Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(7), 1160-1168
Published Online July 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.127127

形式三角矩阵环上的强Gorenstein FP-内射模

谭 进

西北师范大学，数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2022年6月4日；录用日期：2022年7月7日；发布日期：2022年7月14日

摘 要

本文研究了形式三角矩阵环上的强Gorenstein FP-内射模。设$T=\begin{pmatrix} A & 0 \\ U & B \end{pmatrix}$是形式三角矩阵环，其中 A 和 B 是环， U 是左 B-右 A-双模。证明了若T是左凝聚环，${}_BU$是有限表示的且$pd({}_BU)<\infty$，$M=\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi^M}$是强Gorenstein FP-内射左 T-模，则$\ker\widetilde{\varphi^M}$是强Gorenstein FP-内射左$A$-模，$M_2$是强Gorenstein FP-内射左$B$-模，且$\widetilde{\varphi^M}$是满同态。

关键词

形式三角矩阵环，FP-内射模，强Gorenstein FP-内射模

Strongly Gorenstein FP-Injective Modules over Formal Triangular Matrix Rings

Jin Tan

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Jun. 5th, 2022; accepted: Jul. 7th, 2022; published: Jul. 14th, 2022

文章引用: 谭进. 形式三角矩阵环上的强Gorenstein FP-内射模[J]. 理论数学, 2022, 12(7): 1160-1168.
DOI: 10.12677/pm.2022.127127

Abstract

This paper considers strongly Gorenstein FP-injective modules over formal triangular matrix rings. Let $T = \begin{pmatrix} A & 0 \\ U & B \end{pmatrix}$ be formal triangular matrix ring, where A and B are two rings and U is a (B, A)-bimodule. It is proved that if T is a left coherent ring, ${}_BU$ is finitely presented and $pd({}_BU) < \infty$, $M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi^M}$ is strongly Gorenstein FP-injective left T-modules, then $\ker\widetilde{\varphi^M}$ is strongly Gorenstein FP-injective left A-modules, M_2 is strongly Gorenstein FP-injective left B-modules, and $\widetilde{\varphi^M}$ is an epimorphism.

Keywords

Formal Triangular Matrix Ring, FP-Injective Module, Strongly Gorenstein FP-Injective Module

1. 引言

Auslander和Bridger在1969年为有限生成模引入了Gorenstein维数的概念. 这种维数是投射维数的细化. Enochs等在文献 [1]中, 将Gorenstein维数为零的有限生成模称为Gorenstein投射模, 并且将Gorenstein投射模推广到任意环的情形下. 称左R-模M是FP-内射的, 如果对任意有限表示左R-模N, 有$\mathrm{Ext}^1_R(N, M) = 0$. 2008年, Mao 在文献 [2]中研究了Gorenstein FP-内射模. 2013年, Gao 在文献 [3]中引入了强Gorenstein FP-内射模的概念. 强Gorenstein FP-内射模是Gorenstein FP-内射模的一个特殊情况; 并证明了强Gorenstein FP-内射模位于FP-内射模和Gorenstein FP-内射模之间.

在环模理论中, 三角矩阵环是一类重要的非交换环, 是模范畴等价理论的重要工具, 在各个代数分支都有重要应用. 2019年, Mao 在文献 [4]中给出了形式三角矩阵环上的FP-内射模的等价刻画. 2022年, Yang 在文献 [5]中研究了形式三角矩阵环上的Gorenstein FP-内射模. 受到以上文献的启发, 本文主要研究了形式三角矩阵环上的强Gorenstein FP-内射模.

2. 预备知识

本文所有环均指有单位元的结合环.

设 $T=\begin{pmatrix} A & 0 \\ U & B \end{pmatrix}$ 为一个三角矩阵环, 其中 A,B 是环, U是 B-A-双模. 由文献 [6]知, 左 T-模范畴与范畴 Ω 等价. 范畴 Ω 中的对象是三元组 $M=\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi^M}$，其中 $M_1\in A$-Mod，$M_2\in B$-Mod，且 $\varphi^M: U\otimes_A M_1\to M_2$ 是 B-模同态. 任意两个对象 $M=\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi^M}$ 与 $N=\begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix}_{\varphi^N}$ 之间的态射是 $\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$，其中$f_1\in \mathrm{Hom}_A(M_1,N_1)$，$f_2\in \mathrm{Hom}_B(M_2,N_2)$，且满足以下交换图：

$$\begin{tikzcd} U\otimes_A M_1 \arrow[r, "1\otimes f_1"] \arrow[d, "\varphi^M"'] & U\otimes_A N_1 \arrow[d, "\varphi^N"] \\ M_2 \arrow[r, "f_2"] & N_2 \end{tikzcd}$$

