Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(7), 1136-1145
Published Online July 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.127125

Hans汉斯

一类具有比率依赖型功能反应和Allee效应的Leslie-Gower捕食者-食饵模型的 Hopf 分支

贾昕蓺

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2022年6月1日；录用日期：2022年7月1日；发布日期：2022年7月8日

摘 要

本文研究带比率依赖型的功能反应和Allee效应的Leslie-Gower捕食者-食饵模型的稳定性与Hopf 分支。首先讨论平衡点的局部渐近稳定性，然后以捕食者的内在增长率 s为分支参数，给出Hopf 分支存在的条件。最后，利用规范型理论和中心流形定理分析 Hopf 分支的方向及分支周期解的稳定性。

关键词

Leslie-Gower模型，比率依赖型功能反应，平衡点，稳定性，Hopf 分支

Hopf Bifurcation of a Leslie-Gower with Ratio-Dependent Functional Response and Allee Effect

Xinyi Jia

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Jun. 1^{st}, 2022; accepted: Jul. 1^{st}, 2022; published: Jul. 8^{th}, 2022

文章引用: 贾昕蓺. 一类具有比率依赖型功能反应和Allee效应的Leslie-Gower捕食者-食饵模型的 Hopf分支[J]. 理论数学, 2022, 12(7): 1136-1145. DOI: 10.12677/pm.2022.127125

Abstract

In this paper, we investigate the stability and Hopf bifurcation of a Leslie-Gower predator-prey model with Ratio-Dependent Functional Response and Allee effect. First, the local asymptotic stability of the equilibrium points is discussed, and then the condition of the existence of Hopf bifurcation is given by taking the ratio s of the intrinsic growth rate for the predator as the bifurcation parameter. Finally, using the canonical theory and the central manifold theorem, the direction of Hopf bifurcation and the stability of periodic solution of bifurcation are analyzed.

Keywords

Leslie-Gower Model, Ratio-Dependent Functional Response, Equilibrium Points, Stability, Hopf Bifurcation

1. 引言

本文研究由Leslie和Gower [1]提出并且经过May [2]修正的Leslie-Gower模型，该模型捕食者和被捕食者的方程是一个logistic型生长函数 [3–6].系统(1)中nx可以解释为捕食者的环境承载能力.

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = rx(1-\dfrac{x}{\mathrm{K}}) - \dfrac{qxy}{x+a}, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = sy(1-\dfrac{y}{nx}), \end{cases} \tag{1}$$

文献 [7–10]研究的捕食-食饵模型称为修正Leslie-Gower模型.在系统(1)中$\dfrac{y}{nx}$称为Leslie-Gower项 [1],它测量的是由于捕食者缺乏最喜欢的食物而导致数量的减少.在这种情况下,一些捕食者物种转向其他可用的食物,因为捕食者喜欢的食物并不充足,所以其数量的增长仍会受到限制.捕食者的替代事物可以通过在捕食者的环境承载能力上增加一个常数c来建模 [8],即系统(1)中nx替换为$nx+c$.

另一方面,文献 [11]还考虑了额外的复杂性,比如Allee效应.Allee效应被定义为种群大小与适应

度间的关系,种群越小,适应性越低 [12–14].在昆虫、植物、哺乳动物等许多种群中还会出现生物系统中普遍存在的一些重要现象,如:合作繁殖,对捕食者的防御能力降低,由于种群密度小导致对摄食不足等.这些生物现象都可能与Allee效应有关.在猎物方程中,Allee效应对逻辑增长的影响用$x-m$来表示,其中,m是Allee 效应阈值，Allee效应主要有强Allee效应和弱Allee效应,强Allee 效应是指种群密度小于一定的阈值时,种群增长率为负,但呈递增趋势;弱Allee效应是指种群密度小于一定的阈值时,种群增长率为正.当系统包含对猎物的Allee 效应,得到如下模型:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = rx(1-\dfrac{x}{\mathrm{K}})(x-m) - \dfrac{qxy}{x+a}, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = sy(1-\dfrac{y}{nx+c}), \end{cases} \tag{2}$$

其中 r,s为食饵和捕食者的内在增长率, K 为环境容纳量, $\dfrac{y}{x+a}$ 为 Holling-II 型功能反应. 系统(2)中所有参数均为正数.

