Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(9), 1487-1492
Published Online September 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.129162

Hans汉斯

复正交李超代数osp(1,2)的拟型心与型心的矩阵表示

董瑞林，张晓茹，郑克礼*

东北林业大学数学系，黑龙江 哈尔滨

收稿日期：2022年8月13日；录用日期：2022年9月13日；发布日期：2022年9月20日

摘 要

本文为研究复数域上不超过三阶的正交李超代数 $osp(1,2)$ 的拟型心与型心，应用解线性方程组的方法，分别在奇变换和偶变换两种情况下确定了这些李超代数拟型心和型心的矩阵表示。最终得到其在奇变换下的拟型心在标准基上的矩阵为 $\mathbf{0}_{5\times 5}$ ，型心在标准基上的矩阵为 $\mathbf{0}_{5\times 5}$ ；其在偶变换下的拟型心在标准基上的矩阵为 $c\boldsymbol{I}_{5\times 5}$ ，型心在标准基上的矩阵为 $c\boldsymbol{I}_{5\times 5}$ 。

关键词

李超代数，拟型心，型心，矩阵表示

Matrix Representation of Centroids and Quasi Centroids of the Complex Orthogonal Lie Superalgebras

Ruilin Dong, Xiaoru Zhang, Keli Zheng*

Department of Mathematics, Northeast Forestry University, Harbin Heilongjiang

Received: Aug. 13th, 2022; accepted: Sep. 13th, 2022; published: Sep. 20th, 2022

Abstract

In this paper, in order to study the centroids and quasi-centroids of the orthogonal Lie superalgebras $osp(1,2)$ over complex fields, the matrix representations of centroid and quasi centroid of

*通讯作者。

文章引用: 董瑞林, 张晓茹, 郑克礼. 复正交李超代数 osp(1,2)的拟型心与型心的矩阵表示[J]. 理论数学, 2022, 12(9): 1487-1492. DOI: 10.12677/pm.2022.129162

$osp(1,2)$ are determined by applying the method of solving the system of linear equations in the cases of odd and even transformations, respectively. The final matrix of its quasi-centroids on the standard basis under odd transformation is $0_{5\times5}$ and the matrix of the centroids on the standard basis is $0_{5\times5}$; the matrix of its quasi-centroids on the standard basis under even transformation is $cI_{5\times5}$ and the matrix of the centroids on the standard basis is $cI_{5\times5}$.

Keywords

Lie Super Algebra, Centroid, Quasi-Centroid, Matrix Representation

1. 引言

作为 Z$_2$-阶化流形的数学模型，复李超代数在理论物理、工程学以及其他数学领域中都有着重要的意义[1] [2] [3] [4]。型心和拟型心作为复李超代数上的重要映射，其在双导子的研究中起到关键的作用[5]。对于复单李超代数 $gl(1,2)$ 的型心，文献[6]证明了其是常数阵或其平方是常数阵，并且此类李超代数的型心与拟型心相同。对于一般李超代数的拟型心，文献[7]证明了其保持诣零根不变。而在文献[8] [9] [10]中具体研究了特殊线性李超代数几类子代数的型心和拟型心。Cartan 型模李超代数是一类非常重要的单模李超代数，它的结构与表示是当前较为活跃的研究方向。在李超代数理论中，作为刚体运动学对应超旋转的重要数学模型，有限维的正交辛李超代数 $osp(m,n)$ 研究已成为当前该领域的核心研究之一。对于实数域 $\mathbb{R}$ 上正交辛李超代数 $osp(\mathbb{R})$，文献[11]讨论了其理想之间的关系并证明了 $osp(\mathbb{R})$ 的所有理想都是标准的。文献[12]以素特征域上正交线性李超代数 $osp(1,4)$ 为例，研究其在广义 Witt 型李超代数上的中心化子。但未有文章研究具体给定正交李超代数的型心与拟型心。本文将主要研究 3 阶复正交李超代数 $osp(1,2)$ 的型心与拟型心的矩阵表示。相较于同类文章，文本推广了已有文献中的结论，对已有公理系统进行运用，研究具体给定正交李超代数。

