Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(7), 1103-1124
Published Online July 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.127122

具有时间依赖记忆核的粘弹性方程的吸引子

袁海燕，汪 璇*

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2022年5月25日；录用日期：2022年6月28日；发布日期：2022年7月5日

摘 要

对于具有时间依赖记忆核的粘弹性方程，本文研究了该方程解的长时间动力学行为。当非线性项 f 的增长指数 p 满足 $1 \leqslant p \leqslant 5$ 时，在新的理论框架下，利用积分估计方法得到了解的适定性。同时，当 p 满足 $1 \leqslant p < 5$ 时，证明了时间依赖全局吸引子的存在性以及不变性。

关键词

粘弹性方程，时间依赖记忆核，时间依赖全局吸引子

Attractors for the Viscoelastic Equation with Time-Dependent Memory Kernel

Haiyan Yuan, Xuan Wang*

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: May 25^{th}, 2022; accepted: Jun. 28^{th}, 2022; published: Jul. 5^{th}, 2022

Abstract

In this paper, we investigate the long-time dynamical behavior of solutions for the

* 通讯作者

文章引用: 袁海燕, 汪璇. 具有时间依赖记忆核的粘弹性方程的吸引子[J]. 理论数学, 2022, 12(7): 1103-1124.
DOI: 10.12677/pm.2022.127122

viscoelastic equation with time-dependent memory kernel. When the growth exponent p of nonlinearity $f(u)$ is up to $1 \leqslant p \leqslant 5$, the well-posedness of the solutions is proved by using the integral estimation method, and we obtained an invariant time-dependent global attractor when $1 \leqslant p < 5$.

Keywords

Viscoelastic Equation, Time-Dependent Memory Kernel, Time-Dependent Global Attractors

1. 引言

本文研究了具有时间依赖记忆核的粘弹性方程动力系统的解的长时间行为

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u_{tt} - h_t(0)\Delta u - \displaystyle\int_0^\infty \partial_s h_t(s)\Delta u(t-s)\mathrm{d}s + f(u) = g, & (x,t) \in \Omega \times (\tau, +\infty), \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega,\ \ t > \tau, \\ u(x,t) = u_\tau(x), & x \in \Omega,\ \ t \leqslant \tau, \\ u_t(x,t) = v_\tau(x), & x \in \Omega,\ \ t \leqslant \tau, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 为带有光滑边界的有界域.

设时间依赖函数 $h_t(s) = k_t(s) + k_\infty, k_\infty = 1, k_t(s) \geqslant 0, \partial_s k_t(s) \leqslant 0, \forall s \in \mathbb{R}^+, t \in \mathbb{R}$. 进一步, 假设 $\mu_t(s) = -\partial_s k_t(s) = -\partial_s h_t(s)$, 并且映射 $(t,s) \mapsto \mu_t(s) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ 满足以下条件:

(H_1) 对于任意固定的 $t \in \mathbb{R}$, 映射 $s \mapsto \mu_t(s)$ 是非增的, 绝对连续且可和的. 定义

$$\kappa(t) = \int_0^\infty \mu_t(s)\mathrm{d}s,\ \inf_{t\in\mathbb{R}} \kappa(t) > 0.$$

(H_2) 对于任意 $\tau \in \mathbb{R}$, 存在一个连续函数 $K_\tau : [\tau, \infty) \to \mathbb{R}^+$ 使得

$$\mu_t(s) \leqslant K_\tau(t)\mu_\tau(s), \quad \forall t \geqslant \tau, \ \ a.e. \ \ s \in \mathbb{R}^+.$$

(H_3) 对于每一个固定的 $s>0$, 映射 $t\mapsto\mu_t(s)$ 对于所有的 $t\in\mathbb{R}$ 是可微的, 并且对于任意的紧集 $\mathcal{K}\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$, 有

$$(t,s)\mapsto\mu_t(s)\in L^\infty(\mathcal{K}),\ (t,s)\mapsto\partial_t\mu_t(s)\in L^\infty(\mathcal{K}).$$

(H_4) 存在 $\delta>0$ 使得

$$\partial_t\mu_t(s)+\partial_s\mu_t(s)+\delta\kappa(t)\mu_t(s)\leqslant 0,\quad\forall\, t\in\mathbb{R}^+,\ \ a.e.\ \ s\in\mathbb{R}^+.$$

(H_5) 函数 $t\mapsto\partial_t\mu_t(s)$ 满足

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\frac{1}{[\kappa(t)]^2}\int_0^\infty|\partial_t\mu_t(s)|\mathrm{d}s<\infty.$$

(H_6) 对于任意的 $t\in\mathbb{R}$, $\mu_t(0)<C$, 并且

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\frac{\mu_t(0)}{[\kappa(t)]^2}<+\infty.$$

(H_7) 对于任意的 $a<b\in\mathbb{R}$, 存在 $\nu>0$, 使得

$$\int_\nu^{\frac{1}{\nu}}\mu_t(s)\mathrm{d}s\geqslant\frac{\kappa(t)}{2},\quad\forall\, t\in[a,b].$$

假设外力项 $g\in L^2(\Omega)$, 且非线性项 $f\in C^1(\mathbb{R})$ 满足 $f(0)=0$, 并且满足

$$|f(u_1)-f(u_2)|\leqslant C(1+|u_1|^{p-1}+|u_2|^{p-1})|u_1-u_2|,\quad\forall\, u_1,\ u_2\in\mathbb{R},\tag{1.2}$$

其中 $1\leqslant p\leqslant 5$, C 为正常数, 且存在 $\theta:0<\theta\leqslant 1$, 使得

$$\langle f(u),u\rangle\geqslant\langle F(u),1\rangle-\frac{1}{2}(1-\theta)\|u\|_1^2-c_f,\tag{1.3}$$

$$\langle F(u),1\rangle\geqslant-\frac{1}{2}(1-\theta)\|u\|_1^2-c_f,\quad\forall\, u\in\mathcal{H}_0^1(\Omega),\tag{1.4}$$

其中 $F(u)=\int_0^u f(s)ds,\ c_f\geqslant 0$.

当记忆核 $k_t(s)\equiv k(s)$ 时, 方程 (1.1) 转化为一般的衰退记忆型粘弹性方程. 近年来, 有许多学者都在从事关于粘弹性模型的研究, 并获得了丰硕的研究成果 [1–8]. 例如, 文献 [1] 中, Cavalcanti 等人在 2001 年建立了具有记忆项和非线性项 $|u_t|^\rho u_{tt}$ 的粘弹性模型, 并证明了弱解的整体存在性.

当方程包含记忆核 $k_t(s)$ 时, 表示粘弹性材料的粘性随着时间的流逝会逐渐消失, 即出现老化现象. 在 2018 年, Conti 等人在文献 [8] 中研究了具有时间依赖记忆核的粘弹性模型

$$\partial_{tt}u-h_t(0)\Delta u-\int_0^\infty\partial_s h_t(s)\Delta u(t-s)\mathrm{d}s+f(u)=g,\tag{1.5}$$

其中记忆核函数 $h_t(\cdot)$ 为随着时间而变化的可测函数, Conti 等人得到了方程 (1.5) 弱解的适定性. 在此基础上, 他们在文献 [9] 中证明了由方程 (1.5) 所生成的发展过程的时间依赖全局吸引子的存在性以及正则性.

受以上文献的启发, 本文在新的理论框架下, 利用积分估计方法得到了解的适定性, 并证明了时间依赖全局吸引子的存在性与不变性. 本文结构如下: 在第二节, 介绍了一些将要用到的概念和结论; 在第三节, 讨论了适定性, 并证明了方程 (1.1) 时间依赖全局吸引子的存在性与不变性.

在随后的论述中, 为了简便起见, 定义 C 为任意的正常数.

2. 预备知识

令 $\mu_t(s) = -\partial_s k_t(s) = -\partial_s h_t(s)$ 且 $k_t(\infty) = 1$, 则方程 (1.1) 可转化为

$$u_{tt} - \Delta u_{tt} - \Delta u - \int_0^\infty \mu_t(s)\Delta\eta^t(s)\mathrm{d}s + f(u) = g. \tag{2.1}$$

对于任意的 $t \geqslant \tau$, 有

$$\eta^t(s) = \begin{cases} u(t) - u(t-s), & s \leqslant t-\tau, \\ \eta_\tau(s-t+\tau) + u(t) - u_\tau, & s > t-\tau. \end{cases} \tag{2.2}$$

相应初-边值条件为:

$$\begin{cases} u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega,\ t > \tau, \\ \eta^t(x,s) = 0, & (x,s) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^+,\ t > \tau, \\ u(x,\tau) = u_\tau(x,t), & x \in \Omega, \\ u_t(x,\tau) = v_\tau(x,t), & x \in \Omega, \\ \eta^\tau(x,s) = \eta_\tau(x,s), & (x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}^+. \end{cases} \tag{2.3}$$

如同文献 [10], 设 $A = -\Delta$ 且定义域 $D(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. 考虑 Hilbert 空间族 $D(A^{\frac{k}{2}})$, $k \in \mathbb{R}$, 并赋予相应的内积与范数

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{D(A^{\frac{k}{2}})} = \langle A^{\frac{k}{2}} \cdot, A^{\frac{k}{2}} \cdot \rangle,\ \|\cdot\|_{D(A^{\frac{k}{2}})} = \|A^{\frac{k}{2}} \cdot\|,$$

这里 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 和 $\|\cdot\|$ 为 $L^2(\Omega)$ 的内积与范数.

因此, 对于任意的 $k > r$, 有紧嵌入 $D(A^{\frac{k}{2}}) \hookrightarrow D(A^{\frac{r}{2}})$, 以及对于所有的 $k \in [0, \frac{n}{2})$, 有连续嵌入 $D(A^{\frac{k}{2}}) \hookrightarrow L^{\frac{2n}{n-2k}}(\Omega)$.