给定 T-模 $M=\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi^M}$, 有 $\widetilde{\varphi^M}: M_1\to \mathrm{Hom}_B(U,M_2)$, 其中 $\widetilde{\varphi^M}(x)(u)=\varphi^M(u\otimes x)$, $x\in M_1$, $u\in U$.

左T-模序列

$$0\longrightarrow \begin{pmatrix} M_1' \\ M_2' \end{pmatrix}\longrightarrow \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}\longrightarrow \begin{pmatrix} M_1'' \\ M_2'' \end{pmatrix}\longrightarrow 0$$

是正合的当且仅当 $0\longrightarrow M_1'\longrightarrow M_1\longrightarrow M_1''\longrightarrow 0$ 和 $0\longrightarrow M_2'\longrightarrow M_2\longrightarrow M_2''\longrightarrow 0$ 都正合.

在模范畴 T-Mod和积范畴 A-Mod $\times$ B-Mod 之间, 我们定义了下述函子：

(1) $\mathbf{p}$: A-Mod $\times B$-Mod$\to$ T-Mod, 对任意$(M_1,M_2)\in$ A-Mod $\times$ B-Mod,

$$\mathbf{p}(M_1,M_2)=\begin{pmatrix} M_1 \\ (U\otimes_A M_1)\oplus M_2 \end{pmatrix}.$$

对 A-Mod $\times$ B-Mod中的任意态射(f_1,f_2)， $\mathbf{p}(f_1,f_2)=\begin{pmatrix} f_1 \\ (1\otimes f_1)\oplus f_2 \end{pmatrix}$.

(2) $\mathbf{h}$: A-Mod $\times B$-Mod$\to$ T-Mod, 对任意$(M_1,M_2)\in$ A-Mod $\times$ B-Mod,

$$\mathbf{h}(M_1,M_2)=\begin{pmatrix} M_1\oplus \mathrm{Hom}_B(U,M_2) \\ M_2 \end{pmatrix}.$$

对 A-Mod $\times$ B-Mod中的任意态射(f_1,f_2), $\mathbf{h}(f_1,f_2)=\begin{pmatrix} f_1\oplus \mathrm{Hom}_B(U,f_2) \\ f_2 \end{pmatrix}$.

(3) $\mathbf{q}: T\text{-Mod}\to A\text{-Mod}\times B\text{-Mod}$, 对任意 $\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} \in T\text{-Mod}$,

$$\mathbf{q}(\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}) = (M_1, M_2).$$

对 T-Mod 中的任意态射 $\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{q}(\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}) = (f_1, f_2)$.

显然($\mathbf{p},\mathbf{q}$)和($\mathbf{q},\mathbf{h}$)都是伴随对, 从而$\mathbf{p}$ 保持投射对象, $\mathbf{h}$保持内射对象.

定义2.1 [3] 称左R-模M是强Gorenstein FP-内射模, 如果存在FP-内射左R-模的正合序列

$$\Lambda : \cdots \xrightarrow{f} E \xrightarrow{f} E \xrightarrow{f} E \xrightarrow{f} \cdots$$

使得 $M \cong \ker(f)$, 并且对任意有限表示左R-模P且$pd(P) < \infty$, 有$\mathrm{Hom}_R(P, \Lambda)$正合.

引理2.2 [6] 设$M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi^M}$ 是左 T-模. 则 M是投射左 T-模当且仅当M_1 是投射左 A-模, $M_2/\mathrm{Im}\varphi^M$ 是投射左 B-模和 φ^M 是单的.

引理2.3 [7] 设$M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi^M}$ 是左 T-模, $pd({}_BU) < \infty$, 则 M 的投射维数有限当且仅当M_1 的投射维数有限和M_2 的投射维数有限.