在上述模型中,功能反应函数只涉及到猎物x(依赖于猎物),这意味着捕食者的捕食行为只由猎物决定.然而,最近一些来自生物控制的数值例子表明,经典的食饵依赖捕食者-食饵系统可以提供与现实观察的对比,例如Rosenzweig提出的著名的富集悖论.另一方面,越来越多的证据表明,在某些情况下,尤其是当捕食者需要搜索,分享和争夺食物,一个更合适的捕食者-猎物模型应该是一个所谓的比率依赖模型,也就是说,功能反应是比率依赖的.因此,我们考虑比率依赖型功能反应函数,得到以下系统:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = rx(1-\dfrac{x}{\mathrm{K}})(x-m) - \dfrac{qxy}{x+ay}, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = sy(1-\dfrac{y}{nx+c}), \end{cases} \tag{3}$$

在本文中,在考虑比率依赖型功能反应函数的条件下,旨在讨论平衡点的稳定性和与 Hopf 分支的相关理论.本文的设计方案如下:第2节主要讨论平衡点的存在性和稳定性.第3节讨论 Hopf 分支的存在性.第4 节通过规范型理论和文 [15]的方法分析 Hopf 分支的方向及分支周期解的稳定性.论文的最后一节为对获得的结果的最后评论.

2. 平衡点的存在性和稳定性

2.1. 平衡点的存在性

对于模型 (3)

(i) 总存在半平凡平衡点 $E_1 = (\mathrm{K}, 0)$, $E_2 = (m, 0)$;

(ii) 当且仅当

$$(\mathbf{H_1}) \quad m < m_1,$$

成立时, 系统 (3)在唯一的正常数平衡点 $E_* = (x_*, y_*)$,其中$m_1 := \min\{-\mathrm{K}, -\dfrac{q}{ra}\}$.

2.2. 平衡点的局部稳定性

系统 (3)平衡点处的 Jacobi 矩阵如下

$$\mathbf{J}=\begin{pmatrix} s_0 & b \\ \dfrac{nsy^2}{(nx+c)^2} & s-\dfrac{2sy}{nx+c} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

其中

$$s_0=2rx-mr-\frac{3rx^2}{\mathrm{K}}+\frac{2mrx}{\mathrm{K}}-\frac{aqy^2}{(x+ay)^2}, b=-\frac{qx^2}{(x+ay)^2}.$$

下面通过计算系统 (3)在每个平衡点处的 Jacobi 矩阵的特征值, 来确定这些平衡点的稳定性.

定理 1(i) 若条件 (H_1) 成立,半平凡平衡点 $\mathrm{E}_1=(\mathrm{K},0)$ 是鞍点，且是不稳定的.

(ii) 若条件 (H_1) 成立, 则半平凡平衡点 $\mathrm{E}_2=(m,0)$是鞍点，且是不稳定的.

证明 (i) 系统 (3)在平衡点 E_1 处的 Jacobi 矩阵为

$$\mathbf{J}_{\mathrm{E}_1}=\begin{pmatrix} r(m-\mathrm{K}) & -q \\ 0 & s \end{pmatrix}. \tag{5}$$

矩阵 (5)的特征值为 $\lambda_1=r(m-\mathrm{K})$, $\lambda_2=s$,若条件$(\mathbf{H_1})$ 成立, $\lambda_1<0$, $\lambda_2>0$,因此, 平衡点 E_1 是鞍点，且是不稳定的.

(ii) 系统 (3)在平衡点 E_2处的 Jacobi 矩阵为

$$\mathrm{J}_{\mathrm{E}_2}=\begin{pmatrix} rm(1-\dfrac{m}{K}) & -q \\ 0 & s \end{pmatrix}. \tag{6}$$

矩阵 (6)特征值为 $\lambda_1=rm(1-\dfrac{m}{\mathrm{K}})$, $\lambda_2=s$,若条件(H_1) 成立, $\lambda_1<0$, $\lambda_2>0$,因此, 平衡点 E_2 是鞍点，且是不稳定的.

定理 2 假设 (H_1)成立. 若满足

$$(\mathrm{H}_2) \quad 2(m+\mathrm{K})x_*<m\mathrm{K},$$

则$-s(s_0+b)>0$,若$s>s_0$成立,系统 (3)正常数平衡点 E_* 是全局渐近稳定的. 反过来, 若$s<s_0$成立,则 E_* 是不稳定的.

