Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(8), 1346-1359
Published Online August 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.128148

三维随机本原方程组在Fourier-Besov空间中解的整体存在性

李 宁

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2022年7月18日；录用日期：2022年8月18日；发布日期：2022年8月30日

摘 要

众所周知，三维随机本原方程组是描述大气和海洋动力学行为的基本方程组，本文将主要研究其初值问题解的整体存在性理论。首先，运用**Littlewood-Paley**理论和**Bony**仿积分解技巧，建立了**Stokes-Coriolis-Stratification**半群新的双线性估计。然后，通过建立相应随机线性初值问题解的有界性估计，结合叠加原理以及不动点定理，在小初值和小随机外力的假设条件下，证明了三维随机本原方程组在**Fourier-Besov**空间中温和解的整体存在性和唯一性。本文的主要结果是对经典三维本原方程组初值问题解的整体存在性理论在随机情形下的推广。

关键词

三维随机本原方程组，**Littlewood-Paley**理论，**Bony**仿积分解技巧，Itô公式，整体解

Global Existence of Three-Dimensional Stochastic Primitive Equations in Fourier-Besov Spaces

Ning Li

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Jul. 18th, 2022; accepted: Aug. 18th, 2022; published: Aug. 30th, 2022

文章引用: 李宁. 三维随机本原方程组在Fourier-Besov空间中解的整体存在性[J]. 理论数学, 2022, 12(8): 1346-1359. DOI: 10.12677/pm.2022.128148

Abstract

This paper is devoted to studying the global existence of solutions to initial value problem of the three-dimensional stochastic primitive equations, which are a basic system that is usually used to describe the dynamic behavior of the atmospheric and the oceanic flows. Firstly, by using the Littlewood-Paley theory and Bony para-product decomposition technique, we establish a new bilinear estimation for the Stokes-Coriolis-Stratification semigroup. Then, by establishing the boundedness estimations for solutions of the corresponding stochastic linear initial value problem, and combining the superposition principle and Banach's fixed point theorem, we prove the global existence and uniqueness of mild solutions to the three-dimensional stochastic primitive equations with small initial values and small random external forces in the Fourier-Besov space frame. Our main result is a generalization of the global existence of the solutions for the initial value problem of the classical three-dimensional primitive equations under the stochastic case.

Keywords

Three-Dimensional Stochastic Primitive Equations, Littlewood-Paley Theory, Bony Paraproduct Decomposition Technique, Itô **Formula, Global Solutions**

1. 引言及主要结果

本文主要研究如下三维随机本原方程组初值问题温和解的整体存在性:

$$
\begin{cases}
du+(\mathcal{K}e_3\times u-\nu\Delta u+(u\cdot\nabla)u+\nabla p)dt=g\theta e_3dt+hd\mathcal{W}, & (x,t,\omega)\in\mathbb{R}^3\times(0,\infty)\times\Omega,\\
d\theta+((u\cdot\nabla)\theta-\mu\Delta\theta)dt=-\mathcal{N}^2u_3dt+ld\mathcal{W}, & (x,t,\omega)\in\mathbb{R}^3\times(0,\infty)\times\Omega,\\
\mathrm{div}u=0, & (x,t,\omega)\in\mathbb{R}^3\times(0,\infty)\times\Omega,\\
u|_{t=0}=u_0,\quad \theta|_{t=0}=\theta_0, & (x,\omega)\in\mathbb{R}^3\times\Omega,
\end{cases}
\tag{1.1}
$$

其中未知函数 $u=(u_1,u_2,u_3)$, p 与 θ 分别表示流体的速度场, 压力和温度(密度), 正常数 ν, μ 和 g 分别表示粘性系数, 扩散系数和重力. $\mathcal{K}\in\mathbb{R}$ 是 Coriolis 参数, 其为绕 $\mathbb{R}^3$ 中单位向量 $e_3=(0,0,1)$ 旋转的角速度的二倍, $\mathcal{K}e_3\times u$ 即为所谓的 Coriolis 力; $\mathcal{N}>0$ 是层结参数, 亦表示 Brunt-Väisälä 波频, 其刻画分层效应的强弱. 项 $g\theta e_3$ 代表 Boussinesq 近似下的阿基米德浮力. $\mathcal{W}$ 是定义在概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\geq0},\mathbf{P})$ 中可分希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的无限维圆柱型 Wiener 过程, 并且假设 $\mathcal{W}$ 可表示为 $\mathcal{W}=\sum_{j\geq1}f_jW_j(t)$, 其中 $\{W_j\}_{j\geq1}$ 是一族相互独立的实值 Brownian 运动, $\{f_j\}_{j\geq1}$ 是 $\mathcal{H}$ 的一组正交基. $hd\mathcal{W}$ 和 $ld\mathcal{W}$ 分别表示随机外力, 通常用于解释数值以及经验的不确定性. u_0 和 θ_0 分别表示给定的初始速度和初始温度. 方程组 (1.1) 通常被用来描述大气和海洋等地球物理流体的大尺度流动.

当 $\mathcal{N}=0$, $\mathcal{K}=0$ 且 $\theta\equiv0$ 时, 方程组 (1.1) 退化为三维随机 Navier-Stokes 方程组, 其通常被用来描述流体的湍流现象, 可参阅文献 [1–3]. 据我们所知, 关于三维随机 Navier-Stokes 方程组的第一个研究结果可追溯到 Bensoussan 和 Temam 在文献 [4] 中开创性工作. 随后, Holz 和 Ziane 在文献 [5] 中证明了乘性噪声下有界区域上的二维和三维随机 Navier-Stokes 方程组关于 H^1 初值强解或路径解的局部存在唯一性, 并证明了二维情形下解的整体存在性. 最近, 杜利怀教授和张挺教授在文献 [6] 中获得了二维及更高维度的随机 Navier-Stokes 方程组关于临界空间 $\dot{B}^{\frac{d}{p}-1}_{p,r}(\mathbb{R}^d)$ 中小初值的局部强解的存在唯一性.

当 $\mathcal{N}=0$ 且 $\theta\equiv0$ 时, 方程组 (1.1) 退化为三维不可压缩随机 Navier-Stokes-Coriolis 方程组. 最近, 王伟华教授在小初值和小随机外力的假设条件下, 分别在 Besov 空间和 Fourier-Besov 空间的框架下获得了三维随机 Navier-Stokes-Coriolis 方程组初值问题的温和解的整体存在性, 具体可见文献 [7,8]. Dong 在文献 [9] 中证明了稳定 Lévy 噪声下二维旋转单位球面上的随机 Navier-Stokes 方程组强解的存在性和唯一性.

当 $\mathcal{N}=0$ 且 $\mathcal{K}=0$ 时, 方程组 (1.1) 退化为三维随机 Boussinesq 方程组. Ferrario 在文献 [10] 中首次研究了加性噪声仅作用于速度场的二维随机 Boussinesq 方程组, 并得到了其初边界问题解的存在性和唯一性, 以及相应半群的不变测度. 蒲学科教授和郭柏灵院士在文献 [11] 中研究了加性噪声下具部分粘性的二维随机 Boussinesq 方程组初值问题的整体适定性. 最近, 杜利怀教授和张挺教授在文献 [12] 中考虑了乘性噪声下 $\mathbb{T}^d$ 上的 Boussinesq 方程组初值问题路径解的局部存在性. 并且, 在一定的正则性假设条件下, 进一步获得了非退化噪声下方程组 (1.1) 路径解的整体存在性.

受上述文献的启发, 本文将在 Fourier-Besov 空间中研究三维随机本原方程组初值问题 (1.1) 解的整体存在性. 在给出主要结果之前, 我们先来介绍一些基本概念.

