映射, 如果对任意整数 i, 存在 R-模同态 $s_i : X_i \longrightarrow Y_{i+1}$, 使得 $f_i = d^Y_{i+1} s_i + s_{i-1} d^X_i$, 那么称 f 是零伦的, 记为 $f \sim 0$.

定义 2.1 [7] 称 R-模 G 是 FP-内射模, 如果对任意有限表示模 A, $\mathrm{Ext}^1_R(A, G) = 0$.

定义 2.2 [2] 称 R-模 I 是 FI-内射模, 如果对任意 FP-内射模 G, $\mathrm{Ext}^1_R(G, I) = 0$.

定义 2.3 [3] 称 R-模 M 是 Gorenstein FI-内射模, 如果存在内射模的正合列

$$\cdots \to E_1 \to E_0 \to E_{-1} \to E_{-2} \to \cdots ,$$

使得

(1) $M \cong \mathrm{Ker}(E_{-1} \to E_{-2})$;

(2) 对任意 FI-内射模 I, 函子 $\mathrm{Hom}_R(I, -)$ 使上述正合列保持正合.

定义 2.4 [8] 称复形 $\mathbf{G}$ 是 FP-内射复形, 如果对任意有限表示复形 $\mathbf{A}$,

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}(R)}(\mathbf{A}, \mathbf{G}) = 0.$$

定义 2.5 [6] 称复形 $\mathbf{I}$ 是 FI-内射复形, 如果对任意 FP-内射复形 $\mathbf{G}$, $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}(R)}(\mathbf{G}, \mathbf{I}) = 0$.

3. Gorenstein FI-内射复形

定义 3.1 称复形 $\mathbf{X}$ 是 Gorenstein FI-内射复形, 如果存在内射复形的正合列

$$\cdots \to \mathbf{E_1} \to \mathbf{E_0} \to \mathbf{E_{-1}} \to \mathbf{E_{-2}} \to \cdots ,$$

使得

(1) $\mathbf{X}\cong \mathrm{Ker}(\mathbf{E_{-1}}\to \mathbf{E_{-2}})$;

(2) 对任意 FI-内射复形 $\mathbf{I}$, 函子 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(R)}(\mathbf{I},-)$ 使上述正合列保持正合.

例 3.2

(1) 每个内射复形是 Gorenstein FI-内射复形. 事实上, 存在复形的正合序列

$$\cdots\to 0\to \mathbf{E}\to \mathbf{E}\to 0\to\cdots,$$

其中 $\mathbf{E}$ 是内射复形, 对任意 FI-内射复形 $\mathbf{I}$, 函子 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(R)}(\mathbf{I},-)$ 使上述正合列保持正合.

(2) 一般来说, Gorenstein FI-内射复形是 Gorenstein 内射复形.

设 $\mathbf{X}$ 是 Gorenstein FI-内射复形, 则存在内射复形的正合序列

$$\cdots\to \mathbf{E_1}\to \mathbf{E_0}\to \mathbf{E_{-1}}\to \mathbf{E_{-2}}\to\cdots,$$

使得 $\mathbf{X}\cong \mathrm{Ker}(\mathbf{E_{-1}}\to \mathbf{E_{-2}})$, 且对任意 FI-内射复形 $\mathbf{I}$, 函子 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(R)}(\mathbf{I},-)$ 使上述正合列保持正合. 因为内射复形是 FI-内射的, 所以复形 $\mathbf{X}$ 是 Gorenstein 内射复形.

下面我们给出 Gorenstein FI-内射复形的一些基本性质.

命题 3.3 Gorenstein FI-内射复形对直积封闭.

命题 3.4 设 $\mathbf{X}$ 是复形. 则 $\mathbf{X}$ 是 Gorenstein FI-内射复形当且仅当存在复形的正合列 $\mathbb{P}:0\to \mathbf{K}\to \mathbf{E}\to \mathbf{X}\to 0$, 其中 $\mathbf{E}$ 是内射复形, $\mathbf{K}$ 是 Gorenstein FI-内射复形, 且对任意 FI-内射复形 $\mathbf{I}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(R)}(\mathbf{I},\mathbb{P})$ 正合, $\mathrm{Ext}^{n\geq 1}_{\mathcal{C}(R)}(\mathbf{I},\mathbf{X})=0$.