对于 $0 \leqslant k < 3$, 记 $\mathcal{H}^k = D(A^{\frac{k}{2}})$, $\|\cdot\|_k = \|\cdot\|_{\mathcal{H}^k} = \|\cdot\|_{D(A^{\frac{k}{2}})}$, 则 $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$, $\mathcal{H}^1 = H_0^1(\Omega)$, $\mathcal{H}^2 = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. 根据记忆核函数满足的条件, 当 $0 \leqslant r < 3$ 时, 定义如下记忆空间

$$\mathcal{M}_t^\sigma = L^2_{\mu_t}(\mathbb{R}^+; \mathcal{H}^{1+\sigma}) = \{\xi^t : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{H}^{1+\sigma} \mid \int_0^\infty \mu_t(s)\|\xi^t(s)\|^2_{1+\sigma}\mathrm{d}s < +\infty\},$$

并赋予相应内积与范数

$$\langle \eta^t, \xi^t \rangle_{\mathcal{M}_t^\sigma} = \int_0^\infty \mu_t(s) \langle \eta^t(s), \xi^t(s) \rangle_{1+\sigma} \mathrm{d}s,$$

$$\|\xi^t\|_{\mathcal{M}_t^\sigma}^2 = \int_0^\infty \mu_t(s) \|\xi^t(s)\|_{1+\sigma}^2 \mathrm{d}s.$$

根据 (H_2), 对于任意的 $\eta^t \in \mathcal{M}_\tau^\sigma$, 有

$$\|\eta^t\|_{\mathcal{M}_t^\sigma}^2 \leqslant K_\tau(t) \|\eta^t\|_{\mathcal{M}_\tau^\sigma}^2, \quad \forall t \geqslant \tau, \tag{2.4}$$

且有连续嵌入

$$\mathcal{M}_\tau^\sigma \subset \mathcal{M}_t^\sigma, \quad \forall t \geqslant \tau.$$

特别地, 定义时间依赖相空间

$$\mathscr{H}_t^\sigma = \mathcal{H}^{1+\sigma} \times \mathcal{H}^{1+\sigma} \times \mathcal{M}_t^\sigma,$$

并且赋予范数

$$\|z\|_{\mathscr{H}_t^\sigma}^2 = \|(u, v, \eta^t)\|_{\mathscr{H}_t^\sigma}^2 = \|u\|_{1+\sigma}^2 + \|v\|_{1+\sigma}^2 + \|\eta^t\|_{\mathcal{M}_t^\sigma}^2.$$

对于任意的 $r > 0$ 以及任意的 $t \in \mathbb{R}$, 令

$$\mathbb{B}_t^\sigma(R) = \{z \in \mathscr{H}_t^\sigma : \|z\|_{\mathscr{H}_t^\sigma} \leqslant R\}.$$

定义 2.1 [11] 设 $\{\mathcal{H}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是一族赋范线性空间, 对于双参数算子族 $U(t,\tau): \mathcal{H}_\tau \to \mathcal{H}_t,\ t \geqslant \tau \in \mathbb{R}$, 如果满足以下性质:

(i) 对任意的 $\tau \in \mathbb{R}$, $U(\tau,\tau) = Id$ 是 $\mathcal{H}_t$ 上的恒等映射;

(ii) 对任意的 $t \geqslant s \geqslant \tau,\ \tau \in \mathbb{R}$, 有 $U(t,s)U(s,\tau) = U(t,\tau)$,
则称 $U(t,\tau)$ 是一个过程.

引理 2.2 [9](积分型 Gronwall 不等式) 设 $\Gamma : [\tau, \infty) \to \mathbb{R}$ 是连续函数, 对于某些 $\varepsilon > 0$ 以及任意的 $b > a \geqslant \tau$, 下列积分不等式成立:

$$\Gamma(b) + 2\varepsilon \int_a^b \Gamma(y)\mathrm{d}y \leqslant \Gamma(a) + \int_a^b q_1(y)\Gamma(y)\mathrm{d}y + \int_a^b q_2(y)\mathrm{d}y,$$

其中 $q_1,\ q_2 \geqslant 0$ 且 $q_i \in L^1_{loc}[\tau,\infty)(i = 1, 2)$ 满足, 存在 $c_1,\ c_2 \geqslant 0$, 使得

$$\int_a^b q_1(y)\mathrm{d}y \leqslant \varepsilon(b-a) + c_1,\ \sup_{t\geqslant\tau} \int_t^{t+1} q_2(y)\mathrm{d}y \leqslant c_2,$$

那么

$$\Gamma(t) \leqslant e^{c_1}\left[|\Gamma(\tau)|e^{-\varepsilon(t-\tau)} + \frac{c_2 e^{\varepsilon}}{1-e^{-\varepsilon}}\right], \quad \forall t \geqslant \tau.$$

定义 2.3 [12,13] 如果一个集族 $\mathfrak{B} = \{B_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是一致有界的, 即 $\sup_{t\in\mathbb{R}}\|B_t\|_{X_t} = \sup_{t\in\mathbb{R}}\sup_{\xi\in B_t}\|\xi\|_{X_t} < +\infty$, 并且对于每一个 $R > 0$, 存在常数 $\tau_e = \tau_e(R) \geqslant 0$, 使得

$$U(t,\tau)\mathbb{B}_\tau(R) \subset B_t, \quad \forall\, t-\tau \geqslant \tau_e,$$

则称 $\mathfrak{B} = \{B_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 为时间依赖吸收集.

定义 2.4 [12,13] 若一个集族 $\mathscr{A} = \{A_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 满足如下性质:

(i) 对任意的 $t \in \mathbb{R}$, 每一个 A_t 在 X_t 中都是紧的;

(ii) $\mathscr{A}$ 是拉回吸引的, 即 $\mathscr{A}$ 为一致有界的, 并且对任意的一致有界集族 $\mathcal{C} = \{C_t\}_{t\in\mathbb{R}}$,

$$\lim_{\tau\to-\infty} \mathrm{dist}_{X_t}(U(t,\tau)C_\tau, A_t) = 0;$$

(iii) (最小性) 若存在一个集族 $\mathcal{D} = \{D_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 满足 (i) 和 (ii), 那么 $A_t \subset D_t$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$,

则称 $\mathscr{A} = \{A_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 为过程 $U(t,\tau)$ 的时间依赖全局吸引子.

引理 2.5 [12] 过程 $U(t,\tau)$ 的时间依赖吸引子 $\mathscr{A} = \{A_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 存在且唯一当且仅当集合 $\mathcal{O} = \{O_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 为非空的, 其中$O_t \in X_t$ 是紧的, 并且 $\mathcal{O}$ 是拉回吸引的.

引理 2.6 [14] 设 $U(t,\tau)$ 是作用于时间依赖相空间 X_τ 的一个过程, 对任意的 $t \geqslant \tau$, $U(t,\tau): X_\tau \to X_t$ 是连续的, 且拥有时间依赖全局吸引子 $\mathscr{A} = \{A(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$. 那么 $\mathscr{A}$ 是不变的, 即, $U(t,\tau)A_\tau = A_t, \forall t \geqslant \tau$.

引理 2.7 [9] 记 $I = [\tau, T]$, 假设 $u \in W^{1,\infty}(I;\mathcal{H}^{1+\sigma})$ 且 $\eta_\tau \in \mathcal{M}_\tau^\sigma$. 那么, 对于任意的 $\tau \leqslant a \leqslant b \leqslant T$, 以下不等式成立:

$$\|\eta^b\|^2_{\mathcal{M}_b^\sigma} - \int_a^b\int_0^\infty [\partial_t\mu_t(s) + \partial_s\mu_t(s)]\|\eta^t(s)\|^2_{1+\sigma}\mathrm{d}s\mathrm{d}t \leqslant \|\eta^a\|^2_{\mathcal{M}_a^\sigma} + 2\int_a^b \langle u_t(t), \eta^t\rangle_{\mathcal{M}_t^\sigma}\mathrm{d}t.$$

引理 2.8 [9] 对于任意的 $b > a \geqslant \tau$ 以及每个 $\omega \in (0,1]$, 定义泛函

$$\Phi_0(t) = 2\langle u(t), u_t(t)\rangle_1,$$
$$\Psi_0(t) = -\frac{2}{\kappa(t)}\int_0^\infty \mu_t(s)\langle\psi^t(s), u_t(t)\rangle_1\mathrm{d}s.$$

函数 Φ_0 满足

$$\Phi_0(b) + (2-\omega)\int_a^b \|p(t)\|_1^2\mathrm{d}t \leqslant \Phi_0(a) + 2\int_a^b \|\partial_t p(t)\|_1^2\mathrm{d}t + \frac{1}{\omega}\int_a^b \kappa(t)\|\varphi^t\|^2_{\mathcal{M}_t}\mathrm{d}t - 2\int_a^b\langle\gamma(t), p(t)\rangle\mathrm{d}t,$$

并且 Ψ_0 满足

$$\begin{aligned}\Psi_0(b)+\int_a^b\|\partial_t p(t)\|_1^2\mathrm{d}t \leqslant &\Psi_0(a)-M\int_a^b\int_0^\infty\left[\partial_t\mu_t(s)+\partial_s\mu_t(s)\right]\|\varphi^t(s)\|_1^2\mathrm{d}s\mathrm{d}t\\ &+\omega\int_a^b\|p(t)\|_1^2\mathrm{d}t+\frac{C}{\omega}\int_a^b\kappa(t)\|\varphi^t\|_{\mathcal{M}_t}^2\mathrm{d}t\\ &+2\int_a^b\frac{2}{\kappa(t)}\int_0^\infty\mu_t(s)\langle\gamma(t),\varphi^t(s)\rangle\mathrm{d}s\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

其中 M 和 C 为仅依赖于记忆核的正常数.

