Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(7), 1132-1135
Published Online July 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.127124

Hans汉斯

李雅普诺夫第二方法的合理性暨证明

孔志宏

太原师范学院，数学与统计学院，山西 晋中

收稿日期：2022年5月30日；录用日期：2022年7月1日；发布日期：2022年7月8日

摘 要

分析了李雅普诺夫V函数与它的合理性，给出了相应定理的证明。

关键词

临界情形，数量积，等值面，通过方程组的全导数

The Rationality and Proof of Lyapunov's Second Method

Zhihong Kong

School of Mathematics and Statistics, Taiyuan Normal University, Jinzhong Shanxi

Received: May 30th, 2022; accepted: Jul. 1st, 2022; published: Jul. 8th, 2022

Abstract

Lyapunov V function and its rationality are analyzed, and corresponding theorems are proved.

Keywords

The Critical Situation, The Dot Product, Isosurface, The Total Derivative of a System of Equations

文章引用: 孔志宏. 李雅普诺夫第二方法的合理性暨证明[J]. 理论数学, 2022, 12(7): 1132-1135.
DOI: 10.12677/pm.2022.127124

1. 引言

数学摆无阻力时，振动方程组为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\alpha t} = y, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\alpha t} = -\dfrac{g}{\ell}\sin x \end{cases} \tag{1}$$

属于临界情形，不能按线性近似决定其稳定性态。为判断其零解的稳定性态，将(1)改写为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{-\dfrac{g}{\ell}\sin x}{y},$$

则 $y\mathrm{d}y = -\frac{g}{\ell}\sin x\mathrm{d}x$，于是有 $\frac{1}{2}y^2 + \frac{g}{\ell}(1-\cos x) = c$，这里 c 为任意非负常数。

如果我们取函数

$$V(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{g}{\ell}(1-\cos x),$$

则此函数具有性质：$V(0,0)=0$，而在原点邻域对任何不同时为零的 x, y ($|x|<\pi$)有 $V(x,y)>0$。

现在沿着方程组(1)的解 $x = x(t), y = y(t)$ 对函数 $V(x,y)$ 取导数

$$\frac{\mathrm{d}V(x(t),y(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{g}{\ell}\sin x \cdot y + y \cdot \left(-\frac{g}{\ell}\sin x\right) = 0。$$

从 $t_。$ 到 t 积分上式，得到

$$V(x(t),y(t)) = V(x(t_。),y(t_。))。$$

从几何图形看，在 $0xy$ 平面上 $V(x,y) = V(x(t_。),y(t_。)) = c$ 是一条曲线，其解 $x = x(t)$， $y = y(t)$ 在这条曲线上。由于 V 的性质，c 足够小时 $V(x,y)=c$ 是围绕原点的一族闭曲线(后面有证明)。因此在无阻力情况下的数学摆方程组(1)的零解是稳定的，但不是渐近稳定的。

这样，借助构造一个特殊的函数 $V(x,y)$，并利用函数 $V(x,y)$ 及其通过方程组的全导数 $\frac{\mathrm{d}V(x,y)}{\alpha t}$ 的性质来确定方程组解的稳定性，这就是李雅普诺夫第二方法的思想。具有这种特殊性质的函数 $V(x,y)$ 称为李雅普诺夫函数，简称 V 函数。

现在讨论如何应用 V 函数来确定非线性微分方程组的稳定性态问题。为简单起见，我们只考虑非线性驻定微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\bar{x}}{\mathrm{d}t} = \bar{f}(\bar{x}). \tag{2}$$

假设 $\bar{f}(\bar{0}) = \bar{0}$，且 $\bar{f}(\bar{x})$ 在某域 $G: \|\bar{x}\| \le A$ (A 为正常数)内有连续的偏导数，因而方程组(2)由初值条件 $\bar{x}(t_。) = \bar{x}_。$ 所确定的解在域 G 内存在且唯一。显然 $\bar{x} = \bar{0}_。$ 是它的特解。

进一步假设函数 $V(\bar{x})$ 关于所有变量的偏导数存在且连续，把方程组(2)的解代入，然后对 t 求导得

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}f_i,$$

这样求得的导数 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ 称为函数 V 通过方程组(2)的全导数。

2. 相应的证明

为简单起见，考虑两个变量的函数 $V(x,y)$，但我们的一切讨论对于 $n>2$ 的情形仍然成立。

假设 V 在域

$$|x|\le H, |y|\le H \tag{3}$$

是定正的。讨论曲线族

$$V(x,y)=c, \tag{4}$$

其中 $c>0$。当 $c=0$ 时，由 V 的定号性知道，只有原点适合这个方程，即曲线退化为一点。

我们证明当 c 足够小时，曲线(4)是闭的(注意曲线 $V=c$ 一般来说可能是非常复杂的，它也可能是由不连通的几个分支构成的)，并且包围着坐标原点。为此我们来证明，只要 c 不超过某个只与 H 有关的足够小的正数 ℓ 时，任何从原点 O 出发到域(3)的边界上任一点的连续曲线一定和曲线(4)相交。