文本结构如下：第二部分是预备知识，介绍了本文用到的一些基本概念和符号。第三部分得到了 $osp(1,2)$ 的拟型心的矩阵表示。第四部分得到了 $osp(1,2)$ 的型心的矩阵表示。

2. 预备知识

定义 2.1 设 $\mathbb{Z}_2=\{\bar{0},\bar{1}\}$ 为模 2 剩余类环，则复数域 C 上的 $\mathbb{Z}_2$-阶化线性空间 $L=L_{\bar{0}}\oplus L_{\bar{1}}$ 称为李超代数，若对其上定义的双线性二元运算 $[,]$ 满足：

1) 超反对称性：

$$[x,y]=-(-1)^{d(x)d(y)}[y,x]$$

2) 超莱布尼兹公式：

$$[x,[y,z]]=[[x,y],z]+(-1)^{d(x)d(y)}[y,[x,z]]$$

其中：x,y,z 是李超代数中的 $\mathbb{Z}_2$-齐次元素，$d(x),d(y),d(z)$ 分解为 x,y,z 的 $\mathbb{Z}_2$-阶化次数。

注：超莱布尼茨公式移项整理后就是雅可比恒等式，李超代数也称为 Z_2-阶化李代数。

定义 2.2 在 $l(m,n)$ 中定义超代数 $osp(m,n)=osp(m,n)_{\bar{0}}\oplus osp(m,n)_{\bar{1}}$，令

$$osp(m,n)_s=\left\{a\in l(m,n)_s \mid F(a(x),y)=-(-1)^{\delta(\deg x)}F(x,a(y))\right\}, s\in\mathbb{Z}_2$$

其中：$n=2r$ 是偶数，我们将 $osp(m,n)$ 称为正交对称的超代数，当 $n=0$ 或 $m=0$ 时即转换为正交的或对称的李代数。

定义 $(2m+2n+1)\times(2m+2n+1)$ 阶矩阵，

$$\varsigma_{2m+1|2n}=\left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & I_m & 0 & 0 & 0 \\ I_m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & I_n \\ 0 & 0 & 0 & -I_n & 0 \end{array}\right)$$

其中：I_m 是 $m\times m$ 阶单位矩阵，I_m 是 $n\times n$ 阶单位矩阵，令 $\varsigma_{2m|2n}$ 表示从中删除第 $2m+1$ 行与第 $2m+1$ 列所得到的 $(2m+2n)\times(2m+2n)$ 阶矩阵，那么有

$$osp(l,2n)=\left\{G\in gl(l,2n) \mid G^{st}\varsigma_{l|2n}+\varsigma_{l|2n}G=0\right\}$$

其中：G^{st} 表示 G 的超转置。则 $osp(l,2n)$ 可表示为

$$G=\left(\begin{array}{ccc|cc} A & B & -V^t & X & X_1 \\ C & -A^t & -U^t & Y & Y_1 \\ U & V & 0 & Z & Z_1 \\ \hline -Y_1^t & -X_1^t & -Z_1^t & D & E \\ Y^t & X^t & Z^t & F & -D^t \end{array}\right)$$

其中：B，C 是斜对称矩阵，E，F 是对称矩阵，易得

$$osp(1,2)=\left\{g\in gl(1,2) \mid g^{st}\varsigma_{1|2}+\varsigma_{1|2}g=0\right\}$$

则 $osp(1,2)$ 可由如下矩阵表示

$$g=\left(\begin{array}{c|cc} 0 & z & z_1 \\ \hline -z_1 & d & e \\ z & f & -d \end{array}\right)$$

由此可以验证 $e_{23},e_{32},e_{22}-e_{33},e_{12}-e_{31},e_{13}+e_{21}$ 是 $osp(1,2)$ 的一组基。

其中 e_{ij} 表示第 i 行第 j 列的元素为 1，其余位置为 0 的方阵。为简便本文称以上这组基为对应代数的标准基。

定义 2.3 设 L 是复李超代数，则称

$$\Gamma_\theta(L)=\left\{f\in End_\theta(L) \mid f[x,y]=[f(x),y]=(-1)^{d(x)d(f)}[x,f(y)], x,y\in L,\theta\in\mathbb{Z}_2\right\}$$