证明 系统 (3)在正常数平衡点 E_* 处的 Jacobi 矩阵为

$$\mathrm{J}_{\mathrm{E}_*}=\begin{pmatrix} s_0 & b \\ ns & -s \end{pmatrix}. \tag{7}$$

其中

$$s_0 = 2rx_* - mr - \frac{3rx_*^2}{\mathrm{K}} + \frac{2mrx_*}{\mathrm{K}} - \frac{aqy_*^2}{(x_*+ay_*)^2}, b = -\frac{qx_*^2}{(x_*+ay_*)^2} < 0.$$

当$s_0 \leq 0$时，有$2\mathrm{K}x_* + 2m < m\mathrm{K}$,
矩阵 (7)的特征方程为

$$\lambda^2 - \mathrm{A}_1\lambda + \mathrm{A}_2 = 0. \tag{8}$$

其中

$$\mathrm{A}_1 = s_0 - s,$$
$$\mathrm{A}_2 = -s(s_0 + nb)$$

由条件 (H_1) , (H_2), 可知, $\mathrm{A}_2 > 0$. 此时$\mathrm{A}_1 = [2rx_* - mr - \frac{3rx_*^2}{\mathrm{K}} + \frac{2mrx_*}{\mathrm{K}} - \frac{aqy_*^2}{(x_*+ay_*)^2}] - s$, 因此, 当 $s > s_0$ 成立时,系统 (3)的正常数平衡点 E_* 是全局渐近稳定的. 反之, 特征方程 (8)有负实部且实部不为零, 因此正常数平衡点 E_* 是不稳定的.

3. Hopf 分支的存在性

本节选取参数 s 来研究系统 (3) 在正常数平衡点 E_* 处的 Hopf 分支的存在性.

引理 3 假设条件 (H_1), (H_2) 成立, 则存在唯一的 $s_* > 0$, 使得当 $s = s_*$ 时, $\mathrm{A}_1(s_*) = 0$.

证明: 令 $\mathrm{A}_1(s) = 0$. 即$\mathrm{A}_1 = [2rx_* - mr - \frac{3rx_*^2}{\mathrm{K}} + \frac{2mrx_*}{\mathrm{K}} - \frac{aqy_*^2}{(x_*+ay_*)^2}] - s = 0$. 有$s = 2rx_* - mr - \frac{3rx_*^2}{\mathrm{K}} + \frac{2mrx_*}{\mathrm{K}} - \frac{aqy_*^2}{(x_*+ay_*)^2}$. 令$s_* = 2rx_* - mr - \frac{3rx_*^2}{\mathrm{K}} + \frac{2mrx_*}{\mathrm{K}} - \frac{aqy_*^2}{(x_*+ay_*)^2}$, 当$s = s_*$时，$\mathrm{A}_1(s_*) = 0$.

假设存在s'，使得$A_1(s') = 0$,则有$s' = 2rx_* - mr - \frac{3rx_*^2}{\mathrm{K}} + \frac{2mrx_*}{\mathrm{K}} - \frac{aqy_*^2}{(x_*+ay_*)^2}$ 所以$s_* = s'$.

定理 4 假设条件 (H_1), (H_2),成立, 则存在 $s_* > 0$, 当$s = s_*$ 时, 系统 (3)在共存平衡点 E_* 处产生 Hopf 分支.

证明: 由引理 3 知, 存在唯一的 $s_* > 0$, 使得 $\mathrm{A}_1(s_*) = 0$. 因此, 当 $s = s_*$ 时, 特征方程 (8) 可以写为

$$\lambda^2 + \mathrm{A}_2 = 0. \tag{9}$$

由定理 2可知, $\mathrm{A}_2(s_*) > 0$. 从而方程 (9)的特征值分别为 λ_1,$\lambda_2 = \pm i\sqrt{\mathrm{A}_2(s)}$. 因此, 假设 $\lambda = \beta(s) + i\omega(s)$ 为特征方程 (8)的一个复根, 代入方程 (8) 得

$$(\beta + i\omega)^2 + \mathrm{A}_1(\beta + i\omega) + \mathrm{A}_2 = 0,$$

两边同时关于 s 求导, 有

$$\begin{aligned} &\mathrm{D}_1(s)\beta'(s) + \mathrm{D}_2(s)\omega'(s) + \mathrm{D}_3(s) = 0, \\ &\mathrm{D}_4(s)\beta'(s) + \mathrm{D}_5(s)\omega'(s) + \mathrm{D}_6(s) = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