证明 $\Rightarrow$ 由定义知, 存在正合列 $0\to \mathbf{K}\to \mathbf{E}\to \mathbf{X}\to 0$, 和 $0\to \mathbf{X}\to \overline{E}\to \overline{K}\to 0$, 其中 $\mathbf{E}$, $\overline{E}$ 是内射复形, $\mathbf{K}$, $\overline{K}$ 是 Gorenstein FI-内射复形, 且对任意 FI-内射复形 $\mathbf{I}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(R)}(\mathbf{I},-)$ 保持上述两个序列正合. 从而可得正合序列

$$\cdots\to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(R)}(\mathbf{I},\overline{K})\to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}(R)}(\mathbf{I},\mathbf{X})\to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}(R)}(\mathbf{I},\overline{E})\to\cdots\to \mathrm{Ext}^{n-1}_{\mathcal{C}(R)}(\mathbf{I},\overline{K})\to$$

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{C}(R)}(\mathbf{I},\mathbf{X})\to \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{C}(R)}(\mathbf{I},\overline{E})\to\cdots.$$

当 $n=1$ 时, 由上述正合列可得 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}(R)}(\mathbf{I},\mathbf{X})=0$. 假设 $n-1$ 时结论成立. 因为 $\overline{K}$ 是 Gorenstein FI-内射复形. 所以 $\mathrm{Ext}^{n-1}_{\mathcal{C}(R)}(\mathbf{I},\overline{K})=0$. 从而 $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{C}(R)}(\mathbf{I},\mathbf{X})=0$.

$\Leftarrow$ 因为 $\mathbf{K}$ 是 Gorenstein FI-内射复形, 所以有复形的正合列

$$\cdots\to \mathbf{E_n}\to\cdots\to \mathbf{E_1}\to \mathbf{K}\to 0, \tag{1}$$

其中每个 $\mathbf{E_i}$ 是内射复形, 且对任意 FI-内射复形 $\mathbf{I}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(R)}(\mathbf{I},-)$ 保持以上序列正合. 取 $\mathbf{X}$ 的内射分解

$$0\to \mathbf{X}\to \mathbf{E_{-1}}\to \mathbf{E_{-2}}\to\cdots. \tag{2}$$

因为对任意整数 $n \geq 1$, $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{C}(R)}(\mathbf{I}, \mathbf{X}) = 0$. 故 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(R)}(\mathbf{I}, -)$ 保持该序列正合, 再将 (1), (2) 连接. 故得结论.

引理 3.5 设 I 是 FI-内射模, 则 $\overline{I}$ 是 FI-内射复形.

证明 设 $\mathbf{F}$ 是 FP-内射复形, 由 [[8], 命题 2.7] 知, 对任意整数 n, F_{n-1} 是 FP-内射模. 由 [[9], 引理 3.1] 可得

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}(R)}(\mathbf{F}[-n], \overline{I}) \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}(R)}(\mathbf{F}, \overline{I}[n]) \cong \mathrm{Ext}^1_R(F_{n-1}, I) = 0.$$

所以 $\overline{I}$ 是 FI-内射复形.

定理 3.6 设 $\mathbf{X}$ 是 Gorenstein FI-内射复形, 则对任意整数 n, X_n 是 Gorenstein FI-内射模, 且对任意 FI-内射复形 $\mathbf{I}$, 复形 $\mathcal{H}om(\mathbf{I}, \mathbf{X})$ 正合.

证明 设 $\mathbf{X}$ 是 Gorenstein FI-内射复形, 则存在内射复形的正合列

$$\mathbb{E} : \cdots \to \mathbf{E_1} \to \mathbf{E_0} \to \mathbf{E_{-1}} \to \mathbf{E_{-2}} \to \cdots,$$

使得 $\mathbf{X} \cong \mathrm{Ker}(\mathbf{E_{-1}} \to \mathbf{E_{-2}})$, 且对任意的 FI-内射复形 $\mathbf{I}$, 函子 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(R)}(\mathbf{I}, -)$ 使正合序列 $\mathbb{E}$ 保持正合.

首先证 X_n 是 Gorenstein FI-内射模.

由正合列 $\mathbb{E}$ 可得内射模的正合列

$$\mathbb{E}_n : \cdots \to (\mathbf{E_1})_n \to (\mathbf{E_0})_n \to (\mathbf{E_{-1}})_n \to (\mathbf{E_{-2}})_n \to \cdots,$$

使得 $X_n \cong \mathrm{Ker}((\mathbf{E_{-1}})_n \to (\mathbf{E_{-2}})_n)$. 由引理 3.5 知, 对任意 FI-内射模 I, $\overline{I}[n]$ 是 FI-内射复形. 从而, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(R)}(\overline{I}[n], \mathbb{E})$正合. 由 [[9], 引理 3.1] 知, 对任意整数 i,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(R)}(\overline{I}[n], \mathbf{E_i}) \cong \mathrm{Hom}_R(I, (\mathbf{E_i})_n).$$

因此, $\mathrm{Hom}_R(I, \mathbb{E}_n)$正合. 所以 X_n 是 Gorenstein FI-内射模.