引理2.4 [4] 设$M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi^M}$ 是左 T-模, ${}_BU$是有限表示的, 则 M 是FP-内射左T-模当且仅当$\ker\widetilde{\varphi^M}$ 是FP-内射左A-模, M_2是FP-内射左B-模, 且$\widetilde{\varphi^M}$是满的.

引理2.5 [8] 设B是左凝聚环, ${}_BU$是有限表示的,则$M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi^M}$ 是有限表示的当且仅当M_1 是有限表示的和M_2 是有限表示的.

3. 主要结果

下面讨论三角矩阵环上的强Gorenstein FP-内射模.

命题 3.1 设$M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi^M}$ 是左 T-模. 设T是左凝聚环, ${}_BU$是有限表示的,且 $pd({}_BU) < \infty$, 则以下结论成立:

(1) 如果M_1是强Gorenstein FP-内射左A-模, 则$\begin{pmatrix} M_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 是强Gorenstein FP-内射左 T-模.

(2) 如果M_2是强Gorenstein FP-内射左B-模, 则$\begin{pmatrix} \mathrm{Hom}_B(U, M_2) \\ M_2 \end{pmatrix}$ 是强Gorenstein FP-内射左 T-模.

证明: (1) 设M_1是强Gorenstein FP-内射左A-模, 则存在 FP-内射左A-模的正合序列

$$\Lambda : \cdots \xrightarrow{f} E \xrightarrow{f} E \xrightarrow{f} E \xrightarrow{f} \cdots$$

使得 $M_1 \cong \ker(f)$, 并且对任意有限表示左A-模P且$pd(P) < \infty$, 有$\mathrm{Hom}_A(P, \Lambda)$正合. 由引理 2.4 可得 FP-内射左$T$-模的正合序列

$$\cdots \longrightarrow \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix}_{\varphi^E} \xrightarrow{\binom{f}{0}} \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix}_{\varphi^E} \xrightarrow{\binom{f}{0}} \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix}_{\varphi^E} \xrightarrow{\binom{f}{0}} \cdots$$

使得$\begin{pmatrix} M_1 \\ 0 \end{pmatrix} \cong \ker \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$. 设$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}_{\varphi^P}$ 是任意有限表示左T-模, 且 $pd(\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}) < \infty$. 因为$T$是左凝聚环, 所以由文献 [9]可知$B$是左凝聚环. 又由引理2.3和引理2.5可知$P_1$是有限表示的, 且$pd(P_1) < \infty$. 由$\mathbf{q}, \mathbf{h}$函子的伴随性可得$\mathrm{Hom}_T(\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix}) \cong \mathrm{Hom}_A(P_1, E)$, 所以有复形的同构 $\mathrm{Hom}_T(\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Lambda \\ 0 \end{pmatrix}) \cong \mathrm{Hom}_A(P_1, \Lambda)$正合, 因此$\begin{pmatrix} M_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 是强Gorenstein FP-内射左 T-模.

(2) 设M_2是强Gorenstein FP-内射左B-模, 则存在FP-内射左B-模的正合序列

$$\Phi : \cdots \xrightarrow{g} Q \xrightarrow{g} Q \xrightarrow{g} Q \xrightarrow{g} \cdots$$

使得 $M_2 \cong \ker(g)$, 并且对任意有限表示左B-模P且$pd(P) < \infty$, 有$\mathrm{Hom}_B(P, \Phi)$正合. 因为${}_BU$是有限表示的, 且 $pd({}_BU) < \infty$, 所以$\mathrm{Hom}_B(U, \Phi)$正合,即有左A模的正合序列

$$\mathrm{Hom}_B(U, \Phi) : \cdots \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_B(U, Q) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_B(U, Q) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_B(U, Q) \longrightarrow \cdots$$

. 因此得到左T-模的正合序列

$$\Delta : \cdots \longrightarrow \begin{pmatrix} \mathrm{Hom}_B(U, Q) \\ Q \end{pmatrix} \xrightarrow{\binom{g^*}{g}} \begin{pmatrix} \mathrm{Hom}_B(U, Q) \\ Q \end{pmatrix} \xrightarrow{\binom{g^*}{g}} \begin{pmatrix} \mathrm{Hom}_B(U, Q) \\ Q \end{pmatrix} \longrightarrow \cdots$$