其中

$$\mathrm{D}_1(s)=\mathrm{A}_1(s),\mathrm{D}_2(s)=-2\omega,\mathrm{D}_3(s)=\mathrm{A}_2\prime(s),$$

$$\mathrm{D}_4(s)=2\omega,\mathrm{D}_5(s)=A_1(s),\mathrm{D}_6(s)=A_1\prime(s)\omega,$$

$$\mathrm{A}_1\prime(s)=-1,\mathrm{A}_2\prime(s)=-s_0-nb.$$

因此, $\mathrm{D}_1(s)\mathrm{D}_5(s)-\mathrm{D}_2(s)\mathrm{D}_4(s)\neq 0$.

由 (10)可得

$$\left.\frac{d(\mathrm{Re}\lambda)}{ds}\right|_{s_*}=\beta'(s_*)=\frac{\mathrm{D}_3(s)\mathrm{D}_5(s)-\mathrm{D}_2(s)\mathrm{D}_6(s)}{\mathrm{D}_1(s)\mathrm{D}_5(s)-\mathrm{D}_2(s)\mathrm{D}_4(s)}=\frac{\mathrm{A}_2\prime(s_*)\mathrm{A}_1(s_*)+2\omega^2}{{\mathrm{A}_1}^2(s_*)+4\omega^2}.$$

因为$\beta(s)=\frac{1}{2}tr[\mathrm{J}(\mathrm{E}_*)]$,$\omega(s)=\frac{1}{2}\sqrt{4det[\mathrm{J}(\mathrm{E}_*)-tr[\mathrm{J}(\mathrm{E}_*)]^2}$, 所以,

$$\beta(s_*)=0,\beta'(s_*)>0.$$

横截性条件成立, 系统 (3)在正平衡点 E_* 处产生 Hopf 分支.

4. Hopf 分支的方向和稳定性

本节利用规范型理论来讨论系统 (3)在正常数平衡点 E_* 附近产生的 Hopf分支的方向和稳定性. 对系统 (3)作变量代换

$$\widetilde{x}=x-x_*,\widetilde{y}=y-y_*.$$

变换后仍用 x,y 代替 $\widetilde{x},\widetilde{y}$, 则系统 (3)变为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=r(x+x_*)(1-\dfrac{x+x_*}{\mathrm{K}})(x+x_*-m)-\dfrac{q(x+x_*)(y+y_*)}{(x+x_*)+a(y+y_*)},\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=s(y+y_*)(1-\dfrac{y+y_*}{n(x+x_*)+c}).\end{cases}\tag{11}$$

将系统 (11)重写为

$$\begin{pmatrix}\dfrac{dx}{dt}\\ \dfrac{dy}{dt}\end{pmatrix}=\mathrm{J}(\mathrm{E}_*)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}f(x,y,s)\\ g(x,y,s)\end{pmatrix},\tag{12}$$

其中

$$f(x,y,s)=a_1x^2+a_2xy+a_3y^2+a_4x^3+a_5x^2y+a_6xy^2+a_7y^3+\cdots,$$
$$g(x,y,s)=b_1x^2+b_2xy+b_3y^2+b_4x^3+b_5x^2y+b_6xy^2+b_7y^3+\cdots,$$

以及

$$\begin{aligned}
&a_1 = r - \frac{3rx_*}{\mathrm{K}} + \frac{mr}{\mathrm{K}} + \frac{aqy_*^2}{(x_*+ay_*)^3}, a_2 = -\frac{aqx_*y_*}{(x_*+ay_*)^3},\\
&a_3 = \frac{aqx_*^2}{(x_*+ay_*)^3}, a_4 = -\frac{r}{\mathrm{K}} - \frac{aqy_*^2}{(x_*+ay_*)^4},\\
&a_5 = \frac{4aqx_*y_* - 2a^2qy_*^2}{3(x_*+ay_*)^4}, a_6 = -\frac{2qx_*^2 - 4a^2qx_*y_*}{3(x_*+ay_*)^4},\\
&a_7 = -\frac{a^2qx_*^2}{(x_*+ay_*)^4}, b_1 = -\frac{sn^2y_*^2}{2(nx_*+c)^3},\\
&b_2 = \frac{nsy_*}{(nx_*+c)^2}, b_3 = -\frac{s}{nx_*+c},\\
&b_4 = \frac{sn^3y_*^2}{6(nx_*+c)^4}, b_5 = -\frac{2n^2sy_*}{3(nx_*+c)^3},\\
&b_6 = \frac{2ns}{3(nx_*+c)^2}, b_7 = 0.
\end{aligned}$$