3. 主要结果

3.1. 适定性

定义 3.1 对于任意的 $T>\tau\in\mathbb{R}$, 设 $g\in\mathcal{H}$, 且 $z_\tau=(u_\tau,v_\tau,\eta_\tau)\in\mathscr{H}_\tau$, 如果 $(u(\tau),u_t(\tau),\eta^\tau)=(u_\tau,v_\tau,\eta_\tau)$, 并且

(i) $z(t)\in\mathscr{H}_t$ $a.e.$ $t\in[\tau,T]$;

(ii) $u\in W^{2,\infty}(\tau,T;\mathcal{H}^1)$, $u_t\in C([\tau,T];\mathcal{H}^1)$, η^t 满足式 (2.2);

(iii) 对于任意的 $\omega\in\mathcal{H}^1$, 有

$$\langle u_{tt},\omega\rangle+\langle u_{tt},\omega\rangle_1+\langle u,\omega\rangle_1+\int_0^\infty\mu_t(s)\langle\eta^t(s),\omega\rangle_1\mathrm{d}s+\langle f(u),\omega\rangle=\langle g,\omega\rangle,\ \ a.e.\ \ t\in(\tau,T],$$

则称 $z(t)=(u(t),u_t(t),\eta^t)$ 为问题 (2.1) 在时间区间 I 上满足初值 $z(\tau)=z_\tau$ 的弱解.

定理 3.2(适定性) 记 $I=[\tau,T]$, $\forall\, T>\tau$. 假设 (1.2)-(1.4) 式以及条件 (H_1)-(H_7) 成立, $g\in\mathcal{H}$, 则对于任意的初值 $z_\tau\in\mathscr{H}_\tau$, z_τ 满足 $\|z_\tau\|_{\mathscr{H}_\tau}\leqslant R$, 问题 (2.1)-(2.3) 存在唯一弱解 $z(t)=(u(t),u_t(t),\eta^t)=U(t,\tau)z_\tau$, 则对于任意固定的 t, 有

$$\sup_{t\geqslant\tau}\|z(t)\|_{\mathscr{H}_t}^2+\int_\tau^t\kappa(y)\|\eta^y\|_{\mathcal{M}_y}^2\mathrm{d}y+\sup_{t\geqslant\tau}\int_t^{t+1}\|u_{tt}(s)\|_1^2\mathrm{d}s\leqslant Q(R),$$

其中 $Q(R)>0$ 是 R 上的一个连续增函数, 并且

$$\|\bar{z}(t)\|_{\mathscr{H}_t}^2\leqslant Q(R)e^{C(R,T)(t-\tau)}\|\bar{z}(\tau)\|_{\mathscr{H}_\tau}^2,\ \ t\in[\tau,T],$$

其中 $\bar{z}(t)=z_1(t)-z_2(t)$, 且 $z_1(t)$, $z_2(t)$ 是问题 (2.1)-(2.3) 满足初值 $z_1=(u_{1_\tau},v_{1_\tau},\eta_{1_\tau})$, $z_2=(u_{2_\tau},v_{2_\tau},\eta_{2\tau})$ 的弱解.

证明 方程 (2.1) 乘以 u_t, 可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|u\|_1^2+\|u_t\|^2+\|u_t\|_1^2+2\langle F(u),1\rangle-2\langle g,u\rangle)+2\langle u_t,\eta^t\rangle_{\mathcal{M}_t}=0. \tag{3.1}$$

定义 $N(t)=\|u\|_1^2+\|u_t\|^2+\|u_t\|_1^2+2\langle F(u),1\rangle-2\langle g,u\rangle$.

利用 (1.4) 式, 可知

$$N(t)\geqslant\frac{\theta}{2}(\|u\|_1^2+\|u_t\|_1^2)-Q_0,\tag{3.2}$$

其中 θ 由 (1.4) 式定义, $Q_0=\frac{2}{\theta\lambda_1}\|g\|^2+c_f$.

对 (3.1) 式在 $[\tau,t]$ 上积分, 得

$$N(t)+2\int_\tau^t\langle u_t,\eta^y\rangle_{\mathcal{M}_y}\mathrm{d}y=N(\tau)\leqslant Q(R),\ \ \forall t\geqslant\tau.\tag{3.3}$$

根据引理 2.7, 可知

$$\|\eta^t\|_{\mathcal{M}_t}^2-\int_\tau^t\int_0^\infty[\partial_y\mu_y(s)+\partial_s\mu_y(s)]\|\eta^y(s)\|_1^2\mathrm{d}s\mathrm{d}y\leqslant\|\eta^\tau\|_{\mathcal{M}_\tau}^2+2\int_\tau^t\langle u_t,\eta^y\rangle_{\mathcal{M}_y}\mathrm{d}y.\tag{3.4}$$

由 (1.2) 式, 可知

$$2\langle F(u),1\rangle\leqslant C(1+\|u\|_1^{p+1}),$$

结合 (3.2) 式, 得

$$\begin{aligned}&\frac{\theta}{2}(\|u\|^2+\|u_t\|_1^2+\|\eta^t\|_{\mathcal{M}_t}^2)-Q_0\\ \leqslant&\mathcal{N}(t)=N(t)+\|\eta^t\|_{\mathcal{M}_t}^2\\ \leqslant&C(1+\|u\|_1^2+\|u\|_1^{p+1}+2\|u_t\|_1^2+\|g\|^2),\ \ \forall t\geqslant\tau.\end{aligned}\tag{3.5}$$

因此,

$$\|(u(t),\eta^t)\|_{\mathscr{H}_t}^2+\int_\tau^t\kappa(y)\|\eta^y\|_{\mathcal{M}_y}^2\mathrm{d}y\leqslant Q(R),\quad\forall\, t\geqslant\tau,\tag{3.6}$$

方程 (2.1) 乘以 u_{tt}, 得

$$\|u_{tt}\|^2+\|u_{tt}\|_1^2=-\langle u,u_{tt}\rangle_1-\int_0^\infty\mu_t(s)\langle\eta^t(s),u_{tt}\rangle_1\mathrm{d}s-\langle f(u),u_{tt}\rangle+\langle g,u_{tt}\rangle.\tag{3.7}$$

由 (1.2) 式, 可得

$$|\langle f(u),u_{tt}\rangle|\leqslant\|f(u)\|_{L^{1+\frac{1}{p}}}\|u_{tt}\|_{L^{p+1}}\leqslant C(1+\|u(t)\|_1^p)\|u_{tt}\|_1,$$

并且由 (H_2) 得

$$\begin{aligned}\left|-\int_0^\infty \mu_t(s)\langle\eta^t(s),\partial_t u\rangle_1 \mathrm{d}s\right| &\leqslant \|u_{tt}\|_1\int_0^\infty \mu_t(s)\|\eta^t(s)\|_1\mathrm{d}s\\ &\leqslant \|u_{tt}\|_1\left(\int_0^\infty \mu_t(s)\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^\infty \mu_t(s)\|\eta^t(s)\|_1^2\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leqslant \|u_{tt}\|_1\sqrt{K_\tau(t)}\sqrt{\kappa(\tau)}\|\eta^t\|_{\mathcal{M}_t}.\end{aligned}$$

由 (3.7) 式可得

$$\begin{aligned}\|u_{tt}\|_1^2 &\leqslant C(1+\|u(t)\|_1+\|u(t)\|_1^p+\sqrt{K_\tau(t)}\sqrt{\kappa(\tau)}\|\eta^t\|_{\mathcal{M}_t}+\|g\|)\|u_{tt}\|_1\\ &\leqslant Q(R)(1+\sqrt{K_\tau(t)}\sqrt{\kappa(\tau)}\|\eta^t\|_{\mathcal{M}_t})\|u_{tt}\|_1\\ &\leqslant \frac{1}{2}\|u_{tt}\|_1^2+C(R,T),\quad \forall\, t\in[\tau,T].\end{aligned}\tag{3.8}$$

又因为

$$\begin{aligned}&\|u_{tt}\|_1^2 \leqslant \frac{1}{2}\|u_{tt}\|_1^2+Q(R)(1+\kappa(t)\|\eta^t\|_{\mathcal{M}_t}^2),\\ &\sup_{t\geqslant\tau}\int_t^{t+1}\|u_{tt}(s)\|_1^2\mathrm{d}s \leqslant Q(R)\left(1+\sup_{t\geqslant\tau}\int_t^{t+1}\kappa(s)\|\eta^s\|_{\mathcal{M}_s}^2\mathrm{d}s\right)\leqslant Q(R).\end{aligned}\tag{3.9}$$

设 $z_n(t)=(u_n,v_n,\eta_n^t)$, 存在 $\mathcal{H}^1$ 的正交基 $\{w_j\}_{j=1}^\infty$, 且 $Aw_j=\lambda_j w_j,\ j=1,2,\cdots$, 使得

$$\begin{aligned}&\langle\partial_{tt}u_n,w_j\rangle+\langle\partial_{tt}u_n,w_j\rangle_1+\langle u_n,w_j\rangle_1+\int_0^\infty \mu_t(s)\langle\eta_n^t(s),w_j\rangle_1\mathrm{d}s+\langle f(u_n),w_j\rangle\\ =&\langle g,w_j\rangle,\ \ j=1,\cdots,n,\ \ t>\tau,\end{aligned}\tag{3.10}$$

其中 $u_n=\Sigma_{j=i}^n T_{j_n}(t)(w_j)$, 并且

$$\eta_n^t(s)=\begin{cases}u_n(t)-u_n(t-s), & s\leqslant t-\tau,\\ \eta_{\tau_n}(s-t+\tau)+u_n(t)-u_{\tau_n}, & s>t-\tau,\end{cases}$$

以及相应初始条件

$$(u_n(\tau),\partial_t u_n(\tau),\eta_n^\tau)=(u_{\tau_n},v_{\tau_n},\eta_{\tau_n})\to(u_\tau,v_\tau,\eta_\tau).$$

关于 (3.10) 式在 $[\tau,t]$ 上积分, 得

$$\begin{aligned}&\int_\tau^t(\langle\partial_{tt}u_n,w_j\rangle+\langle\partial_{tt}u_n,w_j\rangle_1+\langle u_n,w_j\rangle_1+\int_0^\infty \mu_t(s)\langle\eta_n^t(s),w_j\rangle_1\mathrm{d}s\\ &+\langle f(u_n),w_j\rangle-\langle g,w_j\rangle)\mathrm{d}t=0,\ \ j=1,\cdots,n.\end{aligned}\tag{3.11}$$

又由于

$$\|f(u_n)\|_{L^{1+\frac{1}{p}}} \leqslant C(1+\|u_n\|_1^p) \leqslant Q(R),$$

则有如下结果

在 $L^\infty(\tau,T;\mathcal{H}^1\times\mathcal{H}^1\times\mathcal{H}^1)$ 上 $(u_n,\partial_t u_n,\partial_{tt}u_n)\to(u,\partial_t u,\partial_{tt}u)$ 弱 $*$ 收敛,

在 $\mathcal{H}^1\times\mathcal{H}^1\times\mathcal{H}^1$ 上 $(u_n(t),\partial_t u_n(t),\partial_{tt}u_n(t))\to(u(t),\partial_t u(t),\partial_{tt}u(t))$ 弱收敛,

在 $C([\tau,T];\mathcal{H}\times\mathcal{H})$ 上 $(u_n(t),\partial_t u_n(t))\to(u(t),\partial_t u(t))$,

在 $\Omega\times(\tau,T)$ 上 $(u_n,\partial_t u_n)\to(u,\partial_t u)$,

在 $L^\infty(\tau,T;L^{1+\frac{1}{p}})$ 上 $f(u_n)\to f(u)$ 弱 $*$ 收敛,

并且由 (3.16) 式知, 存在 $q^t\in\mathcal{M}_t$ 使得

在 $\mathcal{M}_t$ 上 $\eta_n^t\to q^t$ 弱 $*$ 收敛, $\forall\, t\in[\tau,T]$.