定义 1.1 对于给定的概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P},(\mathcal{F}_t)_{t\geq0})$, 称函数 $f:\Omega\to\mathbb{R}^3$ 是 $\mathcal{F}_t$ $(t\geq0)$ 可测的, 如果

$$f^{-1}(U):=\{\omega\in\Omega;f(\omega)\in U\}\in\mathcal{F}_t$$

对所有的开集 $U\in\mathbb{R}^3$ (或等价地, 对所有的 Borel 集 $U\in\mathbb{R}^3$) 成立.

定义 1.2([13]) 对于给定的概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P},(\mathcal{F}_t)_{t\geq0})$, 称 $[0,T]\times\mathbb{R}^3\times\Omega$ 上的 $\mathcal{F}_t$ 适应的分布过程 f 是循序可测的, 如果对任意 $t\in[0,T]$, $f(w,t,\cdot)\in\mathcal{F}_t\times\mathfrak{B}[0,t]$.

定义 1.3 对于给定的概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P},(\mathcal{F}_t)_{t\geq0})$, 设 $\mathcal{M}_t$ 为 $\mathcal{F}_t$ 的最小 σ 代数, 若对 $\forall\ t\geq0$,

$v(\cdot,\cdot,w)\in L^4(0,T;F\dot{B}_{p,r}^{-\frac{1}{2}+\frac{3}{p'}})\bigcap\mathcal{M}_t$ 且

$$v(t)=T_{\mathcal{K},N}(t)v_0-\int_0^t T_{\mathcal{K},N}(t-\tau)\mathbb{P}\widetilde{\nabla}\cdot(v(\tau)\otimes v(\tau))d\tau+\int_0^t T_{\mathcal{K},N}(t-\tau)\mathbb{P}Gd\mathcal{W}. \tag{1.2}$$

则称 v 是方程组 (1.1) 的温和解, 其中算子 $\mathbb{P}$ 和 $\widetilde{\nabla}$ 以及半群 $\{T_{\mathcal{K},N}(t)\}_{t\geq 0}$ 的定义见第二节预备知识.

运用 Littlewood-Paley 理论和 Bony 仿积分解技巧, 通过建立关于 Stokes-Coriolis-Stratification 半群的新的双线性估计, 以及建立相应随机线性初值问题解的有界性估计, 结合叠加原理以及不动点定理, 我们在小初值和小随机外力的假设条件下, 证明了三维随机本原方程组初值问题 (1.1) 在 Fourier-Besov 空间中温和解的整体存在性和唯一性. 本文的主要结果如下:

定理 1.4 对于给定的概率基 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P},(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T},\mathcal{W})$, 令其上期望为 $\mathbf{E}$. 设 $r\in[2,\infty]$, $(u_0,\theta_0)\in\tilde{L}^4(\Omega;F\dot{B}_{2,r}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3))$ 是 $\mathcal{F}_0$ 可测的, 并且设对任意的 $T>0$, $(h,l)\in\tilde{L}^4(\Omega;\tilde{L}^4(0,T;F\dot{B}_{2,r}^{\frac{1}{2}}))\bigcap\mathcal{M}_T$. 则存在常数 $\epsilon>0$ 以及正概率随机变量集 $\widetilde{\Omega}$, 使得当

$$(1+T)\|(h,l)\|_{\tilde{L}^4(\Omega;\tilde{L}^4(0,T;F\dot{B}_{2,r}^{\frac{1}{2}}))}+\|(u_0,\theta_0)\|_{\tilde{L}^4(\Omega;F\dot{B}_{2,r}^{\frac{1}{2}})}\leq\epsilon$$

时, 对任意的 $\omega\in\widetilde{\Omega}$, 方程组 (1.1) 存在唯一的温和解 $(u,\theta)(\omega,\cdot,\cdot)\in\tilde{L}^4(0,T;F\dot{B}_{2,r}^{1}(\mathbb{R}^3))$.

注释 1.5 定理 1.4 是对文献 [14] 中关于经典本原方程组解的整体存在性结果在随机情形下的推广. 本文其余部分安排如下: 在第二节中, 我们将给出 Littlewood-Paley 理论以及与 Fourier-Besov 空间相关的函数空间的定义, 并给出 Stokes-Coriolis-Stratification 半群 $\{T_{\mathcal{K},N}(t)\}_{t\geq 0}$ 的定义. 在第三节中, 运用 Littlewood-Paley 理论以及 Bony 仿积分解技巧等, 建立 Stokes-Stratification 半群在 Fourier-Besov 空间上的双线性估计, 以及相应随机线性问题的有界性估计. 在最后一节我们给出定理 1.4 的证明.

在本文中, $\mathscr{F}(f)$ 和 $\hat{f}$ 均表示 f 关于空间变量的傅里叶变换, $\mathscr{F}^{-1}$ 表示相应的傅里叶逆变换.

2. 预备知识

首先, 介绍 Littlewood-Paley 理论和 Bony 仿积分解理论以及与齐次 Fourier-Besov 空间相关的函数空间的定义. 具体可参见专著 [15,16].

设 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$ 为 Schwartz 空间, $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^3)$ 为缓增广义函数空间, ψ, $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$ 是径向函数, 及 $\hat{\psi}$ 和 $\hat{\varphi}$ 满足下列性质:

$$\operatorname{supp}\hat{\varphi}\subset\mathcal{B}:=\{\xi\in\mathbb{R}^3:|\xi|\leq\frac{4}{3}\},$$
$$\operatorname{supp}\hat{\psi}\subset\mathcal{C}:=\{\xi\in\mathbb{R}^3:\frac{3}{4}\leq|\xi|\leq\frac{8}{3}\},$$

且

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}\hat{\varphi}(2^{-j}\xi)=1,\quad\forall\xi\in\mathbb{R}^3\setminus\{0\}.$$

令 $\psi_j(x) := 2^{3j}\psi(2^jx)$, $\varphi_j(x) := 2^{3j}\varphi(2^jx)$, 则齐次频率局部化算子 Δ_j 和齐次低频截断算子 S_jf 可分别定义为

$$\Delta_j f := \varphi_j * f, \qquad S_j f = \psi_j * f \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \quad f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^3).$$

令 $\mathscr{S}'_h(\mathbb{R}^3) := \mathscr{S}'(\mathbb{R}^3)/\mathcal{P}[\mathbb{R}^3]$, 其中 $\mathcal{P}[\mathbb{R}^3]$ 为定义在 $\mathbb{R}^3$ 上的全体多项式所构成的线性空间.

众所周知, 在 $\mathscr{S}'_h(\mathbb{R}^3)$ 中有如下分解成立:

$$f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Delta_j f, \qquad S_j f = \sum_{j'\le j-1} \Delta_{j'} f,$$

并且频率局部化算子 Δ_j 和低频截断算子 S_j 均为 L^p 到 L^p 的线性算子. 此外, Littlewood-Paley 分解满足以下几乎正交性质:

$$\Delta_j\Delta_k f = 0, \quad |j-k| \ge 2,$$

和

$$\Delta_j(S_{k-1}f\Delta_k f) = 0, \quad |j-k| \ge 5.$$

引理 2.1([16]) 设 $1 \le p \le q \le \infty$, $r \in (0, R)$, $j \in \mathbb{Z}$. 则对任意的多指标 $\gamma \in \mathbb{Z}^3_+ \bigcup \{0\}$, 以下估计成立:

(1) 若 $\operatorname{supp}\hat{f} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^3 : |\xi| \le R2^j\}$, 则 $\|(i\xi)^\gamma \hat{f}\|_{L^q} \le C2^{j|\gamma|+3j(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}\|\hat{f}\|_{L^p}$;

(2) 若 $\operatorname{supp}\hat{f} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^3 : r2^j \le |\xi| \le R2^j\}$, 则 $\|\hat{f}\|_{L^p} \le C2^{-j|\gamma|}\sup_{|\alpha|=|\gamma|}\|(i\xi)^\alpha \hat{f}\|_{L^p}$.