设

$$\eta=\max|x|,|y|$$

$$\ell=\inf_{\eta=H}(x,y),$$

由 V 的定号性推知 $\ell>0$，因而在域(3)的边界上 $V\ge\ell$。

现在考虑从坐标原点出发到域(3)的边界引出的任意一条连续曲线 L，并注视沿着曲线 ℓ，函数 $V(x,y)$ 产生的变化。显然在曲线的起点 O，有 $V(0,0)=0$，而在曲线的终点 $M(\alpha,\beta)$ 有 $V(\alpha,\beta)=\ell'\ge\ell$。因此，只要 $c<\ell$ (这就是我们所要假设的)，已知 $V(x,y)$ 在域(3)内连续，自然在曲线 L 上是连续的，于是 V 在这条曲线 L 上的某点必然要取值 c。换句话说，这条曲线 L 必然要和曲线(4)相交。因此当 c 相当小时($c<\ell$)，所有的曲线(4)都是闭的并且包围坐标原点。如果让 c 从零改变到某一足够小的值，则(4)表示闭曲线族。由于 V 是单值函数，所以这族曲线彼此不相交，且若曲线 V=c 是由连通的一支所构成，则当 $c_1<c_2$ 时曲线 $V=c_1$ 包含于 $V=c_2$ 之内。

定理[1] 如果对微分方程组(2)存在定正函数 $V(\bar{x})$，其通过方程组(2)的全导数 $\frac{\mathrm{d}V(\bar{x})}{\mathrm{d}t}$ 为常负函数或恒为零，则方程组(2)的零解是稳定的。

如果存在定正函数 $V(\bar{x})$，其通过方程组(2)的全导数 $\frac{\mathrm{d}V(\bar{x})}{\mathrm{d}t}$ 为定负的，则方程组(2)的零解是渐近稳定的。

如果存在函数 $V(\bar{x})$ 和某非负常数 μ，其通过方程组(2)的全导数 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ 可表示为

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\mu V+W(\bar{x}),$$

且当 $\mu=0$ 时 W 为定正函数，当 $\mu\ne0$ 时 W 为常正函数或恒等于零；又在 $\bar{x}=\bar{0}$ 的任意小邻域内至少存在某个 $\bar{\bar{x}}$，使得 $V(\bar{\bar{x}})>0$，则方程组(2)的零解是不稳定的(不稳定性的证明见[2])。

证明 为便于理解、说明和论证，我们就三维系统进行讨论。其中借助了直观，又不失其严密性。在三维系统中得到的结论，在 n 维系统中也是成立的。

事实上[3]，对于定正函数 $V(x,y,z)$，其通过方程组

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f_1(x,y,z), \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f_2(x,y,z), \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = f_3(x,y,z) \end{cases}$$

的全导数 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ 是向量

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x},\frac{\partial V}{\partial y},\frac{\partial V}{\partial z}\right) 与 \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)$$

的数量积

$$\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}.$$

向量

$$gradV = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial V}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}$$

的方向是沿着函数 $V(x,y,z)$ 的等值面 $V(x,y,z)=c$ 的法线方向而指向 $V(x,y,z)$ 增大的方向，数量积

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} &= \left(\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial V}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{k}\right) \\ &= \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2}\cos\alpha, \end{aligned}$$

其中 α 是等值面 $V=c$ 的外法线($gradV$ 的指向)与积分曲线

$$x=x(t), y=y(t), z=z(t)$$

的切线方向的夹角。所以如果

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\le 0 或 \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\equiv 0,$$

这时 $\cos\alpha\le 0$ 或 $\cos\alpha\equiv 0$，表示夹角 α 不是锐角，因此积分曲线不会由内向外地走出等值面 $V=c$，这就表示零解是稳定的。如果 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}<0$，这时 $\cos\alpha<0$， α 永远是钝角。随着时间的推移，积分曲线从外向内地走向各个等值面之内，且趋近于原点，这就表示零解是渐近稳定的。

参考文献

[1] 王高雄, 周之铭, 朱思铭, 等. 常微分方程[M]. 第 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2020: 155.

[2] 王高雄, 周之铭, 朱思铭, 等. 常微分方程[M]. 第 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2006: 267-268.

[3] 许淞庆. 常微分方程稳定性理论[M]. 第一版. 上海: 上海科学技术出版社, 1962: 36-38.