又设

$$\bar{\eta}_n^t=\eta_n^t-\eta^t,\ \bar{u}_n=u_n-u,\ \bar{\eta}_{\tau_n}=\eta_{\tau_n}-\eta_\tau,\ \bar{u}_{\tau_n}=u_{\tau_n}-u_\tau.$$

由 (2.4) 式, 得

$$\begin{aligned}
\|\bar{\eta}_n^t\|^2_{\mathcal{M}_t^{-1}} \leqslant& K_\tau(t)\|\bar{\eta}_n^t\|^2_{\mathcal{M}_\tau^{-1}}\\
=&C(T)\left(\int_0^{t-\tau}\mu_\tau(s)\|\bar{u}_n(t)-\bar{u}_n(t-s)\mathrm{d}r\|^2\mathrm{d}s\right.\\
&\left.+\int_{t-\tau}^\infty\mu_\tau(s)\|\bar{\eta}_{\tau_n}(s-t+\tau)+\bar{u}_n(t)-\bar{u}_{\tau_n}\mathrm{d}s\right)\\
\leqslant& C(T)(\|\bar{u}_n\|^2_{C([\tau,T];\mathcal{H})}\kappa(\tau)+\|\bar{\eta}_{\tau_n}\|^2_{\mathcal{M}_\tau})\to 0,\ \ \forall t\in[\tau,T].
\end{aligned}$$

根据极限的唯一性, 知 $q^t=\eta^t$.

由于

$$\bar{\eta}_n^t(s)=\begin{cases}\bar{u}_n(t)-\bar{u}_n(t-s), & s\leqslant t-\tau,\\ \bar{\eta}_{\tau_n}(s-t+\tau)+\bar{u}_n(t)-\bar{u}_{\tau_n}, & s>t-\tau,\end{cases}$$

则有

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty\mu_t(s)\langle\bar{\eta}_n^t(s),w_j\rangle_1\mathrm{d}s\\
=&\int_0^{t-\tau}\mu_t(s)\langle\bar{u}_n(t),w_j\rangle_1\mathrm{d}s-\int_0^{t-\tau}\mu_t(s)\langle\bar{u}_n(t-s),w_j\rangle_1\mathrm{d}s\\
&+\int_{t-\tau}^\infty\mu_t(s)\langle\bar{\eta}_{\tau_n}(s-t+\tau)-\bar{u}_{\tau_n},w_j\rangle_1\mathrm{d}s+\int_{t-\tau}^\infty\mu_t(s)\langle\bar{u}_n(t),w_j\rangle_1\mathrm{d}s\\
=&\kappa(t)\langle\bar{u}_n(t),w_j\rangle_1-\int_0^{t-\tau}\mu_t(s)\langle\bar{u}_n(t-s),w_j\rangle_1\mathrm{d}s\\
&+\int_0^\infty\mu_t(s+t-\tau)\langle\bar{\eta}_{\tau_n}(s),w_j\rangle_1\mathrm{d}s-\langle\bar{u}_n(s),w_j\rangle_1\int_{t-\tau}^\infty\mu_t(s)\mathrm{d}s.
\end{aligned}\tag{3.12}$$

DOI: 10.12677/pm.2022.127122

由于

$$
\begin{aligned}
&|\mu_t(s)\langle\bar{u}_n(t-s),w_j\rangle_1|\leqslant\mu_t(s)\|\bar{u}_n(t-s)\|_1\|w_j\|_1\leqslant Q(R)\mu_t(s)\in L^1(\mathbb{R}^+),\\
&\left|\int_0^\infty\mu_t(s+t-\tau)\langle\bar{\eta}_{\tau_n}(s),w_j\rangle_1\mathrm{d}s\right|\leqslant CK_\tau(t)\sqrt{\kappa(\tau)}\|\bar{\eta}_{\tau_n}\|_{\mathcal{M}_\tau}\to 0,
\end{aligned}
$$

因此, 当 $n\to\infty$ 时, 应用 Lebesgue 控制收敛定理, 可得

$$
\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty\mu_t(s)\langle\bar{\eta}_n^t(s),w_j\rangle_1\mathrm{d}s=0,\quad j=1,2,\cdots,n,\ \ a.e.\ t\in(\tau,T].
$$

又由于

$$
\begin{aligned}
\left|\int_0^\infty\mu_t(s)\langle\bar{\eta}_n^t(s),w_j\rangle_1\mathrm{d}s\right|&\leqslant\int_0^\infty\mu_t(s)\|\bar{\eta}_n^t(s)\|_1\|w_j\|_1\mathrm{d}s\\
&\leqslant C\sqrt{\kappa(t)}\|\bar{\eta}_{\tau_n}\|_{\mathcal{M}_t}\leqslant Q(R)(1+\kappa(t))\in L^1(\tau,t).
\end{aligned}
$$

根据 Lebesgue 控制收敛定理, 有

$$
\lim_{n\to\infty}\int_\tau^t\int_0^\infty\mu_t(s)\langle\bar{\eta}_n^t(s),w_j\rangle_1\mathrm{d}s\mathrm{d}t=0.
$$

令 (3.12) 式中 $n\to\infty$ 可知 $z=(u,u_t,\eta^t)$ 为问题 (2.1)-(2.3) 的弱解.

下面证明弱解的 Lipschitz 稳定性.设

$$
z_1=(u_1(t),\partial_t u_1(t),\eta_1^t),\ z_2=(u_2(t),\partial_t u_2(t),\eta_2^t)
$$

为问题 (2.1)-(2.3) 的两个弱解. 那么 $\bar{z}(t)=(\bar{u}(t),\partial_t\bar{u}(t),\bar{\eta}^t)=z_1(t)-z_2(t)$ 满足

$$
\bar{u}_{tt}+A\bar{u}_{tt}+A\bar{u}+\int_0^\infty\mu_t(s)A\bar{\eta}^t(s)\mathrm{d}s=-f(u_1)+f(u_2),\tag{3.13}
$$

其中

$$
\bar{\eta}^t(s)=\begin{cases}\bar{u}(t)-\bar{u}(t-s), & s\leqslant t-\tau,\\ \bar{\eta}_\tau(s-t+\tau)+\bar{u}(t)-\bar{u}_\tau, & s>t-\tau,\end{cases}
$$

方程 (3.13) 乘以 $\bar{u}_t$, 得

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(t)+\int_0^\infty\mu_t(s)\langle\bar{\eta}^t(s),\bar{u}_t(t)\rangle_1\mathrm{d}s\\
=&-\langle f(u_1)-f(u_2),\bar{u}(t)\rangle\\
\leqslant&C(1+\|u_1\|_{L^{p+1}}^{p-1}+\|u_2\|_{L^{p+1}}^{p-1})\|\bar{u}\|_{L^{p+1}}\|\bar{u}_t\|_{L^{p+1}}\\
\leqslant&C(R,T)F(t),\ \ t\in[\tau,T],
\end{aligned}
$$

其中 $F(t)=(\|\bar{u}\|_1^2+\|\bar{u}_t\|^2+\|\bar{u}_t\|_1^2)$.

因此, 对上式在 $[\tau, t]$ 上积分, 得

$$F(t)+2\int_{\tau}^{t}\langle\bar{u}_t(y),\bar{\eta}^y\rangle_{\mathcal{M}_y}\mathrm{d}y\leqslant F(\tau)+C(R,T)\int_{\tau}^{t}F(y)\mathrm{d}y,\ \ t\in[\tau,T]. \tag{3.14}$$

由引理 2.7 可知

$$\begin{aligned}&\|\bar{\eta}^t\|_{\mathcal{M}_t}^2-\int_{\tau}^{t}\int_0^{\infty}[\partial_y\mu_y(s)+\partial_s\mu_y(s)]\|\bar{\eta}^y(s)\|_1^2\mathrm{d}s\mathrm{d}y\\ \leqslant&\|\bar{\eta}^\tau\|_{\mathcal{M}_\tau}^2+2\int_{\tau}^{t}\langle\bar{u}_t,\bar{\eta}^y\rangle_{\mathcal{M}_y}\mathrm{d}y.\end{aligned} \tag{3.15}$$

设 $\mathcal{F}(t)=F(t)+\|\bar{\eta}^t\|_{\mathcal{M}_t^1}^2$, 则有

$$\|\bar{z}(t)\|_{\mathscr{H}_t}^2\leqslant\mathcal{F}(t)\leqslant Q(R)\|\bar{z}(t)\|_{\mathscr{H}_t}^2,$$

从而

$$\begin{aligned}&\mathcal{F}(t)\leqslant\mathcal{F}(\tau)+C(R,T)\int_{\tau}^{t}\mathcal{F}(y)\mathrm{d}y,\\&\mathcal{F}(t)\leqslant\mathcal{F}(\tau)e^{C(R,T)(t-\tau)},\\&\|\bar{z}(t)\|_{\mathscr{H}_t}^2\leqslant Q(R)e^{C(R,T)(t-\tau)}\|\bar{z}(\tau)\|_{\mathscr{H}_\tau}^2,\ \ t\in[\tau,T].\end{aligned}$$

其中, $\|\bar{z}_\tau\|_{\mathscr{H}_\tau}^2\leqslant R$. □

根据定理 3.2, 可以定义问题 (2.1)-(2.3) 在 $\mathscr{H}_t$ 上的解过程, 即

$$U(t,\tau):\mathscr{H}_\tau\to\mathscr{H}_t,\ U(t,\tau)z_\tau=z(t),\quad\forall\,z_\tau\in\mathscr{H}_\tau,\ t\geqslant\tau, \tag{3.16}$$

且 $\{U(t,\tau)\}$ 为作用于 $\mathscr{H}_t$ 上的过程族.