设矩阵

$$\mathbf{P} := \begin{pmatrix} \mathrm{N} & 1 \\ \mathrm{M} & 0 \end{pmatrix},$$

其中，$\mathrm{M} = \frac{-s}{\omega(s)}, \mathrm{N} = -\frac{s_0+s}{2w(s)}$.则有

$$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{JP} = \Lambda(s) := \begin{pmatrix} \beta(s) & -\omega(s) \\ \omega(s) & \beta(s) \end{pmatrix}.$$

当$s = s_*$时，我们有

$$\mathrm{M}_* := \mathrm{M}|_{s=s_*}, \mathrm{N}_* := \mathrm{N}|_{s=s_*}. \tag{13}$$

通过变换$(x,y) = (u,v)^{\mathrm{T}}$,系统变为

$$\begin{pmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{pmatrix} = \Lambda(s)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \mathrm{P}^{-1}\begin{pmatrix} f_1(u,v,s) \\ f_2(u,v,s) \end{pmatrix}, \tag{14}$$

其中

$$\begin{pmatrix} f^1(u,v,s) \\ f^2(u,v,s) \end{pmatrix} = \mathrm{P}^{-1}\begin{pmatrix} f(\mathrm{N}u+v,\mathrm{M}u,s) \\ f(\mathrm{N}u+v,\mathrm{M}u,s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mathrm{M}}g(\mathrm{N}u+v,\mathrm{M}u,s) \\ f - \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}}g(\mathrm{N}u+v,\mathrm{M}u,s) \end{pmatrix}.$$

将 (14)转化为极坐标的形式如下：

$$\begin{aligned}\dot{\gamma} &= \beta(s)r + a(s)r^3 + \cdots, \\ \dot{\theta} &= \omega(s) + c(s)r^2 + \cdots,\end{aligned} \tag{15}$$

对 (15)在$s = s_*$处进行Taylar展开得

$$\dot{\gamma} = \beta'(s_*)(s - s_*)r + a(s_*)r^3 + o((s - s_*)^2 r, (s - s_*)r^3, r^5), \tag{16}$$

为了确定Hopf分支周期解的稳定性，我们需要计算系数$a(s_*)$的符号，则

$$\begin{aligned}a(s_*) :=& \frac{1}{16}[f^1_{uuu} + f^1_{uvv} + g^1_{uuv} + g^1_{vvv}] \\ &+ \frac{1}{16\omega(s_*)}[f^1_{uv}(f^1_{uu} + f^1_{vv}) - g^1_{uv}(g^1_{uu} + g^1_{vv}) - f^1_{uu}g^1_{uu} + f^1_{vv}g^1_{vv}],\end{aligned} \tag{17}$$