定义 2.2 (1) 设 $s \in \mathbb{R}$, $1 \le p,\ r \le \infty$, 齐次 Fouier-Besov 空间 $F\dot{B}^s_{p,r}(\mathbb{R}^3)$ 定义为

$$F\dot{B}^s_{p,r}(\mathbb{R}^3) := \Big\{ f \in \mathscr{S}'_h(\mathbb{R}^3) : \|f\|_{F\dot{B}^s_{p,r}} = \Big\| \Big\{ 2^{js} \|\widehat{\Delta_j f}\|_{L^p_\xi} \Big\}_{j\in\mathbb{Z}} \Big\|_{l^r} < \infty \Big\}.$$

(2) 对任意的 $0 < T \le \infty$, 设 $s \in \mathbb{R}$, $1 \le \delta,\ p,\ r \le \infty$, Chemin-Lerner 型空间 $\tilde{L}^\delta(0,T; F\dot{B}^s_{p,r}(\mathbb{R}^3))$ 定义为空间 $C((0,T]; F\dot{B}^s_{p,r}(\mathbb{R}^3))$ 在范数

$$\|f\|_{\tilde{L}^\delta(0,T;F\dot{B}^s_{p,r})} := \Big\| \Big\{ 2^{js} \|\widehat{\Delta_j f}\|_{L^\delta(0,T;L^p_\xi(\mathbb{R}^3))} \Big\}_{j\in\mathbb{Z}} \Big\|_{l^r}$$

下的完备化空间.

定义 2.3 对任意的 $0 < T \le \infty$, 设 $s \in \mathbb{R}$, $1 \le p,\ r,\ \delta,\ \rho \le \infty$, Bochner 型的 Chemin-Lerner 型空间 $\tilde{L}^\rho(\Omega; \tilde{L}^\delta(0,T; F\dot{B}^s_{p,r}(\mathbb{R}^3)))$ 定义为

$$\tilde{L}^\rho(\Omega; \tilde{L}^\delta(0,T; F\dot{B}^s_{p,r}(\mathbb{R}^3))) := \Big\{ f \in \mathcal{M}_T : f(\omega,t) \in \mathscr{S}'_h(\mathbb{R}^3), \mathbf{P}-a.s, \text{且}$$
$$\|f\|_{\tilde{L}^\rho(\Omega;\tilde{L}^\delta(0,T;F\dot{B}^s_{p,r}))} = \Big\| \Big\{ 2^{js} [\mathbb{E}(\|\widehat{\Delta_j f}\|_{L^\delta(0,T;L^p_\xi(\mathbb{R}^3))})^\rho]^{\frac{1}{\rho}} \Big\}_{j\in\mathbb{Z}} \Big\|_{l^r} < \infty \Big\}.$$

最后, 给出方程组 (1.1) 的等价积分方程和 Stokes-Coriolis-Stratification 半群 $\{T_{\mathcal{K},N}\}_{t\ge0}$ 的定

义.

设 $\mu = \nu = 1$, $v := (u_1, u_2, u_3, \sqrt{g}\theta/\mathcal{N})$, $v_0 := (u_1^0, u_2^0, u_3^0, \sqrt{g}\theta_0/\mathcal{N})$, $\widetilde{\nabla} := (\partial_1, \partial_2, \partial_3, 0)$, $N := \mathcal{N}\sqrt{g}$, 初值问题 (1.1) 可转换为如下等价问题:

$$\begin{cases} dv + (\mathcal{Q}v + \mathcal{S}v + \widetilde{\nabla}p)dt = -(v \cdot \widetilde{\nabla})vdt + Gd\mathcal{W}, & (x,t,\omega) \in \mathbb{R}^3 \times (0,\infty) \times \Omega, \\ \widetilde{\nabla} \cdot v = 0, & (x,t,\omega) \in \mathbb{R}^3 \times (0,\infty) \times \Omega, \\ v|_{t=0} = v_0, & (x,\omega) \in \mathbb{R}^3 \times \Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

其中 $G := (h, \sqrt{g}l/\mathcal{N})$,

$$\mathcal{Q} := \begin{pmatrix} -\Delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Delta \end{pmatrix}, \quad \mathcal{S} := \begin{pmatrix} 0 & -\mathcal{K} & 0 & 0 \\ \mathcal{K} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -N \\ 0 & 0 & N & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

由 [17] 可知, 问题 (2.1) 的线性化问题所生成的 Stokes-Coriolis-Stratification 半群 $\{T_{\mathcal{K},N}(t)\}_{t\geq 0}$ 可具体表达为:

$$T_{\mathcal{K},N}(t)f := \mathscr{F}^{-1}\Big[\cos(\frac{|\xi|'}{|\xi|}t)e^{-|\xi|^2 t}M_1(\xi)\hat{f} + \sin(\frac{|\xi|'}{|\xi|}t)e^{-|\xi|^2 t}M_2(\xi)\hat{f} + e^{-|\xi|^2 t}M_3(\xi)\hat{f}\Big], \tag{2.3}$$

其中 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3$, $|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}$, $|\xi|' = \sqrt{N^2\xi_1^2 + N^2\xi_2^2 + \mathcal{K}^2\xi_3^2}$,

$$M_1(\xi) = \begin{pmatrix} \frac{\mathcal{K}^2\xi_3^2}{|\xi|'^2} & 0 & -\frac{N^2\xi_1\xi_3}{|\xi|'^2} & \frac{\mathcal{K}N\xi_2\xi_3}{|\xi|'^2} \\ 0 & \frac{\mathcal{K}^2\xi_3^2}{|\xi|'^2} & -\frac{N^2\xi_2\xi_3}{|\xi|'^2} & -\frac{\mathcal{K}N\xi_1\xi_3}{|\xi|'^2} \\ -\frac{\mathcal{K}^2\xi_1\xi_3}{|\xi|'^2} & -\frac{\mathcal{K}^2\xi_2\xi_3}{|\xi|'^2} & \frac{N^2(\xi_1^2+\xi_2^2)}{|\xi|'^2} & 0 \\ \frac{\mathcal{K}N\xi_2\xi_3}{|\xi|'^2} & -\frac{\mathcal{K}N\xi_1\xi_3}{|\xi|'^2} & 0 & \frac{N^2(\xi_1^2+\xi_2^2)}{|\xi|'^2} \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

$$M_2(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\mathcal{K}\xi_3^2}{|\xi||\xi|'} & \frac{\mathcal{K}\xi_2\xi_3}{|\xi||\xi|'} & \frac{N\xi_1\xi_3}{|\xi||\xi|'} \\ \frac{\mathcal{K}\xi_3^2}{|\xi||\xi|'} & 0 & -\frac{\mathcal{K}\xi_1\xi_3}{|\xi||\xi|'} & \frac{N\xi_2\xi_3}{|\xi||\xi|'} \\ -\frac{\mathcal{K}\xi_2\xi_3}{|\xi||\xi|'} & \frac{\mathcal{K}\xi_1\xi_3}{|\xi||\xi|'} & 0 & -\frac{N(\xi_1^2+\xi_3^2)}{|\xi||\xi|'} \\ -\frac{N\xi_1\xi_3}{|\xi||\xi|'} & -\frac{N\xi_2\xi_3}{|\xi||\xi|'} & \frac{N(\xi_1^2+\xi_3^2)}{|\xi||\xi|'} & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

$$M_3(\xi) = \begin{pmatrix} \frac{N^2\xi_2^2}{|\xi|'^2} & -\frac{N^2\xi_1\xi_2}{|\xi|'^2} & 0 & -\frac{\mathcal{K}N\xi_2\xi_3}{|\xi|'^2} \\ -\frac{N^2\xi_1\xi_2}{|\xi|'^2} & \frac{N^2\xi_1^2}{|\xi|'^2} & 0 & \frac{\mathcal{K}N\xi_1\xi_3}{|\xi|'^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mathcal{K}N\xi_2\xi_3}{|\xi|'^2} & \frac{\mathcal{K}N\xi_1\xi_3}{|\xi|'^2} & 0 & \frac{\mathcal{K}^2\xi_3^2}{|\xi|'^2} \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

值得一提的是, 容易验证, 对 $\xi \in \mathbb{R}^3$, $M_l(\xi)$ $(l = 1,2,3)$ 的每个非零分量 $M_{jk}^l(\xi)$ $(j,k = 1,2,3,4)$ 满足 $|M_{jk}^l(\xi)| \leq \max\{2, \frac{|\mathcal{K}|}{N}, \frac{N}{|\mathcal{K}|}\}$ $(j,k = 1,2,3,4)$.