3.2. 时间依赖全局吸引子

定理 3.3(耗散性) 设 $\{U(t,\tau)\}_{t\geqslant\tau}$ 为 (3.16) 式定义的解过程, 并且 (1.2)-(1.4) 式以及条件 (H_1)-(H_7) 成立, $g\in\mathcal{H}$, 且 $z_\tau\in\mathscr{H}_\tau$ 满足 $\|z_\tau\|_{\mathscr{H}_\tau}\leqslant R$, 则存在 $\varepsilon>0,\ R_0>0$ 使得

$$\|U(t,\tau)z_\tau\|_{\mathscr{H}_t}^2\leqslant Q(R)e^{-\varepsilon(t-\tau)}+R_0,\quad\forall\,t\geqslant\tau.$$

证明 将方程 (2.1) 乘以 $2u(t)$, 可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(t)-2\|u_t\|_1^2-2\|u_t\|^2+2\langle f(u)-g,u\rangle&=-2\int_0^{\infty}\mu_t(s)\langle\eta^t(s),u\rangle_1\mathrm{d}s\\&\leqslant-2\int_0^{\infty}\mu_t(s)\|\eta^t(s)\|_1\|u\|_1\mathrm{d}s\\&\leqslant\frac{\theta}{2}\|u(t)\|_1^2+\frac{2}{\theta}\kappa(t)\|\eta^t\|_{\mathcal{M}_t}^2,\end{aligned} \tag{3.17}$$

其中

$$\Phi(t)=\langle u_t,u\rangle+\langle u_t,u\rangle_1\leqslant Q(R)(\|u\|_1^2+\|u_t\|_1^2). \tag{3.18}$$

对 (3.17) 式在 $[a,b]$ 上积分, 并利用 (1.3) 式, 可知

$$\begin{aligned}&\Phi(b)+(1+\frac{\theta}{2})\int_a^b\|u\|_1^2\mathrm{d}t+2\int_a^b\langle F(u),1\rangle\mathrm{d}t-2\int_a^b\langle g,u\rangle\mathrm{d}t\\ \leqslant&\Phi(a)+2\int_a^b\|u_t\|^2\mathrm{d}t+2\int_a^b\|u_t\|_1^2\mathrm{d}t+\frac{2}{\theta}\int_a^b\kappa(t)\|\eta^t\|^2_{\mathcal{M}_t^1}\mathrm{d}t+c_f(b-a).\end{aligned} \tag{3.19}$$

方程 (2.1) 各项乘以 $-\frac{2}{\kappa(t)}\mu_t(s)\eta^t(s)$, 关于 $s\in(0,\infty)$ 积分, 得

$$\begin{aligned}&-\frac{2}{\kappa(t)}\int_0^\infty\mu_t(s)\left[\langle u_{tt},\eta^t(s)\rangle+\langle u_{tt},\eta^t(s)\rangle_1\right]\mathrm{d}s\\ =&\frac{2}{\kappa(t)}\int_0^\infty\mu_t(s)\langle u,\eta^t(s)\rangle_1\mathrm{d}s+\frac{2}{\kappa(t)}\left\|\int_0^\infty\mu_t(s)A^{\frac12}\eta^t(s)\mathrm{d}s\right\|^2\\ &+\frac{2}{\kappa(t)}\int_0^\infty\mu_t(s)\langle f(u)-g,\eta^t(s)\rangle\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{3.20}$$

为了估计 (3.20) 式的左端, 定义泛函

$$\Psi(t)=-\frac{2}{\kappa(t)}\int_0^\infty\mu_t(s)\left[\langle u_t(t),\eta^t(s)\rangle+\langle u_t(t),\eta^t(s)\rangle_1\right]\mathrm{d}s, \tag{3.21}$$

且

$$\begin{aligned}|\Psi(t)|&\leqslant\frac{2}{\kappa(t)}\int_0^\infty\mu_t(s)\left[\|u_t(t)\|_1\|\eta^t(s)\|_1+\|u_t(t)\|\|\eta^t(s)\|\right]\mathrm{d}s\\ &\leqslant\frac{2}{\kappa(t)}\left[\sqrt{\kappa(t)}\|u_t(t)\|_1\|\eta^t\|_{\mathcal{M}_t}+\sqrt{\kappa(t)}\|u_t(t)\|\|\eta^t\|_{\mathcal{M}_t}\right]\\ &\leqslant Q(R)\left[\|u_t(t)\|_1^2+\|\eta^t\|^2_{\mathcal{M}_t}\right].\end{aligned} \tag{3.22}$$

定义分段函数

$$\phi_\varepsilon(s)=\begin{cases}0, & 0\leqslant s<\varepsilon,\\ \frac{s}{\varepsilon}-1, & \varepsilon\leqslant s<2\varepsilon,\\ 1, & 2\varepsilon\leqslant s\leqslant\frac{1}{\varepsilon},\\ 2-\varepsilon s, & \frac{1}{\varepsilon}\leqslant s<\frac{2}{\varepsilon},\\ 0, & \frac{2}{\varepsilon}\leqslant s,\end{cases}$$

其中 $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$, 并且

$$\mu_t^{\varepsilon}(s)=\phi_{\varepsilon}(s)\mu_t(s)\leqslant\mu_t(s),\ \forall s\in\mathbb{R}^+.$$

显然, $\mathrm{supp}\mu_t^{\varepsilon}(s)=[\varepsilon,\frac{2}{\varepsilon}]$. 设

$$\kappa_{\varepsilon}(t)=\int_0^{\infty}\mu_t^{\varepsilon}(s)\mathrm{d}s=\int_{\varepsilon}^{\frac{2}{\varepsilon}}\mu_t^{\varepsilon}(s)\mathrm{d}s\leqslant\kappa(t).$$

利用 (3.18) 和 (3.21) 式, 可知

$$|\Phi(t)|+|\Psi(t)|\leqslant Q(R)E(t), \tag{3.23}$$

其中 $E(t)=\frac{1}{2}\|U(t,\tau)z_{\tau}\|^2_{\mathscr{H}_t}$.

定义泛函

$$\Psi_{\varepsilon}(t)=-\frac{2}{\kappa_{\varepsilon}(t)}\int_0^{\infty}\mu_t^{\varepsilon}(s)\left[\langle u_t(t),\eta^t(s)\rangle+\langle u_t(t),\eta^t(s)\rangle_1\right]\mathrm{d}s,$$

则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Psi_{\varepsilon}(t)=J_1+J_2, \tag{3.24}$$

其中

$$J_1=-2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{\kappa_{\varepsilon}(t)}\right]\int_0^{\infty}\mu_t^{\varepsilon}(s)\langle u_t(t),\eta^t(s)\rangle_1\mathrm{d}s-\frac{2}{\kappa_{\varepsilon}(t)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^{\infty}\mu_t^{\varepsilon}(s)\langle u_t(t),\eta^t(s)\rangle_1\mathrm{d}s,$$

$$J_2=-2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{\kappa_{\varepsilon}(t)}\right]\int_0^{\infty}\mu_t^{\varepsilon}(s)\langle u_t(t),\eta^t(s)\rangle\mathrm{d}s-\frac{2}{\kappa_{\varepsilon}(t)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^{\infty}\mu_t^{\varepsilon}(s)\langle u_t(t),\eta^t(s)\rangle\mathrm{d}s.$$

令

$$R_{\varepsilon}(t)=\left[\frac{\kappa(t)}{\kappa_{\varepsilon}(t)}\right]^2\geqslant 1.$$

由条件 (H_7), 取 ε 充分小, 有

$$\sup_{t\in[a,b]}R_{\varepsilon}(t)\leqslant 4,\quad\forall\, t\in[a,b]. \tag{3.25}$$

类似于文献 [9] 中的证明, 得到

$$\begin{aligned}J_1(t)\leqslant&-(2-R_{\varepsilon}(t))\|u_t\|_1^2-M\int_0^{\infty}\left[\partial_t\mu_t(s)+\partial_s\mu_t(s)\right]\|\eta^t(s)\|_1^2\mathrm{d}s\\&+Q(R)\int_0^{\infty}r_{\varepsilon}(t,s)\mathrm{d}s-\frac{2\sqrt{R_{\varepsilon}(t)}}{\kappa(t)}\int_0^{\infty}\mu_t^{\varepsilon}(s)\langle u_{tt},\eta^t(s)\rangle\mathrm{d}s\\&+C\kappa(t)\|\eta^t(s)\|^2_{\mathcal{M}_t}.\end{aligned} \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned}J_2(t)\leqslant&-(2-R_\varepsilon(t))\|u_t\|^2-M\int_0^\infty\left[\partial_t\mu_t(s)+\partial_s\mu_t(s)\right]\|\eta^t(s)\|_1^2\mathrm{d}s\\&+Q(R)\int_0^\infty r_\varepsilon(t,s)\mathrm{d}s-\frac{2\sqrt{R_\varepsilon(t)}}{\kappa(t)}\int_0^\infty\mu_t^\varepsilon(s)\langle u_{tt},\eta^t(s)\rangle\mathrm{d}s\\&+C\kappa(t)\|\eta^t(s)\|^2_{\mathcal{M}_t}.\end{aligned}\tag{3.27}$$