使得$\begin{pmatrix} \mathrm{Hom}_B(U, M_2) \\ M_2 \end{pmatrix} \cong \ker \begin{pmatrix} g^* \\ g \end{pmatrix}$. 任取有限表示左$T$-模$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}_{\varphi^P}$, 且 $pd(\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}) < \infty$. 因为$T$是左凝聚环, 所以由文献 [9]可知$B$是左凝聚环. 又由引理2.3和引理2.5可知$P_2$是有限表示的, 且$pd(P_2) < \infty$, 所以$\mathrm{Hom}_B(P_2, \Phi)$ 是正合的. 由$\mathbf{q}, \mathbf{h}$函子的伴随性可得$\mathrm{Hom}_T(\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathrm{Hom}_B(U, Q) \\ Q \end{pmatrix}) \cong \mathrm{Hom}_B(P_2, Q)$, 所以有复形的同构$\mathrm{Hom}_T(\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}, \Delta) \cong \mathrm{Hom}_B(P_2, \Phi)$正合, 因此$\begin{pmatrix} \mathrm{Hom}_B(U, M_2) \\ M_2 \end{pmatrix}$ 是强Gorenstein FP-内射左 T-模.

□

定理 3.2 设$M=\begin{pmatrix}M_1\\M_2\end{pmatrix}_{\varphi^M}$是左 T-模. 设T是左凝聚环, ${}_BU$是有限表示的,且 $pd({}_BU)<\infty$. 如果$M=\begin{pmatrix}M_1\\M_2\end{pmatrix}_{\varphi^M}$是强 Gorenstein FP-内射左 T-模,则$\ker\widetilde{\varphi^M}$是强Gorenstein FP-内射左$A$-模, M_2是强Gorenstein FP-内射左B-模, 且$\widetilde{\varphi^M}$是满同态.

证明: 因为$M=\begin{pmatrix}M_1\\M_2\end{pmatrix}_{\varphi^M}$是强 Gorenstein FP-内射左 T-模,所以存在 FP-内射左T-模的正合序列

$$\Delta:\cdots\longrightarrow\begin{pmatrix}E\\Q\end{pmatrix}_{\varphi^E}\xrightarrow{\binom{f}{g}}\begin{pmatrix}E\\Q\end{pmatrix}_{\varphi^E}\xrightarrow{\binom{f}{g}}\begin{pmatrix}E\\Q\end{pmatrix}_{\varphi^E}\longrightarrow\cdots$$

使得$M\cong\ker\begin{pmatrix}f\\g\end{pmatrix}$. 对任意有限表示左$T$-模$\begin{pmatrix}P_1\\P_2\end{pmatrix}_{\varphi^P}$, 且 $pd(\begin{pmatrix}P_1\\P_2\end{pmatrix})<\infty$, 有$\mathrm{Hom}_T(\begin{pmatrix}P_1\\P_2\end{pmatrix},\Delta)$正合. 由引理2.4可得 FP-内射左$B$-模的正合序列

$$\Delta_2:\cdots\xrightarrow{g}Q\xrightarrow{g}Q\xrightarrow{g}Q\xrightarrow{g}\cdots$$

且 $M_2\cong\ker(g)$.

设H_2是任意有限表示左B-模, 且$pd(H_2)<\infty$, 则存在左B-模的正合序列

$$0\longrightarrow L\longrightarrow K\longrightarrow H_2\longrightarrow 0\,,$$

其中L是有限生成左B-模, K是有限生成投射左B-模, 可得左T-模的正合序列

$$0\longrightarrow\begin{pmatrix}0\\L\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}0\\K\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}0\\H_2\end{pmatrix}\longrightarrow 0\,.$$

因为${}_BU$是有限生成的, 由文献 [8]和引理 2.2 可得$\begin{pmatrix}0\\L\end{pmatrix}$是有限生成左$T$-模, $\begin{pmatrix}0\\K\end{pmatrix}$是有限生成左投射$T$-模, 所以$\begin{pmatrix}0\\H_2\end{pmatrix}$是有限表示左$T$-模. 再由$pd(H_2)<\infty$和引理 2.3 知$pd(\begin{pmatrix}0\\H_2\end{pmatrix})<\infty$. 用函子$\mathrm{Hom}_T(\begin{pmatrix}0\\H_2\end{pmatrix},-)$ 作用正合列Δ,则有左T-模的正合序列

$$\cdots\longrightarrow\mathrm{Hom}_T(\begin{pmatrix}0\\H_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}E\\Q\end{pmatrix})\longrightarrow\mathrm{Hom}_T(\begin{pmatrix}0\\H_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}E\\Q\end{pmatrix})\longrightarrow\mathrm{Hom}_T(\begin{pmatrix}0\\H_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}E\\Q\end{pmatrix})\longrightarrow\cdots$$