定义 Helmholtz 投影算子 $\mathbb{P} := (\mathbb{P}_{jk})_{4\times 4}$, 其中

$$\mathbb{P}_{jk} := \begin{cases} \delta_{jk} + R_jR_k, & 1 \leq j,k \leq 3, \\ \delta_{jk}, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中 δ_{jk} 表示 Kronecker 符号, $\{R_j\}_{1\le j\le 3}$ 表示 Riesz 变换. 由 Duhamel 原理, 方程组 (1.1) 等价于如下积分方程:

$$v(t)=T_{\mathcal{K},N}(t)v_0-\int_0^t T_{\mathcal{K},N}(t-\tau)\mathbb{P}\widetilde{\nabla}\cdot(v(\tau)\otimes v(\tau))d\tau+\int_0^t T_{\mathcal{K},N}(t-\tau)\mathbb{P}Gd\mathcal{W}. \tag{2.7}$$

3. 双线性估计和随机估计

为了处理方程组中的对流项, 我们需要在相应的函数空间中建立关于 Stokes-Coriolis-Stratification 半群的双线性估计. 为此, 我们先来建立相应的乘积法则.

引理 3.1[乘积法则] 设 $2\le p\le\infty$, $1\le r\le\infty$, 则存在常数 $C_1>0$ 使得

$$\|v_1v_2\|_{\widetilde{L}^2(0,\infty;F\dot{B}_{p,r}^{-1+\frac{3}{p'}})}\le C_1\|v_1\|_{\widetilde{L}^4(0,\infty;F\dot{B}_{p,r}^{-\frac{1}{2}+\frac{3}{p'}})}\|v_2\|_{\widetilde{L}^4(0,\infty;F\dot{B}_{p,r}^{-\frac{1}{2}+\frac{3}{p'}})}.$$

证明 由定义 2.2 以及 Bony 仿积分解技巧可得, 成立

$$\begin{aligned}\|v_1v_2\|_{\widetilde{L}^2(0,\infty;F\dot{B}_{p,r}^{-1+\frac{3}{p'}})}&=\left\|\left\{2^{j(-1+\frac{3}{p'})}\|\varphi_j\mathscr{F}(v_1v_2)\|_{L^2(0,\infty;L^p_\xi)}\right\}_{j\in\mathbb{Z}}\right\|_{l^r}\\&\le\left\|\left\{2^{j(-1+\frac{3}{p'})}\left\|\sum_{|k-j|\le4}\varphi_j(\psi_k\hat{v}_1*\varphi_k\hat{v}_2)\right\|_{L^2(0,\infty;L^p_\xi)}\right\}_{j\in\mathbb{Z}}\right\|_{l^r}\\&\quad+\left\|\left\{2^{j(-1+\frac{3}{p'})}\left\|\sum_{|k-j|\le4}\varphi_j(\psi_k\hat{v}_2*\varphi_k\hat{v}_1)\right\|_{L^2(0,\infty;L^p_\xi)}\right\}_{j\in\mathbb{Z}}\right\|_{l^r}\\&\quad+\left\|\left\{2^{j(-1+\frac{3}{p'})}\left\|\sum_{k\ge j-2}\sum_{|k-k'|\le1}\varphi_j(\varphi_k\hat{v}_1*\varphi_{k'}\hat{v}_2)\right\|_{L^2(0,\infty;L^p_\xi)}\right\}_{j\in\mathbb{Z}}\right\|_{l^r}\\&=:I_1+I_2+I_3.\end{aligned}$$

对于 I_1, 固定 j, 结合引理 2.1, 可得

$$\begin{aligned}&2^{j(-1+\frac{3}{p'})}\left\|\sum_{|k-j|\le4}\varphi_j(\psi_k\hat{v}_1*\varphi_k\hat{v}_2)\right\|_{L^2(0,\infty;L^p_\xi)}\\&\le C2^{j(-1+\frac{3}{p'})}\sum_{|k-j|\le4}\left\|\|\psi_k\hat{v}_1\|_{L^1_\xi}\|\varphi_k\hat{v}_2\|_{L^p_\xi}\right\|_{L^2(0,\infty)}\\&\le C2^{j(-1+\frac{3}{p'})}\sum_{|k-j|\le4}\left\|\sum_{k'\le k-2}2^{3k'(1-\frac{1}{p})}\|\varphi_{k'}\hat{v}_1\|_{L^p_\xi}\|\varphi_k\hat{v}_2\|_{L^p_\xi}\right\|_{L^2(0,\infty)}\\&\le C2^{j(-1+\frac{3}{p'})}\sum_{|k-j|\le4}\sum_{k'\le k-2}2^{3k'(1-\frac{1}{p})}\|\varphi_{k'}\hat{v}_1\|_{L^4(0,\infty;L^p_\xi)}\|\varphi_k\hat{v}_2\|_{L^4(0,\infty;L^p_\xi)}\\&\le C2^{j(-1+\frac{3}{p'})}\sum_{|k-j|\le4}\left\|\left\{2^{k'(-\frac{1}{2}+\frac{3}{p'})}\|\varphi_{k'}\hat{v}_1\|_{L^4(0,\infty;L^p_\xi)}\right\}\right\|_{l^r(k'\le k-2)}\left\|\left\{2^{\frac{1}{2}k'}\right\}\right\|_{l^{r'}(k'\le k-2)}\|\varphi_k\hat{v}_2\|_{L^4(0,\infty;L^p_\xi)}\\&\le C\|v_1\|_{\widetilde{L}^4(0,\infty;F\dot{B}_{p,r}^{-\frac{1}{2}+\frac{3}{p'}})}\sum_{|k-j|\le4}2^{k(-\frac{1}{2}+\frac{3}{p'})}\|\varphi_k\hat{v}_2\|_{L^4(0,\infty;L^p_\xi)}2^{(j-k)(-1+\frac{3}{p'})}.\end{aligned}$$

在此基础上, 再运用 Young 不等式, 可得

$$I_1 \le C\|v_1\|_{\widetilde{L}^4(0,\infty;F\dot{B}_{p,r}^{-\frac{1}{2}+\frac{3}{p'}})}\|v_2\|_{\widetilde{L}^4(0,\infty;F\dot{B}_{p,r}^{-\frac{1}{2}+\frac{3}{p'}})}.$$

同理可得, 成立

$$I_2 \le C\|v_1\|_{\widetilde{L}^4(0,\infty;F\dot{B}_{p,r}^{-\frac{1}{2}+\frac{3}{p'}})}\|v_2\|_{\widetilde{L}^4(0,\infty;F\dot{B}_{p,r}^{-\frac{1}{2}+\frac{3}{p'}})}.$$