其中所有偏导数在分支点$(x, y, s) = (0, 0, S_*)$处计算且

$$\begin{aligned}
&f^1_{uuu}(0,0,S_*) = 6b_4\frac{\mathrm{N}_*^3}{\mathrm{M}_*} + 6b_5\mathrm{N}_*^2 + 6b_6\mathrm{M}_*\mathrm{N}_* + 6b_7\mathrm{M}_*^2, f^1_{uvv}(0,0,S_*) = 6b_4\frac{\mathrm{N}_*}{\mathrm{M}_*} + 2b_5, \\
&g^1_{uuv}(0,0,S_*) = 6\mathrm{N}_*^2(a_4 - b_4\frac{\mathrm{N}_*}{\mathrm{M}_*}) + 4\mathrm{M}_*\mathrm{N}_*(a_5 - b_5\frac{\mathrm{N}_*}{\mathrm{M}_*}) + 2\mathrm{M}_*^2(a_6 - b_6\frac{\mathrm{N}_*}{\mathrm{M}_*}), \\
&g^1_{vvv}(0,0,S_*)) = 6(a_4 - b_4\frac{\mathrm{N}_*}{\mathrm{M}_*}), f^1_{uv}(0,0,S_*) = 2b_1\frac{\mathrm{N}_*}{\mathrm{M}_*} + b_2, \\
&f^1_{uu}(0,0,S_*) = 2b_1\frac{\mathrm{N}_*^2}{\mathrm{M}_*} + 2b_2\mathrm{N}_* + 2b_3\mathrm{M}_*, f^1_{vv}(0,0,S_*) = 2b_1\frac{1}{\mathrm{M}_*}, \\
&g^1_{uv}(0,0,S_*) = 2\mathrm{N}_*(a_1 - b_1\frac{\mathrm{N}_*}{\mathrm{M}_*}) + M_*(a_2 - b_2\frac{\mathrm{N}_*}{\mathrm{M}_*}), g^1_{vv}(0,0,S_*) = 2(a_1 - b_1\frac{\mathrm{N}_*}{\mathrm{M}_*}), \\
&g^1_{uu}(0,0,S_*) = 2\mathrm{N}_*^2(a_1 - b_1\frac{\mathrm{N}_*}{\mathrm{M}_*}) + 2\mathrm{M}_*\mathrm{N}_*(a_2 - b_2\frac{\mathrm{N}_*}{\mathrm{M}_*}) + 2\mathrm{M}_*^2(a_3 - b_3\frac{\mathrm{N}_*}{\mathrm{M}_*}).
\end{aligned}$$

因此，我们直接计算

$$\begin{aligned}
a(s_*) :=& \frac{1}{8}[(b_5 + 3a_4)\mathrm{N}_*^2 + (2b_6 + 2a_5)\mathrm{M}_*\mathrm{N}_* + (3b_7 + a_6)\mathrm{M}_*^2 - 3b_4\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}_*} + b_5 + 3a_4] \\
&+ \frac{1}{8\omega(s_*)}[(2a_1b_1 + b_1b_2)\frac{\mathrm{N}_*^4}{\mathrm{M}_*} + 2(2a_1b_1 + b_1b_2)\frac{\mathrm{N}_*^2}{\mathrm{M}_*} \\
&+ (a_1b_2 + a_2b_1 + 2b_1b_3 + b_2^2 - a_1^2)N_*^3 + 3(b_2b_3 - a_1a_2)\mathrm{M}_*\mathrm{N}_*^2 \\
&+ (2b_3^2 - b_2a_3 - a_2b_3 - 2a_1a_3 - a_2^2)\mathrm{M}_*^2\mathrm{N}_* + (2a_1b_1 + b_1b_2)\frac{1}{\mathrm{M}_*} \\
&+ (2b_1b_3 + b_2^2 - 2a_1^2 + a_2b_1 + a_1b_2)\mathrm{N}_* + (b_2b_3 - a_1a_2)\mathrm{M}_* - (a_2a_3 + 2a_3b_3)\mathrm{M}_*^2].
\end{aligned}$$

定义一阶Lyapunov系数

$$\mu_2 = -\frac{a(s_*)}{\beta'(s_*)},$$

且$\beta'(s(*)) > 0$,由Poincaré-Andronov-Hopf分支定理，可得如下结论.

定理 5 假设 (H_1),(H_2) 成立, 则当$s = s_*$时,系统 (4) 在 E_* 处产生 Hopf 分支.

(i) 如果 $a(s_*) < 0$, 那么 Hopf 分支的分支周期解是不稳定的且分支方向是超临界的.

(ii) 如果 $a(s_*) > 0$, 那么 Hopf 分支的分支周期解是渐近稳定的且分支方向是亚临界的.

5. 结论

本文研究了一类带有比率依赖型功能反应和Allee效应的 Leslie-Gower捕食者-食饵模型. 系统 (3) 总有半平凡平衡点 E_1 (K, 0) , E_2 $(m, 0)$. 在 (H_1) 成立时有正平衡点 E_*, 在 (H_2)成立且 $s > s_0$时有正平衡点 E_*是局部渐进稳定的.可以发现, 半平凡平衡点 E_1 , E_2在 (H_1)的条件下是鞍点,总是不稳定的. 进一步, 选取捕食者的内在增长率 s为分支参数, 当 s 等于临界值 s_* 时, 系统 (3) 在正平衡点 E_* 附近产生 Hopf 分支.