将式 (3.25)-(3.27) 代入式 (3.24), 并在 $[a,b]$ 上积分, 得

$$\begin{aligned}&\Psi_\varepsilon(b)+\int_a^b\left[2-R_\varepsilon(t)\right]\|u_t\|_1^2\mathrm{d}t+\int_a^b\left[2-R_\varepsilon(t)\right]\|u_t\|^2\mathrm{d}t\\\leqslant&\Psi_\varepsilon(a)-2M\int_a^b\int_0^\infty\left[\partial_t\mu_t(s)+\partial_s\mu_t(s)\right]\|\eta^t(s)\|_1^2\mathrm{d}s\mathrm{d}t+C\int_a^b\kappa(t)\|\eta^t(s)\|^2_{\mathcal{M}_t}\mathrm{d}t\\&+Q(R)\int_a^b\int_0^\infty r_\varepsilon(t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t-\int_a^b\frac{2\sqrt{R_\varepsilon(t)}}{\kappa(t)}\int_0^\infty\mu_t^\varepsilon(s)\langle u_{tt}+Au_{tt},\eta^t(s)\rangle\mathrm{d}s\mathrm{d}t.\end{aligned}\tag{3.28}$$

当 $\varepsilon\to0$ 时, 显然有

$$\mu_t^\varepsilon(s)\to\mu_t(s),\ \kappa_\varepsilon(t)\to\kappa(t),\ R_\varepsilon(t)\to1,\quad\forall\,(t,s)\in[a,b]\times\mathbb{R}^+.$$

对任意的 $\delta>0$ 和任意固定的 $s>0$, 存在 $\delta_1=\frac{s}{2}>0$, 使得当 $\varepsilon<\delta_1$ 时,

$$\frac{1}{\varepsilon}\chi_{[\varepsilon,2\varepsilon]}(s)=0<\delta,\ \lim_{\varepsilon\to0}r_\varepsilon(t,s)=0.$$

令 (3.28) 式中 $\varepsilon\to0$, 并利用 Lebesgue 控制收敛定理, 可知

$$\begin{aligned}&\Psi(b)+\int_a^b\|u_t\|_1^2\mathrm{d}t+\int_a^b\|u_t\|^2\mathrm{d}t\\\leqslant&\Psi(a)-2M\int_a^b\int_0^\infty\left[\partial_t\mu_t(s)+\partial_s\mu_t(s)\right]\|\eta^t(s)\|_1^2\mathrm{d}s\mathrm{d}t+C\int_a^b\kappa(t)\|\eta^t(s)\|^2_{\mathcal{M}_t^1}\mathrm{d}t\\&-\int_a^b\frac{2}{\kappa(t)}\int_0^\infty\mu_t(s)\langle u_t+Au_t,\eta^t(s)\rangle\mathrm{d}s\mathrm{d}t.\end{aligned}\tag{3.29}$$

由方程 (2.1) 可知

$$\begin{aligned}&-\frac{2}{\kappa(t)}\int_0^\infty\mu_t(s)\langle u_{tt}+Au_{tt},\eta^t(s)\rangle\mathrm{d}s\\=&\frac{2}{\kappa(t)}\left[\int_0^\infty\mu_t(s)\langle u(t),\eta^t(s)\rangle_1\mathrm{d}s+\left\|\int_0^\infty\mu_t(s)A^{\frac12}\eta^t(s)\mathrm{d}s\right\|^2+\int_0^\infty\mu_t(s)\langle f(u)-g,\eta^t(s)\rangle\mathrm{d}s\right]\\\leqslant&\frac{2}{\kappa(t)}\left[(\|u(t)\|_1+\|f(u)\|_{L^{\frac65}}+\|g\|_{-1})\int_0^\infty\mu_t(s)\|\eta^t(s)\|_1\mathrm{d}s\right.\\&\left.+\int_\Omega\left(\int_0^\infty\mu_t(s)\mathrm{d}s\int_0^\infty\mu_t(s)(A^{\frac12}\eta^t(s))^2\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x\right]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \frac{2}{\sqrt{\kappa(t)}}(\|u(t)\|_1+(1+\|u\|_{L^6}^4)\|u\|_{L^6}+\|g\|)\|\eta^t\|_{\mathcal{M}_t}+2\int_0^\infty \mu_t(s)\int_\Omega \left|A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\right|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}s\\
&\leqslant \frac{\theta}{16}\|u(t)\|_1^2+\frac{\theta}{32}\|g\|^2+Q(R)\|\eta^t\|_{\mathcal{M}_t}^2\\
&\leqslant \frac{\theta}{16}\|u(t)\|_1^2+\frac{\theta}{32}\|g\|^2+Q(R)\kappa(t)\|\eta^t\|_{\mathcal{M}_t}^2, \qquad (3.30)
\end{aligned}
$$

其中应用了不等式 $1\leqslant \frac{1}{\inf_{t\in\mathbb{R}}\kappa(t)}\kappa(t)\leqslant C\kappa(t)$.

将 (3.30) 式代入 (3.29) 式, 得

$$
\begin{aligned}
&\Psi(b)+\int_a^b \|u_t\|_1^2\mathrm{d}t+\int_a^b\|u_t\|^2\mathrm{d}t\\
\leqslant&\Psi(a)-2M\int_a^b\int_0^\infty\left[\partial_t\mu_t(s)+\partial_s\mu_t(s)\right]\|\eta^t(s)\|_1^2\mathrm{d}s\mathrm{d}t+\frac{\theta}{16}\|u\|_1^2\mathrm{d}t\\
&+Q(R)\int_a^b\kappa(t)\|\eta^t(s)\|_{\mathcal{M}_t}^2\mathrm{d}t+\frac{\theta}{32}\|g\|^2(b-a). \qquad (3.31)
\end{aligned}
$$

设

$$
\Upsilon(t)=\mathcal{N}(t)+2\varepsilon\left[\Phi(t)+4\Psi(t)\right]+Q_0,
$$

其中 $\mathcal{N}(t)$ 由 (3.5) 式所定义, $\Phi(t)$ 和 $\Psi(t)$ 由 (3.23) 式所定义.

取 $\varepsilon>0$ 充分小, 由 (3.5) 和 (3.23) 式可知

$$
\begin{aligned}
&\frac{\theta}{4}E(t)-Q_0\leqslant\mathcal{N}(t)\leqslant Q(R)E(t)+C\|g\|^2,\\
&\frac{\theta}{2}E(t)\leqslant\Upsilon(t)\leqslant Q(R)E(t)+Q_1, \qquad (3.32)
\end{aligned}
$$

其中 $E(t)$ 由 (3.23) 式定义, 且 $Q_1=C(Q_0+\|g\|^2)=C(c_f+\|g\|^2)$.

根据 (3.3), (3.19) 和 (3.29) 式, 并利用条件 (H_4) 以及 (3.32) 式可得

$$
\Upsilon(b)+2\varepsilon\int_a^b\Upsilon(t)\mathrm{d}t+P_1+P_2\leqslant\Upsilon(a)+\varepsilon Q_1(b-a),
$$

且

$$
\begin{aligned}
&P_1=\varepsilon\int_a^b\left(\theta E(t)-4\varepsilon\left[\Phi(t)+4\Psi(t)\right]\right)\mathrm{d}t\geqslant 0,\\
&P_2=-(1-16\varepsilon M)\int_a^b\int_0^\infty\left[\partial_t\mu_t(s)+\partial_s\mu_t(s)\right]\|\eta^t(s)\|_1^2\mathrm{d}s\mathrm{d}t-\varepsilon Q(R)\int_a^b\kappa(t)\|\eta^t\|_{\mathcal{M}_t}^2\mathrm{d}t\\
&\quad\geqslant\left[\delta(1-16\varepsilon M)-\varepsilon Q(R)\right]\int_a^b\kappa(t)\|\eta^t\|_{\mathcal{M}_t}^2\mathrm{d}t\geqslant 0.
\end{aligned}
$$

最后, 应用引理 1.2 得到

$$\Upsilon(t) \leqslant \Upsilon(\tau)e^{-\varepsilon(t-\tau)} + \frac{\varepsilon Q_1 e^{\varepsilon}}{1-e^{-\varepsilon}},$$

$$E(t) \leqslant \frac{2}{\theta}\Upsilon(t) \leqslant Q(R)e^{-\varepsilon(t-\tau)} + R_0,$$

其中 $R_0 = \frac{2Q_1}{\theta} \sup\limits_{\varepsilon\in(0,1]} \frac{\varepsilon e^{\varepsilon}}{1-e^{-\varepsilon}}$. □

定理 3.4 若定理 3.3 的假设成立, 且 $c_f = 0,\ g = 0$, 则 $R_0 = Q_1 = 0$, 并且

$$\|U(t,\tau)\|^2_{\mathscr{H}_t} \leqslant Q(R)e^{-\varepsilon(t-\tau)}, \quad \forall \|z_\tau\|^2_{\mathscr{H}_\tau} \leqslant R,\ t \geqslant \tau.$$

设任意固定的 $\tau \in \mathbb{R}$ 且 $(p_\tau, \varphi_\tau) \in \mathscr{H}_\tau$. 考虑方程

$$Ap_{tt} + Ap + \int_0^\infty \mu_t(s)A\varphi^t(s)\mathrm{d}s + \gamma(t) = 0, \tag{3.33}$$

其中 γ 为外力项, 且

$$\varphi^t(s) = \begin{cases} p(t) - p(t-s)\mathrm{d}r, \\ \\ \varphi_\tau(s-t+\tau) + p(t) - p_\tau, \end{cases} \tag{3.34}$$

相应初值条件为

$$(p(\tau), p_t(\tau), \varphi^\tau) = (p_\tau, q_\tau, \varphi_\tau). \tag{3.35}$$