下面估计 I_3, 对于固定的 j, 可得

$$\begin{aligned}
&2^{j(-1+\frac{3}{p'})}\Big\|\sum_{k\ge j-2}\sum_{|k-k'|\le 1}\varphi_j(\varphi_k\hat{v}_1*\varphi_{k'}\hat{v}_2)\Big\|_{L^2(0,\infty;L^p_\xi)}\\
&\le C2^{j(-1+\frac{3}{p'})}\sum_{k\ge j-2}\sum_{|k-k'|\le 1}\big\|\varphi_j(\varphi_k\hat{v}_1*\varphi_{k'}\hat{v}_2)\big\|_{L^2(0,\infty;L^p_\xi)}\\
&\le C2^{j(-1+\frac{3}{p'})}\sum_{k\ge j-2}\sum_{|k-k'|\le 1}\big\|\|\varphi_{k'}\hat{v}_2\|_{L^1_\xi}\|\varphi_k\hat{v}_1\|_{L^p_\xi}\big\|_{L^2(0,\infty)}\\
&\le C2^{j(-1+\frac{3}{p'})}\sum_{k\ge j-2}\sum_{|k-k'|\le 1}\big\|2^{3k'(1-\frac{1}{p})}\|\varphi_{k'}\hat{v}_2\|_{L^p_\xi}\|\varphi_k\hat{v}_1\|_{L^p_\xi}\big\|_{L^2(0,\infty)}\\
&\le C2^{j(-1+\frac{3}{p'})}\sum_{k\ge j-2}\sum_{|k-k'|\le 1}2^{3k'(1-\frac{1}{p})}\|\varphi_{k'}\hat{v}_2\|_{L^4(0,\infty;L^p_\xi)}\|\varphi_k\hat{v}_1\|_{L^4(0,\infty;L^p_\xi)}\\
&\le C2^{j(-1+\frac{3}{p'})}\sum_{k\ge j-2}\big\|\{2^{k'(-\frac{1}{2}+\frac{3}{p'})}\|\varphi_{k'}\hat{v}_2\|_{L^4(0,\infty;L^p_\xi)}\}\big\|_{l^r(|k-k'|\le 1)}\big\|\{2^{\frac{1}{2}k'}\}\big\|_{l^{r'}(|k-k'|\le 1)}\|\varphi_k\hat{v}_1\|_{L^4(0,\infty;L^p_\xi)}\\
&\le C\|v_2\|_{\widetilde{L}^4(0,\infty;F\dot{B}_{p,r}^{-\frac{1}{2}+\frac{3}{p'}})}\sum_{k\ge j-2}2^{k(-\frac{1}{2}+\frac{3}{p})}\|\varphi_k\hat{v}_1\|_{L^4(0,\infty;L^p_\xi)}2^{(j-k)(-1+\frac{3}{p'})}.
\end{aligned}$$

在此基础上, 运用 Young 不等式, 可得

$$I_3 \le C\|v_1\|_{\widetilde{L}^4(0,\infty;F\dot{B}_{p,r}^{-\frac{1}{2}+\frac{3}{p'}})}\|v_2\|_{\widetilde{L}^4(0,\infty;F\dot{B}_{p,r}^{-\frac{1}{2}+\frac{3}{p'}})}.$$

综上可得, 存在 $C_1>0$ 使得

$$\|v_1v_2\|_{\widetilde{L}^2(0,\infty;F\dot{B}_{p,r}^{-1+\frac{3}{p'}})} \le C_1\|v_1\|_{\widetilde{L}^4(0,\infty;F\dot{B}_{p,r}^{-\frac{1}{2}+\frac{3}{p'}})}\|v_2\|_{\widetilde{L}^4(0,\infty;F\dot{B}_{p,r}^{-\frac{1}{2}+\frac{3}{p'}})},$$

即结论得证. □

引理 3.2[双线性估计] 设 $2\le p\le\infty$, $1\le r\le\infty$, 则存在常数 $C_2>0$, 使得

$$\Big\|\int_0^t T_{\mathcal{K},N}(t-\tau)\mathbb{P}\widetilde{\nabla}(v_1\otimes v_2)(\tau)d\tau\Big\|_{\widetilde{L}^4(0,\infty;F\dot{B}_{p,r}^{-\frac{1}{2}+\frac{3}{p'}})} \le C_2\|v_1\|_{\widetilde{L}^4(0,\infty;F\dot{B}_{p,r}^{-\frac{1}{2}+\frac{3}{p'}})}\|v_2\|_{\widetilde{L}^4(0,\infty;F\dot{B}_{p,r}^{-\frac{1}{2}+\frac{3}{p'}})}.$$

证明 由引理 2.1 和引理 3.1, 可得

$$
\begin{aligned}
&\Big\|\int_0^t T_{\mathcal{K},N}(t-\tau)\mathbb{P}\widetilde{\nabla}(v_1\otimes v_2)(\tau)d\tau\Big\|_{\widetilde{L}^4(0,\infty;F\dot{B}_{p,r}^{-\frac{1}{2}+\frac{3}{p'}})}\\
&=\Big\|\Big\{2^{j(-\frac{1}{2}+\frac{3}{p'})}\Big\|\int_0^t\varphi_j\mathscr{F}[T_{\mathcal{K},N}(t-\tau)\mathbb{P}\widetilde{\nabla}(v_1\otimes v_2)(\tau)]d\tau\Big\|_{L^4(0,\infty;L_\xi^p)}\Big\}_{j\in\mathbb{Z}}\Big\|_{l^r}\\
&\le C\Big\|\Big\{2^{j(-\frac{1}{2}+\frac{3}{p'})}\Big\|\int_0^t\varphi_je^{-(t-\tau)2^{2k}}\mathscr{F}[\widetilde{\nabla}(v_1\otimes v_2)(\tau)]d\tau\Big\|_{L^4(0,\infty;L_\xi^p)}\Big\}_{j\in\mathbb{Z}}\Big\|_{l^r}\\
&\le C\Big\|\Big\{2^{j(-\frac{1}{2}+\frac{3}{p'})}\|e^{-(t-\tau)2^{2k}}\|_{L^{\frac{4}{3}}(0,\infty)}\|\varphi_j\mathscr{F}[\widetilde{\nabla}(v_1\otimes v_2)(t)]\|_{L^2(0,\infty;L_\xi^p)}\Big\}_{j\in\mathbb{Z}}\Big\|_{l^r}\\
&\le C\Big\|\Big\{2^{j(-2+\frac{3}{p'})}\|\varphi_j\mathscr{F}[\widetilde{\nabla}(v_1\otimes v_2)(t)]\|_{L^2(0,\infty;L_\xi^p)}\Big\}_{j\in\mathbb{Z}}\Big\|_{l^r)}\\
&\le C\big\|\widetilde{\nabla}(v_1\otimes v_2)\big\|_{L^2(0,\infty;F\dot{B}_{p,r}^{-2+\frac{3}{p'}})}\\
&\le C\big\|(v_1\otimes v_2)\big\|_{L^2(0,\infty;F\dot{B}_{p,r}^{-1+\frac{3}{p'}})}\\
&\le C\big\|v_1\big\|_{\widetilde{L}^4(0,\infty;F\dot{B}_{p,r}^{-\frac{1}{2}+\frac{3}{p'}})}\big\|v_2\big\|_{\widetilde{L}^4(0,\infty;F\dot{B}_{p,r}^{-\frac{1}{2}+\frac{3}{p'}})},
\end{aligned}
$$

即结论得证. □

另一方面, 为了得到问题 (1.1) 解的整体存在性, 由叠加原理, 我们考虑如下随机线性初值问题

$$
\begin{cases}
d\beta+\mathcal{Q}\beta dt+\mathcal{S}\beta dt=Gd\mathcal{W}, & (x,t,\omega)\in\mathbb{R}^3\times(0,\infty)\times\Omega,\\
\beta|_{t=0}=v_0, & (x,\omega)\in\mathbb{R}^3\times\Omega.
\end{cases}
\tag{3.1}
$$

显然, 线性问题 (3.1) 的解整体存在且唯一. 事实上, 通过对问题 (3.1) 的等号两端同时关于空间变量做 Fourier 变换, 可直接得到解的具体表达形式.

下面, 我们建立随机线性问题 (3.1) 在 Fourier-Besov 空间框架下的有界性估计.