又由$\mathbf{p},\mathbf{q}$函子的伴随性得$\mathrm{Hom}_T(\begin{pmatrix}0\\H_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}E\\Q\end{pmatrix})\cong\mathrm{Hom}_B(H_2,Q)$, 因此

$\mathrm{Hom}_T(\begin{pmatrix}0\\H_2\end{pmatrix},\Delta)\cong\mathrm{Hom}_B(H_2,\Delta_2)$正合, 所以$M_2$是强Gorenstein FP-内射左$B$-模.

考虑下面交换图

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\widetilde{\varphi^E}"'] & M_1 \arrow[d, "\widetilde{\varphi^M}"] \\
\mathrm{Hom}_B(U,Q) \arrow[r, "\beta"] & \mathrm{Hom}_B(U,M_2)
\end{tikzcd}$$

由于$_BU$是有限表示的, 且$pd(_BU)<\infty$, 所以$\mathrm{Hom}_B(U,\Delta_2)$正合, 所以$\beta$是满的. 又因为$\begin{pmatrix}E\\Q\end{pmatrix}$是FP-内射的, 由引理2.4知$\widetilde{\varphi^E}$是满的, 所以$\widetilde{\varphi^M}$是满的.

因为$\begin{pmatrix}E\\Q\end{pmatrix}_{\varphi^E}$是 FP-内射的, 由引理2.4知$\widetilde{\varphi^E}$是满的, 所以有正合列

$$0\longrightarrow\ker\widetilde{\varphi^E}\longrightarrow E\longrightarrow\mathrm{Hom}_B(U,Q)\longrightarrow 0\ ,$$

其中$\ker\widetilde{\varphi^E}$是 FP-内射左$A$-模, Q是 FP-内射左B-模.易得以下行正合的交换图

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \ker\widetilde{\varphi^E} \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_B(U,Q) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ker\widetilde{\varphi^E} \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_B(U,Q) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ker\widetilde{\varphi^E} \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_B(U,Q) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ker\widetilde{\varphi^E} \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_B(U,Q) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

因为第二列和第三列是正合的, 所以第一列也是正合的, 因此有左A-模的正合序列

$$\Delta_1:\cdots\xrightarrow{h}\ker\widetilde{\varphi^E}\xrightarrow{h}\ker\widetilde{\varphi^E}\xrightarrow{h}\ker\widetilde{\varphi^E}\xrightarrow{h}\cdots,$$

使得$\ker\widetilde{\varphi^M} \cong \ker(h)$. 下面证明对任意有限表示左$A$-模$H$, 且 $pd(H) < \infty$, 有$\mathrm{Hom}_A(H, \Delta_1)$正合. 不妨设 $pd(H) = m < \infty$, 对m进行归纳.

若$m = 0$, 则显然成立.

若$m \geq 1$, 则存在左A-模的正合序列 $0 \longrightarrow K \longrightarrow L \longrightarrow H \longrightarrow 0$, 其中L是有限生成投射左A-模且$pd(K) \leq m-1$. 又因为T是左凝聚环, 由文献 [9]知, A是左凝聚环, 所以K是有限表示左A-模. 又因为$\ker\widetilde{\varphi^E}$是 FP-内射的, 所以$\mathrm{Ext}_A^1(H, \ker\widetilde{\varphi^E}) = 0$, 故有以下行正合的交换图

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(H, \ker\widetilde{\varphi^E}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_A(L, \ker\widetilde{\varphi^E}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_A(K, \ker\widetilde{\varphi^E}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(H, \ker\widetilde{\varphi^E}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_A(L, \ker\widetilde{\varphi^E}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_A(K, \ker\widetilde{\varphi^E}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(H, \ker\widetilde{\varphi^E}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_A(L, \ker\widetilde{\varphi^E}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_A(K, \ker\widetilde{\varphi^E}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(H, \ker\widetilde{\varphi^E}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_A(L, \ker\widetilde{\varphi^E}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_A(K, \ker\widetilde{\varphi^E}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

因为L是有限生成投射左A-模, 所以第二列正合. 由归纳假设知, 第三列正合. 由长正合序列引理知, 第一列也正合, 即$\mathrm{Hom}_A(H, \Delta_1)$正合, 综上可得$\ker\widetilde{\varphi^M}$ 是强Gorenstein FP-内射左A-模.