引理 3.5 如果非线性项 f 满足 (1.2) 式, 将其分解为:

$$f(s) = f_0(s) + f_1(s),$$

其中 f_1 为 Lipschitz 连续函数且 $f_1(0) = 0$, 并且

$$f_0(s) = 0, \quad \forall s \in [-1,1],\ f_0(s)s \geqslant F_0(s) := \int_0^s f_0(y)\mathrm{d}y, \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

$$|f_0(s_1) - f_0(s_2)| \leqslant C|s_1 - s_2|(1 + |s_1| + |s_2|)^{p-1}, \quad \forall s_1, s_2 \in \mathbb{R}.$$

定理 3.3 表明过程 $U(t,\tau)$ 有时间依赖吸收集 $\mathfrak{B} = \{B_t\}_{t\in\mathbb{R}}$. 对于任意的 $z_\tau = (u_\tau, v_\tau, \eta_\tau) \in B_\tau$, 分解问题 (2.1)-(2.3) 的解 $U(t,\tau)z_\tau$, 有

$$U(t,\tau)z_\tau = U_0(t,\tau)z_\tau + U_1(t,\tau)z_\tau,$$

其中 $U_0(t,\tau)z_\tau = z_1(t)$ 且 $U_1(t,\tau)z_\tau = z_2(t)$, 即 $z=(u,u_t,\eta^t)=z_1(t)+z_2(t)$, $z_1(t)$ 满足

$$\begin{cases} v_{tt}+Av_{tt}+Av+\int_0^\infty \mu_t(s)A\xi^t(s)\mathrm{d}s+f_0(v)=0, \\ U_0(\tau,\tau)z_\tau = z_\tau, \end{cases}$$

且

$$\xi^t(s)=\begin{cases} v(t)-v(t-s)\mathrm{d}r, & s\leqslant t-\tau, \\ \xi_\tau(s-t+\tau)+v(t)-v_\tau, & s>t-\tau, \end{cases}$$

$z_2(t)$ 满足

$$\begin{cases} w_{tt}+Aw_{tt}+Aw+\int_0^\infty \mu_t(s)A\zeta^t(s)\mathrm{d}s+f(u)-f_0(v)=g, \\ U_1(\tau,\tau)z_\tau = 0, \end{cases} \tag{3.36}$$

且

$$\zeta^t(s)=\begin{cases} w(t)-w(t-s), & s\leqslant t-\tau, \\ \zeta_\tau(s-t+\tau)+w(t)-w_\tau, & s>t-\tau, \end{cases}$$

其中 $\eta_\tau=\xi_\tau+\zeta_\tau$.

根据定理 3.4, 可知

$$\|U_0(t,\tau)z_\tau\|^2_{\mathscr{H}_t}\leqslant Ce^{-\varepsilon(t-\tau)},\quad \forall t\geqslant\tau, \tag{3.37}$$

并且由 (3.9) 式, 可得

$$\sup_{t\geqslant\tau}\int_t^{t+1}\|v_{tt}(t)\|_1^2\mathrm{d}t\leqslant Q(R). \tag{3.38}$$

引理 3.6 假设 (1.2)-(1.4) 式以及条件 (H_1)-(H_7) 成立, $g\in\mathcal{H}$, 且 $z_\tau=(u_\tau,\eta_\tau)\in\mathscr{H}_\tau$, 满足 $\|z_\tau\|_{\mathscr{H}_\tau}\leqslant R$. 则

$$\|U_1(t,\tau)z_\tau\|^2_{\mathscr{H}_t^\sigma}\leqslant Q(R),\quad \forall t\geqslant\tau. \tag{3.39}$$

其中 $0<\sigma\leqslant\frac{1}{3}$.

证明 将方程 (3.36) 乘以 $A^\sigma w_t$, 可得

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}N_\sigma(t)+\langle u_{tt}-v_{tt},A^\sigma w\rangle+2\langle\zeta^t,w_t(t)\rangle_{\mathcal{M}_t^\sigma} \\ =&2\langle g-f_1(u),A^\sigma w\rangle-2\langle f_0(u)-f_0(v),A^\sigma w\rangle, \end{aligned} \tag{3.40}$$

其中 $N_\sigma(t)=\|w(t)\|^2_{1+\sigma}+\|w_t(t)\|^2_{1+\sigma}$.

由引理 3.5, 定理 3.2 以及 Sobolev 嵌入, 得

$$2|\langle g-f_1(u),A^\sigma w_t\rangle|\leqslant C(\|g\|+\|u\|)\|A^\sigma w_t\|\leqslant\frac{\varepsilon_1}{2}\|w_t\|^2_{1+\sigma}+\frac{Q(R)}{\varepsilon_1},\tag{3.41}$$

$$\begin{aligned}2|\langle f_0(u)-f_0(v),A^\sigma w_t\rangle|&\leqslant C(1+\|u\|^{p-1}_{L^{\frac{3(p-1)}{2}}}+\|v\|^{p-1}_{L^{\frac{3(p-1)}{2}}})\|w\|_{L^{18}}\|A^\sigma w_t\|_{L^{\frac{18}{5}}}\\&\leqslant Q(R)(\|w\|^2_{1+\sigma}\|w_t\|^2_{1+\sigma})\\&\leqslant\frac{\varepsilon_1}{2}\|w_t\|^2_{1+\sigma}+\frac{Q(R)}{\varepsilon_1}\|w\|^2_{1+\sigma}\\&\leqslant\frac{\varepsilon_1}{2}(\|w\|^2_{1+\sigma}+\|w_t\|^2_{1+\sigma})+\frac{Q(R)}{\varepsilon_1},\end{aligned}\tag{3.42}$$

$$\langle u_{tt}-v_{tt},A^\sigma w_t\rangle\leqslant\varepsilon_1\|w_t(t)\|^2_{1+\sigma}+\frac{Q(R)}{\varepsilon_1}(\|u_{tt}\|^2_1+\|v_{tt}\|^2_1).\tag{3.43}$$

其中应用了不等式 $\frac{3(p-1)}{2(p+1)}<1$.

将 (3.41)-(3.43) 式代入 (3.40) 式, 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}N_\sigma(t)+2\langle\zeta^t,w_t(t)\rangle_{\mathcal{M}_t^\sigma}\leqslant\varepsilon_1(\|w(t)\|^2_{1+\sigma}+\|w_t(t)\|^2_{1+\sigma})+\frac{Q(R)}{\varepsilon_1}y_1(t),$$

$$\begin{aligned}&N_\sigma(b)+2\int_a^b\langle\zeta^t,w_t\rangle_{\mathcal{M}_t^\sigma}\mathrm{d}t\\\leqslant&N_\sigma(a)+\varepsilon_1\int_a^b(\|w\|^2_{1+\sigma}+\|w_t\|^2_{1+\sigma})\mathrm{d}t+\frac{Q(R)}{\varepsilon_1}\int_a^b y_1(t)\mathrm{d}t,\end{aligned}\tag{3.44}$$

其中 $y_1(t)=1+\|u_{tt}\|^2_1+\|v_{tt}\|^2_1$, 且 $\sup\limits_{t\geqslant\tau}\int_t^{t+1}y_1(r)\mathrm{d}r\leqslant Q(R)$.

设

$$E_\sigma(t):=\frac{1}{2}\|U_1(t,\tau)z_\tau\|^2_{\mathscr{H}_t^\sigma}=\frac{1}{2}(\|w(t)\|^2_{1+\sigma}+\|w_t(t)\|^2_{1+\sigma}+\|\zeta^t\|^2_{\mathcal{M}_t^\sigma}),$$

并利用引理 2.7, 可得

$$\begin{aligned}&2E_\sigma(b)-\int_a^b\int_0^\infty[\partial_s\mu_t(s)+\partial_t\mu_t(s)]\,\|\zeta^t(s)\|^2_{1+\sigma}\mathrm{d}s\mathrm{d}t\\\leqslant&2E_\sigma(a)+\varepsilon_1\int_a^b(\|w\|^2_{1+\sigma}+\|w_t\|^2_{1+\sigma})\mathrm{d}t+\frac{Q(R)}{\varepsilon_1}\int_a^b y_1(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}\tag{3.45}$$

设

$$(p,p_t,\varphi^t)=(A^{\frac{\sigma}{2}}w,A^{\frac{\sigma}{2}}w_t,A^{\frac{\sigma}{2}}\zeta^t),\ \gamma(t)=g-f(u)+f_0(v)-u_{tt}+v_{tt},$$

则

$$\Phi_0(t)=\Phi_\sigma(t)=2\langle w_t(t),w(t)\rangle_{1+\sigma},\ \Psi_0(t)=\Psi_\sigma(t)=-\frac{2}{\kappa(t)}\int_0^\infty\mu_t(s)\langle\zeta^t(s),w_t(t)\rangle_{1+\sigma}\mathrm{d}s.$$

类似于定理 3.3 的证明, 得到

$$|\Phi_\sigma(t)|+|\Psi_\sigma(t)|\leqslant CE_\sigma(t). \tag{3.46}$$

由引理 2.8 (令 $w=\frac{1}{20}$), 可知

$$\begin{aligned}&\Phi_\sigma(b)+4\Psi_\sigma(b)+\frac{7}{4}\int_a^b\|w(t)\|_{1+\sigma}^2\mathrm{d}t+2\int_a^b\|w_t(t)\|_{1+\sigma}^2\mathrm{d}t+\frac{5}{4}\int_a^b\|\zeta^t\|_{\mathcal{M}_t^\sigma}^2\mathrm{d}t\\ \leqslant&\Phi_\sigma(a)+4\Psi_\sigma(a)-4M\int_a^b\int_0^\infty[\partial_s\mu_t(s)+\partial_t\mu_t(s)]\,\|\zeta^t(s)\|_{1+\sigma}^2\mathrm{d}s\mathrm{d}t\\ &+C\int_a^b(\kappa(t)+1)\|\zeta^t\|_{\mathcal{M}_t^\sigma}^2\mathrm{d}t-2\int_a^b\langle\gamma(t),A^\sigma w(t)\rangle\mathrm{d}t\\ &+8\int_a^b\frac{2}{\kappa(t)}\int_0^\infty\mu_t(s)\langle\gamma(t),A^\sigma\zeta^t(s)\rangle\mathrm{d}s\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{3.47}$$