引理 3.3 令 $r\in[2,+\infty]$. 设 v_0 是 $\mathcal{F}_0$ 可测的, 且 $v_0\in\tilde{L}^4(\Omega;F\dot{B}_{2,r}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3))$, 分布过程 G 是循序可测的, 且 $G\in\tilde{L}^4(\Omega;\tilde{L}^4(0,T;F\dot{B}_{2,r}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)))$. 则问题 (3.1) 的解 $\beta\in\tilde{L}^4(\Omega;\tilde{L}^4(0,T;F\dot{B}_{2,r}^{1}(\mathbb{R}^3)))$, 且满足

$$
\|\beta\|_{\tilde{L}^4(\Omega;\tilde{L}^4(0,T;F\dot{B}_{2,r}^{1}))}\le C_3\Big[\|v_0\|_{\tilde{L}^4(\Omega;F\dot{B}_{2,r}^{\frac{1}{2}})}+(1+T)\|G\|_{\tilde{L}^4(\Omega;\tilde{L}^4(0,T;F\dot{B}_{2,r}^{\frac{1}{2}}))}\Big].
\tag{3.2}
$$

证明 对问题 (3.1) 两边同时关于空间变量做 Fourier 变换, 然后同乘 φ_j, 可得

$$
d(\varphi_j\hat{\beta})=-[|\xi|^2(\varphi_j\hat{\beta})+S(\varphi_j\hat{\beta})]dt+(\varphi_j\hat{G})d\mathcal{W}.
\tag{3.3}
$$

首先, 对 $\|\varphi_j\hat{\beta}\|_{L^2}^2$ 使用 Itô 公式, 可得

$$
\begin{aligned}
d\|\varphi_j\hat{\beta}\|_{L^2}^2&=d\langle\varphi_j\hat{\beta},\varphi_j\hat{\beta}\rangle\\
&=2\langle d(\varphi_j\hat{\beta}),\varphi_j\hat{\beta}\rangle+\langle d(\varphi_j\hat{\beta}),d(\varphi_j\hat{\beta})\rangle\\
&=2\langle\varphi_j\hat{\beta},-[|\xi|^2(\varphi_j\hat{\beta})+S(\varphi_j\hat{\beta})]dt+(\varphi_j\hat{G})d\mathcal{W}\rangle+\|\varphi_j\hat{G}\|_{L^2}^2dt\\
&=(-2\||\cdot|\varphi_j\hat{\beta}\|_{L^2}^2+\|\varphi_j\hat{G}\|_{L^2}^2)dt+2\langle\varphi_j\hat{\beta},\varphi_j\hat{G}\rangle d\mathcal{W},
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 $L^2(\mathbb{R}^3)$ 内积.

然后, 对 $(\|\varphi_j\hat{\beta}\|_{L^2}^2+\epsilon)^2$ 使用 Itô 公式, 其中 $\epsilon>0$, 并结合 (3.4) 式, 可得

$$\begin{aligned} d(\|\varphi_j\hat{\beta}\|_{L^2}^2+\epsilon)^2 = {} & 2(\|\varphi_j\hat{\beta}\|_{L^2}^2+\epsilon)[(-2\||\cdot|\varphi_j\hat{\beta}\|_{L^2}^2+\|\varphi_j\hat{G}\|_{L^2}^2)dt+2\langle\varphi_j\hat{\beta},\varphi_j\hat{G}\rangle d\mathcal{W}] \\ & +4\langle\varphi_j\hat{\beta},\varphi_j\hat{G}\rangle^2 dt. \end{aligned} \tag{3.5}$$

考虑停时序列

$$\tau_n=\begin{cases} \inf\{t\geq 0:\|\varphi_j\hat{\beta}\|_{L^2}>n\}, & \{t:\|\varphi_j\hat{\beta}\|_{L^2}>n\}\neq\emptyset, \\ T, & \{t:\|\varphi_j\hat{\beta}\|_{L^2}>n\}=\emptyset, \end{cases}$$

其中 $n=1,2,3,\cdots$. 在 $[0,t]$ $(t\leq\min\{T,\tau_n\})$ 上对 (3.5) 式积分, 然后对所得结果取期望, 可得

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}(\|\varphi_j\hat{\beta}\|_{L^2}^2+\epsilon)^2-\mathbf{E}(\|\varphi_j\hat{v}_0\|_{L^2}^2+\epsilon)^2 \\ = {} & 2\mathbf{E}\int_0^t(\|\varphi_j\hat{\beta}\|_{L^2}^2+\epsilon)\|\varphi_j\hat{G}\|_{L^2}^2 d\tau-4\mathbf{E}\int_0^t(\|\varphi_j\hat{\beta}\|_{L^2}^2+\epsilon)\||\cdot|\varphi_j\hat{\beta}\|_{L^2}^2 d\tau \\ & +4\mathbf{E}\int_0^t\langle\varphi_j\hat{G},\varphi_j\hat{\beta}\rangle^2 d\tau+4\mathbf{E}\int_0^t(\|\varphi_j\hat{\beta}\|_{L^2}^2+\epsilon)\langle\varphi_j\hat{\beta},\varphi_j\hat{G}\rangle d\mathcal{W} \\ =: {} & J_1+J_2+J_3+J_4. \end{aligned}$$

接下来依次估计 J_1, J_2, J_3, J_4. 事实上, 只需估计 J_1,J_3,J_4, 因为 J_2 是我们所需要的形式.

$$\begin{aligned} J_1 &= 2\mathbf{E}\int_0^t(\|\varphi_j\hat{\beta}\|_{L^2}^2+\epsilon)\|\varphi_j\hat{G}\|_{L^2}^2 d\tau \\ &\leq C2\mathbf{E}\sup_{\tau\in[0,t]}(\|\varphi_j\hat{\beta}\|_{L^2}^2+\epsilon)\int_0^t\|\varphi_j\hat{G}\|_{L^2}^2 d\tau \\ &\leq C\epsilon\mathbf{E}\sup_{\tau\in[0,t]}(\|\varphi_j\hat{\beta}\|_{L^2}^2+\epsilon)^2+C_\epsilon t\mathbf{E}\int_0^t\|\varphi_j\hat{G}\|_{L^2}^4 d\tau. \end{aligned}$$

并且,

$$J_3\leq C\epsilon\mathbf{E}\sup_{\tau\in[0,t]}\|\varphi_j\hat{\beta}\|_{L^2}^4+C_\epsilon t\mathbf{E}\int_0^t\|\varphi_j\hat{G}\|_{L^2}^4 d\tau.$$

此外, 由 Burkholder-Davis-Gundy 不等式和 Young 不等式, 可得

$$\begin{aligned} J_4 &= 4\mathbf{E}\int_0^t(\|\varphi_j\hat{\beta}\|_{L^2}^2+\epsilon)\langle\varphi_j\hat{\beta},\varphi_j\hat{G}\rangle d\mathcal{W} \\ &\leq C\mathbf{E}\sup_{\tau'\in[0,t]}\left|\int_0^{\tau'}(\|\varphi_j\hat{\beta}\|_{L^2}^2+\epsilon)\langle\varphi_j\hat{\beta},\varphi_j\hat{G}\rangle d\mathcal{W}\right| \\ &\leq C\mathbf{E}\left(\int_0^t|(\|\varphi_j\hat{\beta}\|_{L^2}^2+\epsilon)\langle\varphi_j\hat{\beta},\varphi_j\hat{G}\rangle|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C\mathbf{E}\left(\int_0^t(\|\varphi_j\hat{\beta}\|_{L^2}^2+\epsilon)^2\|\varphi_j\hat{\beta}\|_{L^2}^2\|\varphi_j\hat{G}\|_{L^2}^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C\mathbf{E}\sup_{\tau\in[0,t]}(\|\varphi_j\hat{\beta}\|_{L^2}^2+\epsilon)\|\varphi_j\hat{\beta}\|_{L^2}\left(\int_0^t\|\varphi_j\hat{G}\|_{L^2}^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C\epsilon\mathbf{E}\sup_{\tau\in[0,t]}[(\|\varphi_j\hat{\beta}\|_{L^2}^2+\epsilon)\|\varphi_j\hat{\beta}\|_{L^2}]^{\frac{4}{3}}+C_\epsilon t\mathbf{E}\int_0^t\|\varphi_j\hat{G}\|_{L^2}^4 d\tau. \end{aligned}$$