$\square$

推论 3.3 设$M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi^M}$ 是左 T-模. 设T是左凝聚环, ${}_BU$是有限表示的,且 $pd({}_BU) < \infty$. 如果M是强 Gorenstein FP-内射左 T-模, $\mathrm{Hom}_B(U, M_2)$是有限表示的, 且$pd(\mathrm{Hom}_B(U, M_2)) < \infty$, 则存在强 Gorenstein FP-内射左 A-模E和强 Gorenstein FP-内射左 B-模Q, 使得$M \cong \mathbf{h}(E, Q)$.

证明: 设$M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi^M}$ 是强 Gorenstein FP-内射左 T-模, 由定理2.2知$\widetilde{\varphi^M}$是满的, 故存在左A-模的正合序列

$$0 \longrightarrow \ker\widetilde{\varphi^M} \longrightarrow M_1 \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(U, M_2) \longrightarrow 0\ ,$$

其中$\ker\widetilde{\varphi^M}$是强Gorenstein FP-内射左$A$-模, M_2是强Gorenstein FP-内射左B-模. 又因为$\mathrm{Hom}_B(U, M_2)$是有限表示的, 且$pd(\mathrm{Hom}_B(U, M_2)) < \infty$,所以有$\mathrm{Ext}_A^1(\mathrm{Hom}_B(U, M_2), \ker\widetilde{\varphi^M}) = 0$. 因此上述正合序列

是可裂的, 即$M_1 \cong \ker\widetilde{\varphi^M} \oplus \mathrm{Hom}_B(U, M_2)$. 取$E = \ker\widetilde{\varphi^M}$, $Q = M_2$,则有

$$M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} \ker\widetilde{\varphi^M} \oplus \mathrm{Hom}_B(U, M_2) \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \oplus \mathrm{Hom}_B(U, Q) \\ Q \end{pmatrix} = \mathbf{h}(E, Q).$$

□

参考文献

[1] Enochs, E.E. and Jenda, O.M.G. (1995) Gorenstein Injective and Projective Modules. *Mathematische Zeitschrift*, **220**, 611-633. https://doi.org/10.1007/BF02572634

[2] Mao, L.X. and Ding, N.Q. (2008) Gorenstein FP-Injective and Gorenstein Flat Modules. *Journal of Algebra and Its Application*, **7**, 491-506. https://doi.org/10.1142/S0219498808002953

[3] Gao, Z.H. (2013) On Strongly Gorenstein FP-Injective Modules. *Communications in Algebra*, **41**, 3035-3044. https://doi.org/10.1080/00927872.2012.672601

[4] Mao, L.X. (2020) Duality Pairs and FP-Injective Modules over Formal Triangular Matrix Rings. *Communications in Algebra*, **48**, 5296-5310. https://doi.org/10.1080/00927872.2020.1786837

[5] 杨银银, 张翠萍. 形式三角矩阵环上的Gorenstein FP-内射模[J]. 山东大学学报(理学版), 2022, 57(2): 38-44.

[6] Haghany, A. and Varadarajan, K. (2000) Study of Modules over Formal Triangular Matrix Rings. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **147**, 41-58. https://doi.org/10.1016/S0022-4049(98)00129-7

[7] Enochs, E.E., Izurdiaga, M.C. and Torrecillas, B. (2014) Gorenstein Conditions over Triangular Matrix Rings. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **218**, 1544-1554. https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2013.12.006

[8] 夏国利, 王芳贵. 形式三角矩阵环上的PC-内射模[J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2018, 41(1): 39-43.

[9] Haghany, A., Mazrooei, M. and Vedadi, M.R. (2012) Pure Projectivity and Pure Injectivity over Formal Triangular Matrix Rings. *Journal of Algebra and Its Applications*, **11**, 1-13. https://doi.org/10.1142/S0219498812501071