由 (3.41)-(3.43), 取 $\varepsilon_1=\frac{1}{16}$, 有

$$\left|2\int_a^b\langle\gamma(t),A^\sigma w(t)\rangle\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{1}{8}\int_a^b\|w(t)\|_{1+\sigma}^2\mathrm{d}t+Q(R)\int_a^b y_1(t)\mathrm{d}t, \tag{3.48}$$

并且

$$\begin{aligned}&\langle\gamma(t),A^\sigma\zeta^t(s)\rangle\leqslant\frac{1}{64}\|w(t)\|_{1+\sigma}^2+C\|\zeta^t(s)\|_{1+\sigma}^2+Q(R)y_1(t),\\ &8\int_a^b\frac{2}{\kappa(t)}\int_0^\infty\mu_t(s)\langle\gamma(t),A^\sigma\zeta^t(s)\rangle\mathrm{d}s\mathrm{d}t\\ \leqslant&\frac{1}{4}\int_a^b\|w(t)\|_{1+\sigma}^2\mathrm{d}t+C\int_a^b\kappa(t)\|\zeta^t\|_{\mathcal{M}_t^\sigma}^2\mathrm{d}t+Q(R)\int_a^b y_1(t)\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{3.49}$$

将 (3.48)-(3.49) 式代入 (3.47) 式, 可得

$$\begin{aligned}&\Phi_\sigma(b)+4\Psi_\sigma(b)+\frac{5}{2}\int_a^b E_\sigma(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{8}\int_a^b(\|w(t)\|_{1+\sigma}^2+\|w_t(t)\|_{1+\sigma}^2)\mathrm{d}t\\ \leqslant&\Phi_\sigma(a)+\Psi_\sigma(a)+C\int_a^b\kappa(t)\|\zeta^t\|_{\mathcal{M}_t^\sigma}^2\mathrm{d}t+Q(R)\int_a^b y_1(t)\mathrm{d}t\\ &-4M\int_a^b\int_0^\infty[\partial_s\mu_t(s)+\partial_t\mu_t(s)]\,\|\zeta^t(s)\|_{1+\sigma}^2\mathrm{d}s\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{3.50}$$

设

$$\Upsilon_\sigma(t) = \mathcal{N}_\sigma(t) + 2\varepsilon\left[\Phi_\sigma(t) + 4\Psi_\sigma(t)\right].$$

由 (3.46) 式知, 对于充分小的 $\varepsilon > 0$, 有

$$\frac{3}{2}E_\sigma(t) \leqslant \Upsilon_\sigma(t) \leqslant \frac{5}{2}E_\sigma(t). \tag{3.51}$$

取 $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{4}$, 可得

$$\Upsilon_\sigma(b) + 2\varepsilon\int_a^b \Upsilon_1(t)\mathrm{d}t + P(t) \leqslant \Upsilon_\sigma(a) + \int_a^b q_2(t)\mathrm{d}t, \tag{3.52}$$

其中

$$\begin{aligned} P(t) &= -(1-8\varepsilon M)\int_a^b\int_0^\infty \left[\partial_s\mu_t(s) + \partial_t\mu_t(s)\right]\|\zeta^t(s)\|_{1+\sigma}^2\mathrm{d}s\mathrm{d}t - \varepsilon C\int_a^b \kappa(t)\|\zeta^t\|_{\mathcal{M}_t^\sigma}^2\mathrm{d}t \\ &\geqslant \left[\delta(1-8\varepsilon M) - \varepsilon C\right]\int_a^b \kappa(t)\|\zeta^t\|_{\mathcal{M}_t^\sigma}^2\mathrm{d}t \geqslant 0, \end{aligned}$$

并且对于足够小的 $\varepsilon > 0$, 有

$$\sup_{t\geqslant\tau}\int_t^{t+1} q_2(r)\mathrm{d}r = \sup_{t\geqslant\tau}\int_t^{t+1}\left(2\varepsilon Q(R)y_1(r) + \frac{Q(R)}{\varepsilon}y_1(r)\right)\mathrm{d}r \leqslant \frac{Q(R)}{\varepsilon}.$$

利用引理 1.2 以及 (3.51) 式, 可知

$$E_\sigma(t) \leqslant Q(R), \quad \forall t \geqslant \tau.$$

因此, (3.39) 式成立. □

定理 3.7 若 (1.2)-(1.4) 式以及条件 (H_1)-(H_7) 成立, $g \in \mathcal{H}$, 且 $z_\tau = (u_\tau, \eta_\tau) \in \mathscr{H}_\tau$, 满足 $\|z_\tau\|_{\mathscr{H}_\tau} \leqslant R$. 过程 $U(t,\tau)$ 拥有时间依赖全局吸引子 $\mathscr{A} = \{A_t\}_{t\in\mathbb{R}}$. 此外, 吸引子是不变的, 即, $U(t,\tau)A_\tau = A_t$, $\forall t \geqslant \tau$.

证明 定理 3.3 表明 $U(t,\tau)$ 有时间依赖吸引集 $\mathfrak{B} = \{B_t\}_{t\in\mathbb{R}}$. 定理 3.6 表明, 对任意的 $r > \sqrt{2Q(R)}$, 集族 $\mathfrak{B} = \{\mathbb{B}_t^\sigma(r)\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是拉回吸引的, 其中 $\mathbb{B}_t^\sigma(r) = \{\xi \in \mathscr{H}_t^\sigma | \|\xi\|_{\mathscr{H}_t^\sigma} \leqslant r\}$.

当 $\tau \to -\infty$ 时, 有

$$\begin{aligned} \mathrm{dist}_{\mathscr{H}_t}(U(t,\tau)B_\tau, \mathbb{B}_t^\sigma(r)) &\leqslant \sup_{z_\tau\in B_\tau}\mathrm{dist}_{\mathscr{H}_t}(U_0(t,\tau)z_\tau + U_1(t,\tau)z_\tau, \mathbb{B}_t^\sigma(r)) \\ &\leqslant \sup_{z_\tau\in B_\tau}\|U_0(t,\tau)z_\tau\|_{\mathscr{H}_t} \leqslant Ce^{-\frac{\varepsilon}{2}(t-\tau)} \to 0. \end{aligned}$$

对于每个 $t \in \mathbb{R}$, 在空间 $\mathscr{H}_t$ 上存在紧集 $C_t \subset \mathbb{B}_t^\sigma(r)$, 使得集合 $\mathcal{C} = \{C_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是拉回吸引的. 因此, 由引理 2.5 知, $U(t,\tau)$ 有全局吸引子 $\mathscr{A} = \{A_t\}_{t\in\mathbb{R}}$. 由过程的连续性以及引理 2.6, 可知 $\mathscr{A}$ 是不变的.

基金项目

国家自然科学基金(批准号: 11961059; 12061062)。

参考文献

[1] Cavalcanti, M.M., Cavalcanti, V. and Ferreira, J. (2001) Existence and Uniform Decay for a Non-Linear Viscoelastic Equation with Strong Damping. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **24**, 1043-1053. https://doi.org/10.1002/mma.250

[2] Dafermos, C.M. (1970) Asymptotic Stability in Viscoelasticity. *Archive for Rational Mechanics Analysis*, **37**, 297-308. https://doi.org/10.1007/BF00251609

[3] Liu, W. (2009) Uniform Decay of Solutions for a Quasilinear System of Viscoelastic Equations. *Nonlinear Analysis*, **71**, 2257-2267. https://doi.org/10.1016/j.na.2009.01.060

[4] Qin, Y.M., Zhang, J.P. and Sun, L.L. (2013) Upper Semicontinuity of Pullback Attractors for a Non-Autonomous Viscoelastic Equation. *Applied Mathematics and Computation*, **223**, 362-376. https://doi.org/10.1016/j.amc.2013.08.034

[5] Qin, Y., Feng, B. and Zhang, M. (2014) Uniform Attractors for a Non-Autonomous Viscoelastic Equation with a Past History. *Nonlinear Analysis Theory Methods Applications*, **101**, 1-15. https://doi.org/10.1016/j.na.2014.01.006

[6] Araújo, R.O., Ma, T.F. and Qin, Y.M. (2013) Long-Time Behavior of a Quasilinear Viscoelastic Equation with Past History. *Journal of Differential Equations*, **254**, 4066-4087. https://doi.org/10.1016/j.jde.2013.02.010

[7] Messaoudi, S.A. (2008) General Decay of Solutions of a Viscoelastic Equation. *Arabian Journal for Science and Engineering*, **36**, 1457-1467. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.11.048

[8] Conti, M., Danese, V., Giorgi, C. and Pata, V. (2018) A Model of Viscoelasticity with Time-Dependent Memory Kernels. *American Journal of Mathematical*, **140**, 349-389. https://doi.org/10.1353/ajm.2018.0008

[9] Conti, M., Danese, V. and Pata, V. (2018) Viscoelasticity with Time-Dependent Memory Kernels, Part II: Asymptotic behavior of Solutions. *American Journal of Mathematical*, **140**, 1687-1729. https://doi.org/10.1353/ajm.2018.0049

[10] Pata, V. and Squassina, M. (2005) On the Strongly Damped Wave Equation. *Communications in Mathematical Physics*, **253**, 511-533. https://doi.org/10.1007/s00220-004-1233-1

[11] Yang, L. and Wang, X. (2017) Existence of Attractors for the Non-Autonomous Berger Equation with Nonlinear Damping. *Electronic Journal of Differential Equations*, **2017**, 1-14.

[12] Conti, M., Pata, V. and Teman, R. (2013) Attractors for the Processes on Time-Dependent Spaces. Applications to Wave Equations. *Journal of Differential Equations*, **255**, 1254-1277. https://doi.org/10.1016/j.jde.2013.05.013

[13] Meng, F.J., Wu, J. and Zhao, C.X. (2019) Time-Dependent Global Attractor for Extensible Berger Equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **469**, 1045-1069. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2018.09.050

[14] Conti, M. and Pata, V. (2014) Asymptotic Structure of the Attractor for Processes on Time-Dependent Spaces. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **19**, 1-10. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2014.02.002