DOI: 10.12677/pm.2022.128148

结合 J_1, J_2, J_3 和 J_4 的估计, 通过关于 $\epsilon \to 0$ 取极限, 可得

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\sup_{t\in[0,T\wedge\tau_n]}\|\varphi_j\hat{\beta}\|_{L^2}^4+\mathbf{E}\int_0^{T\wedge\tau_n}\||\cdot|\varphi_j\hat{\beta}\|_{L^2}^2\|\varphi_j\hat{\beta}\|_{L^2}^2d\tau\\ &\leq C\mathbf{E}\|\varphi_j\hat{v}_0\|_{L^2}^4+C(1+(T\wedge\tau_n))\mathbf{E}\int_0^{T\wedge\tau_n}\|\varphi_j\hat{G}\|_{L^2}^4d\tau. \qquad (3.6)\end{aligned}$$

进一步, 由 v_0 和 G 的假设条件可得 (3.6) 式中的 $\mathbf{E}\sup_{t\in[0,T\wedge\tau_n]}\|\varphi_j\hat{\beta}\|_{L^2}^4$ 可被一个与 n 无关的常数控制. 因此, 令 $n\to\infty$, 可得到 $\lim_{n\to\infty}\tau_n=T$, $\mathbf{P}-a.s.$. 再根据引理 2.1, 成立

$$\mathbf{E}\sup_{t\in[0,T]}\|\varphi_j\hat{\beta}\|_{L^2}^4+2^{2j}\mathbf{E}\int_0^T\|\varphi_j\hat{\beta}\|_{L^2}^4d\tau\leq C\mathbf{E}\|\varphi_j\hat{v}_0\|_{L^2}^4+C(1+T)\mathbf{E}\int_0^T\|\varphi_j\hat{G}\|_{L^2}^4d\tau. \qquad (3.7)$$

因此,

$$2^{2j}\mathbf{E}\int_0^T\|\varphi_j\hat{\beta}\|_{L^2}^4d\tau\leq C\mathbf{E}\|\varphi_j\hat{v}_0\|_{L^2}^4+C(1+T)\mathbf{E}\int_0^T\|\varphi_j\hat{G}\|_{L^2}^4d\tau.$$

对上式两边同乘 $2^{\frac{1}{2}j}$, 然后取 l^r 范数, 成立

$$\|\beta\|_{\tilde{L}^4(\Omega;\tilde{L}^4(0,T;F\dot{B}^1_{2,r}))}\leq C_3\Big[\|v_0\|_{\tilde{L}^4(\Omega;F\dot{B}^{\frac{1}{2}}_{2,r})}+(1+T)\|G\|_{\tilde{L}^4(\Omega;\tilde{L}^4(0,T;F\dot{B}^{\frac{1}{2}}_{2,r}))}\Big],$$

即证得结论成立. □

注释 3.4 由 (3.7) 式也可得到

$$\mathbf{E}\sup_{t\in[0,T]}\|\varphi_j\hat{\beta}\|_{L^2}^4\leq C\mathbf{E}\|\varphi_j\hat{v}_0\|_{L^2}^4+C(1+T)\mathbf{E}\int_0^T\|\varphi_j\hat{G}\|_{L^2}^4d\tau.$$

对上式两边同乘 $2^{\frac{1}{2}j}$, 然后取 l^r 范数, 可获得问题 (3.1) 的解 $\beta\in\tilde{L}^4(\Omega;\tilde{L}^\infty(0,T;F\dot{B}^{\frac{1}{2}}_{2,r}(\mathbb{R}^3)))$, 并且在引理 3.3 的条件下, 成立

$$\|\beta\|_{\tilde{L}^4(\Omega;\tilde{L}^\infty(0,T;F\dot{B}^{\frac{1}{2}}_{2,r}))}\leq C_4\Big[\|v_0\|_{\tilde{L}^4(\Omega;F\dot{B}^{\frac{1}{2}}_{2,r})}+(1+T)\|G\|_{\tilde{L}^4(\Omega;\tilde{L}^4(0,T;F\dot{B}^{\frac{1}{2}}_{2,r}))}\Big].$$

引理 3.5 在引理 3.3 的假设条件下, 则存在一个正概率集合 $\widetilde{\Omega}$ 使得问题 (3.1) 的解 $\beta(\omega,\cdot,\cdot)\in\tilde{L}^4(0,T;F\dot{B}^1_{2,r}(\mathbb{R}^3))$, 并且对任意的 $\omega\in\widetilde{\Omega}$, 成立

$$\|\beta(\omega,\cdot,\cdot)\|_{\tilde{L}^4(0,T;F\dot{B}^1_{2,r})}\leq C_5\Big[\|v_0\|_{\tilde{L}^4(\Omega;F\dot{B}^{\frac{1}{2}}_{2,r})}+(1+T)\|G\|_{\tilde{L}^4(\Omega;\tilde{L}^4(0,T;F\dot{B}^{\frac{1}{2}}_{2,r}))}\Big],$$

其中常数 $C_5>0$.

证明 考虑集合

$$\Omega':=\Big\{\omega:\|\beta(\omega,\cdot,\cdot)\|_{\tilde{L}^4(0,T;F\dot{B}^1_{2,r})}>C_5\Big[\|v_0\|_{\tilde{L}^4(\Omega;F\dot{B}^{\frac{1}{2}}_{2,r})}+(1+T)\|G\|_{\tilde{L}^4(\Omega;\tilde{L}^4(0,T;F\dot{B}^{\frac{1}{2}}_{2,r}))}\Big]\Big\}, \qquad (3.8)$$

其中常数 $C_5>0$ 待定. 由引理 3.3 和 Tchebychev 不等式, 可知

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\Omega') &\le \mathbf{E}\|\beta(\omega,\cdot,\cdot)\|^4_{\tilde{L}^4(0,T;F\dot{B}^1_{2,r})}C_5^{-4}\Big[\|v_0\|_{\tilde{L}^4(\Omega;F\dot{B}^{\frac{1}{2}}_{2,r})}+(1+T)\|G\|_{\tilde{L}^4(\Omega;\tilde{L}^4(0,T;F\dot{B}^{\frac{1}{2}}_{2,r}))}\Big]^{-4}\\ &\le (C_3C_5^{-1})^4.\end{aligned}$$

取 $\tilde{\Omega}=\Omega\backslash\Omega'$ 且 $C_5>C_3$, 则可得

$$\mathbf{P}(\tilde{\Omega})=1-\mathbf{P}(\Omega')\ge 1-(C_3C_5^{-1})^4>0.$$

则结论得证. □

4. 定理1.4的证明

定理 1.4 的证明 定义解映射 Ψ 和解空间 Z 分别为

$$\Psi(v)(t):=\beta-B(v,v)$$

和

$$Z:=\Big\{v\in\tilde{L}^4(0,T;F\dot{B}^1_{2,r}(\mathbb{R}^3)):\|v\|_{\tilde{L}^4(0,T;F\dot{B}^1_{2,r})}\le 2\epsilon\Big\},$$

其中 $\epsilon>0$ 待定,

$$\beta=T_{\mathcal{K},N}(t)v_0+\int_0^t T_{\mathcal{K},N}(t-\tau)\mathbb{P}Gd\mathcal{W},$$

以及

$$B(v,v)=\int_0^t T_{\mathcal{K},N}(t-\tau)\mathbb{P}\widetilde{\nabla}\cdot(v(\tau)\otimes v(\tau))d\tau.$$

则将求解问题 (1.1) 转换为寻找映射 $\Psi(v)$ 的不动点. 为此, 我们将验证存在 $\epsilon>0$, 使得 Ψ 是把 Banach 空间 Z 映射到 Z 的压缩映射.