下面证 $\mathcal{H}om(\mathbf{I}, \mathbf{X})$正合.

设 $\mathbf{I}$ 是 FI-内射复形. 由命题 3.4 可得

$$\mathrm{Ext}^1_{dw}(\mathbf{I}, \mathbf{X}) \subset \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{C}(R)}(\mathbf{I}, \mathbf{X}) = 0.$$

由 [[10], 引理 2.1] 知, 复形 $\mathcal{H}om(\mathbf{I}, \mathbf{X})$ 正合.

命题 3.7 设 X 是 R-模, 则 X 是 Gorenstein FI-内射模当且仅当 $\overline{X}$ 是 Gorenstein FI-内射复形.

证明 充分性由定理 3.7 可得. 下证必要性.

设 I 是 FI-内射复形. 由 [[6], 定理 1] 知, I_{-1} 是 FI-内射模. 因为 X 是 Gorenstein FI-内射模, 所

以存在内射模的正合列

$$\cdots \to E_1 \to E_0 \to E_{-1} \to E_{-2} \to \cdots,$$

使得 $X \cong \mathrm{Ker}(E_{-1} \to E_{-2})$, 且函子 $\mathrm{Hom}_R(I_{-1}, -)$ 使上述正合列保持正合. 进而有复形的正合列

$$\cdots \to \overline{E_1} \to \overline{E_0} \to \overline{E_{-1}} \to \overline{E_{-2}} \to \cdots,$$

且 $\overline{X} \cong \mathrm{Ker}(\overline{E_{-1}} \to \overline{E_{-2}})$. 由 [[9], 引理 3.1] 可得以下交换图

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(I_{-1}, E_0) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \mathrm{Hom}_R(I_{-1}, E_{-1}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \mathrm{Hom}_R(I_{-1}, E_{-2}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(R)}(\mathbf{I}, \overline{E_0}) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(R)}(\mathbf{I}, \overline{E_{-1}}) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(R)}(\mathbf{I}, \overline{E_{-2}}) \arrow[r] & \cdots .
\end{tikzcd}$$

因为上行正合, 所以下行正合. 因此, $\overline{X}$ 是 Gorenstein FI-内射复形.

参考文献

[1] Enochs, E.E. and Jenda, O.M.G. (1995) Gorenstein Injective and Projective Modules. *Mathematische Zeitschrift*, **220**, 611-633. https://doi.org/10.1007/BF02572634

[2] Mao, L.X. and Ding, N.Q. (2007) FI-Injective and FI-Flat Modules. *Journal of Algebra*, **309**, 367-385. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2006.10.019

[3] Chen, X.M. (2016) Ext-FI-Injective Modules and MPI-Injective and MPI-Flat Modules. Nanjing Normal University, Nanjing.

[4] 陈东, 胡葵. 关于Gorenstein FI-内射模[J]. 西北师范大学学报(自然科学版), 2019, 55(3): 9-13.

[5] Enochs, E.E. and Garcí Rozas, J.R. (1998) Gorenstein Injective and Projective Complexes. *Communication in Algebra*, **26**, 1657-1674. https://doi.org/10.1080/00927879808826229

[6] 辛大伟, 田雪. FI-内射复形[J]. 阜阳师范学院学报, 2016, 33(2): 1-3.

[7] Stenstr¨m, B. (1970) Coherent Rings and FP-Injective Modules. *Journal of the London Mathematical Society*, **2**, 323-329. https://doi.org/10.1112/jlms/s2-2.2.323

[8] Yang, X.Y. and Liu, Z.K. (2010) FP-Injective Complexes. *Communication in Algebra*, **38**, 137-142. https://doi.org/10.1080/00927870902861356

[9] Gillespie, J. (2004) The Flat Model Structure on Ch(R). *Transactions of the American Mathematic Society*, **365**, 3369-3390. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-04-03416-6

[10] Yang, G. and Estrada, S. (2020) Characterizations of Ding Injective Complexes. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, **43**, 2385-2398. https://doi.org/10.1007/s40840-019-00807-8