本文只研究了唯一正平衡点的情况,还存在着其他正平衡点,但正平衡点的存在性和稳定性的判断比较复杂,在本文中并未分析,可以发现,Allee效应m对唯一平衡点的存在性和半平凡平衡点的稳定性有一定影响,而捕食者的内在增长率 s 对平衡点的稳定性有一定的影响.

参考文献

[1] Leslie, P.H. and Gower, J.C. (1960) The Properties of a Stochastic Model for the Predator-Prey Type of Interaction between Two Species. *Biometrika*, **47**, 219-234. https://doi.org/10.1093/biomet/47.3-4.219

[2] Schoener, R. (1974) Stability and Complexity in Model Ecosystems. *Evolution*, **28**, 510-511. https://doi.org/10.1111/j.1558-5646.1974.tb00784.x

[3] Aguirre, P., Gonzlez-Olivares, E. and Sez, E. (2009) Two Limit Cycles in a Leslie-Gower Predator-Prey Model with Additive Allee Effect. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **10**, 1401-1416. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2008.01.022

[4] Flores, J.D. and Gonzalez-Olivares, E. (2014) Dynamics of a Predator-Prey Model with Allee Effect on Prey and Ratio-Dependent Functional Response. *Ecological Complexity*, **18**, 59-66. https://doi.org/10.1016/j.ecocom.2014.02.005

[5] Qiao, T., Cai, Y., Fu, S., *et al.* (2019) Stability and Hopf Bifurcation in a Predator-Prey Model with the Cost of Anti-Predator Behaviors. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **29**, Article ID: 1950185. https://doi.org/10.1142/S0218127419501852

[6] Holyoak, M. (2003) Complex Population Dynamics: A Theoretical/Empirical Synthesis. *Integrative and Comparative Biology*, **43**, 479. https://doi.org/10.1093/icb/43.3.479

[7] Arancibia-Ibarra, C. and Gonzlez-Olivares, E. (2011) A Modified Leslie-Gower Predator-Prey Model with Hyperbolic Functional Response and Allee Effect on Prey. *BIOMAT 2010 Interna-*

tional Symposium on Mathematical and Computational Biology, Rio de Janeiro, Brazil, 24-29 July 2010, 146-162. https://doi.org/10.1142/9789814343435_0010

[8] Aziz-Alaoui, M.A. and Okiye, M.D. (2003) Boundedness and Global Stability for a Predator-Prey Model with Modified Leslie-Gower and Holling-Type II Schemes. *Applied Mathematics Letters*, **16**, 1069-1075. https://doi.org/10.1016/S0893-9659(03)90096-6

[9] Feng, P. and Kang, Y. (2015) Dynamics of a Modified Leslie-Gower Model with Double Allee Effects. *Nonlinear Dynamics*, **80**, 1051-1062. https://doi.org/10.1007/s11071-015-1927-2

[10] Singh, A. and Gakkhar, S. (2014) Stabilization of Modified Leslie-Gower Prey-Predator Model. *Differential Equations, Dynamical Systems*, **22**, 239-249. https://doi.org/10.1007/s12591-013-0182-6

[11] Arancibia-Ibarra, C. and Flores, J. (2021) Dynamics of a Leslie-Gower Predator-Prey Model with Holling Type II Functional Response, Allee Effect and a Generalist Predator. *Mathematics and Computers in Simulation*, **188**, 1-22. https://doi.org/10.1016/j.matcom.2021.03.035

[12] Moustafa, M., Mohd, M.H., Ismail, A.I. and Abdullah, F.A. (2018) Dynamical Analysis of a Fractional-Order Rosenzweig-MacArthur Model Incorporating a Prey Refuge. *Chaos, Solitons and Fractals*, **109**, 1-13. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2018.02.008

[13] Berec, L., Angulo, E. and Courchamp, F. (2007) Multiple Allee Effects and Population Management. *Trends in Ecology and Evolution*, **22**, 185-191. https://doi.org/10.1016/j.tree.2006.12.002

[14] Stephens, P.A., Sutherland, W.J., *et al.* (1999) Consequences of the Allee Effect for Behaviour, Ecology and Conservation. *Trends in Ecology and Evolution*, **14**, 401-405. https://doi.org/10.1016/S0169-5347(99)01684-5

[15] Kuznetsov, Y.A. (2013) Elements of Applied Bifurcation Theory. Springer Science and Business Media, Berlin.