首先, 由引理 3.2 可得, 成立

$$\|B(v,v)\|_Z\le C_3\|v\|_Z\|v\|_Z. \tag{4.1}$$

又由引理 3.5 可知, 存在正概率随机集合 $\tilde{\Omega}$, 使得对任意的 $\omega\in\tilde{\Omega}$, 成立

$$\|\beta\|_Z\le C_5\Big[\|v_0\|_{\tilde{L}^4(\Omega;F\dot{B}^{\frac{1}{2}}_{2,r})}+(1+T)\|G\|_{\tilde{L}^4(\Omega;\tilde{L}^4(0,T;F\dot{B}^{\frac{1}{2}}_{2,r}))}\Big].$$

因此, 对任意的 $v\in Z$, 成立

$$\begin{aligned}\|\Psi(v)\|_Z &\le \Big\|T_{\mathcal{K},N}(t)v_0+\int_0^t T_{\mathcal{K},N}(t-\tau)\mathbb{P}Gd\mathcal{W}\Big\|_Z+\|B(v,v)\|_Z\\ &\le C_5\big[\|v_0\|_{\tilde{L}^4(\Omega;F\dot{B}^{\frac{1}{2}}_{2,r})}+(1+T)\|G\|_{\tilde{L}^4(\Omega;\tilde{L}^4(0,T;F\dot{B}^{\frac{1}{2}}_{2,r}))}\big]+C_2\|v\|_Z^2.\end{aligned}$$

另外, 由类似的过程可得, 对于任意得 v_1, $v_2 \in Z$, 成立

$$\begin{aligned}\|\Psi(v_1)-\Psi(v_2)\|_Z &= \Big\|\int_0^t T_{\mathcal{K},N}(t-\tau)\mathbb{P}\widetilde{\nabla}\cdot\big[[v_1(\tau)\otimes(v_1-v_2)(\tau)]+[(v_1-v_2)\otimes v_2(\tau)]\big]d\tau\Big\|_Z \\ &\leq C_2(\|v_1\|_Z+\|v_2\|_Z)\|v_1-v_2\|_Z.\end{aligned}$$

现取足够小的 ϵ, 使得

$$0<\epsilon<\min\Big\{\frac{1}{4C_2},1\Big\},$$

并且假设对任意的 $T>0$, $v_0\in L^4(\Omega;F\dot{B}^{\frac{1}{2}}_{2,r}(\mathbb{R}^3))$ 和 $G\in L^4(\Omega;\tilde{L}^4(0,T;F\dot{B}^{\frac{1}{2}}_{2,r}(\mathbb{R}^3)))$ 且满足

$$\|v_0\|_{\tilde{L}^4(\Omega;F\dot{B}^{\frac{1}{2}}_{2,r})}+(1+T)\|G\|_{\tilde{L}^4(\Omega;\tilde{L}^4(0,T;F\dot{B}^{\frac{1}{2}}_{2,r}))}\leq\frac{\epsilon}{C_5}.$$

则可得

$$\|\Psi(v)\|_Z\leq\epsilon+4C_2\epsilon\cdot\min\Big\{\frac{1}{4C_2},1\Big\}\leq 2\epsilon,$$

并且

$$\|\Psi(v_1)-\Psi(v_2)\|_Z\leq\frac{1}{2}\|v_1-v_2\|_Z.$$

则由 Banach 压缩映射原理可得, 问题 (1.1) 存在唯一的整体温和解 $(u,\theta)(\omega,\cdot,\cdot)\in\tilde{L}^4(0,T;F\dot{B}^1_{2,r}(\mathbb{R}^3))$, 且满足

$$\|(u,\theta)\|_{\tilde{L}^4(0,T;F\dot{B}^1_{2,r})}\leq 2\epsilon.$$

□

参考文献

[1] Chow, P. (1978) SPDEs in Turbulence. In: Bharucha-Reid, A.T., Ed., *SPDEs in Turbulence, in Probabilistic Analysis and Related Topics*, Vol. 1, Academic Press, Cambridge, MA, 1-43.

[2] Flandoli, F. (2008) An Introduction to 3D Stochastic Fluid Dynamics. In: *SPDE in Hydrodynamics: Recent Progress and Prospects*, Springer, Berlin, 51-150. https://doi.org/10.1007/978-3-540-78493-7_2

[3] Mikulevicius, R. and Rozovskii, B. (2004) Stochastic Navier Stokes Equations for Turbulent Flows. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **35**, 1250-1310. https://doi.org/10.1137/S0036141002409167

[4] Bensoussan, A. and Temam, R. (1973) Equations stochastiques du type Navier-Stokes. *Journal of Functional Analysis*, **13**, 195-222. https://doi.org/10.1016/0022-1236(73)90045-1

[5] Glatt-Holtz, N. and Ziane, M. (2009) Strong Pathwise Solutions of the Stochastic Navier-Stokes System. *Advances in Differential Equations*, **14**, 567-600.

[6] Du, L. and Zhang, T. (2020) Local and Global Strong Solutions to the Stochastic Incompressible Navier-Stokes Equations in Critical Besov Space. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **481**, Article ID: 123472. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.123472

[7] Wang, W. (2020) Global Existence and Analyticity of Mild Solutions for the Stochastic Navier-Stokes-Coriolis Equations in Besov Spaces. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **52**, Article ID: 103048. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2019.103048

[8] Wang, W. and Wu, G. (2018) Global Mild Solution of Stochastic Generalized Navier-Stokes Equations with Coriolis Force. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, **34**, 1635-1647. https://doi.org/10.1007/s10114-018-7482-2

[9] Dong, L. (2020) Strong Solutions for the Stochastic Navier-Stokes Equations on the 2D Rotating Sphere with Stable Lévy Noise. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **489**, Article ID: 124182. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2020.124182

[10] Ferrario, B. (1997) The Bénard Problem with Random Perturbations: Dissipativity and Invariant Measures. *Nonlinear Differential Equations and Applications*, **4**, 101-121. https://doi.org/10.1007/PL00001407

[11] Pu, X. and Guo, B. (2011) Global Well-Posedness of the Stochastic 2D Boussinesq Equations with Partial Viscosity. *Acta Mathematica Scientia. Series B. English Edition*, **31**, 1968-1984. https://doi.org/10.1016/S0252-9602(11)60375-5

[12] Du, L. and Zhang, T. (2020) Local and Global Existence of Pathwise Solution for the Stochastic Boussinesq Equations with Multiplicative Noises. *Stochastic Processes and their Applications*, **130**, 1545-1567. https://doi.org/10.1016/j.spa.2019.05.011

[13] Santo, M. and Tegegn, T. (2016) Harmonic Analysis Tools for Stochastic Magnetohydrodynamics Equations in Besov Spaces. *International Journal of Modern Physics*, **30**, Article ID: 1640025. https://doi.org/10.1142/S0217979216400257

[14] Sun, J. and Cui, S. (2019) Sharp Well-Posedness and Ill-Posedness in Fourier-Besov Spaces for the Viscous Primitive Equations of Geophysics. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **48**, 445-465. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2019.02.003

[15] Bahouri, H., Chemin, J.-Y. and Danchin, R. (2011) Fourier Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations. In: *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, Vol. 343, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-16830-7

[16] Triebel, T. (1983) Theory of Function Spaces, Monographs in Mathematics. Birkhäuser Verlag, Basel. https://doi.org/10.1007/978-3-0346-0416-1

[17] Iwabuchi, T., Mahalov, A. and Takada, R. (2017) Global Solutions for the Incompressible Rotating Stably Stratified Fluids. *Mathematische Nachrichten*, **290**, 613-631. https://doi.org/10.1002/mana.201500385