为 L 上的 $\mathbb{Z}_2$-阶化型心；称

$$Q\Gamma_\theta(L)=\left\{f\in End_\theta(L) \mid [f(x),y]=(-1)^{d(x)d(f)}[x,f(y)], x,y\in L,\theta\in\mathbb{Z}_2\right\}$$

为 L 上的 $\mathbb{Z}_2$-阶化拟型心，其中 $End_\theta(L)$ 表示所有 L 中 $\mathbb{Z}_2$-阶化线性变换的集合。

注：对任意 $f\in End_\theta(L)$，若 $\theta=\bar{0}$，则称 f 为偶变换，即 $d(f)=\bar{0}$；若 $\theta=\bar{1}$，则称 f 为奇变换，即 $d(f)=\bar{1}$。

命题 2.4 设 f 是李超代数上的线性变换，则 f 在一组基上的矩阵表示为：

$$f\left(e_{11}e_{12},\cdots,e_{nn}\right)=\left(e_{11},e_{12},\cdots,e_{nn}\right)\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1,n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n,1} & k_{n,2} & \cdots & k_{n,n} \end{pmatrix}$$

注：当 f 表示型心时，由元素 k_{ij} 组成的矩阵即是型心矩阵表示法；当 f 表示拟型心时，由元素 k_{ij} 组成的矩阵即是拟型心矩阵表示法。

3. $osp(1,2)$ 拟型心的矩阵表示

引理 3.1 设 f 是 $osp(1,2)$ 线性变换，则 f 在 $osp(1,2)$ 的标准基上的线性变换为：

$$f\left(e_{23}\right)=k_{11}e_{23}+k_{21}e_{32}+k_{31}\left(e_{22}-e_{33}\right)+k_{41}\left(e_{12}-e_{31}\right)+k_{51}\left(e_{13}+e_{21}\right)$$

$$f\left(e_{32}\right)=k_{12}e_{23}+k_{22}e_{32}+k_{32}\left(e_{22}-e_{33}\right)+k_{42}\left(e_{12}-e_{31}\right)+k_{52}\left(e_{13}+e_{21}\right)$$

$$f\left(e_{22}-e_{33}\right)=k_{13}e_{23}+k_{23}e_{32}+k_{33}\left(e_{22}-e_{33}\right)+k_{43}\left(e_{12}-e_{31}\right)+k_{53}\left(e_{13}+e_{21}\right)$$

$$f\left(e_{12}-e_{31}\right)=k_{14}e_{23}+k_{24}e_{32}+k_{34}\left(e_{22}-e_{33}\right)+k_{44}\left(e_{12}-e_{31}\right)+k_{54}\left(e_{13}+e_{21}\right)$$

$$f\left(e_{13}+e_{21}\right)=k_{15}e_{23}+k_{25}e_{32}+k_{35}\left(e_{22}-e_{33}\right)+k_{45}\left(e_{12}-e_{31}\right)+k_{55}\left(e_{13}+e_{21}\right)$$

定理 3.2 若 $osp(1,2)$ 的拟型心偶变换，则其在标准基上的矩阵为 $cI_{5\times5}$，其中 c 为任意的复数。

证明：设偶变换为 f 是 $osp(1,2)$ 的拟型心，根据拟型心的定义分别用 $e_{23},e_{32},e_{22}-e_{33},e_{12}-e_{31},e_{13}+e_{21}$ 代替定义中的 x,y 进行运算。当 $x=e_{23},y=e_{32}$ 时，$f\left(e_{23}\right)$ 与 e_{32} 的情况为：

$$\begin{aligned}\left[f\left(e_{23}\right),e_{32}\right]&=f\left(e_{23}\right)e_{32}-(-1)^{d\left(f\left(e_{23}\right)\right)d\left(e_{32}\right)}e_{32}f\left(e_{23}\right)\\&=f\left(e_{23}\right)e_{32}-e_{32}f\left(e_{23}\right)\\&=k_{11}\left(e_{22}-e_{33}\right)-2k_{31}e_{32}+k_{51}\left(e_{12}-e_{31}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left[e_{23},f\left(e_{32}\right)\right]&=e_{23}f\left(e_{32}\right)-(-1)^{d\left(e_{23}\right)d\left(f\left(e_{32}\right)\right)}f\left(e_{32}\right)e_{23}\\&=e_{23}f\left(e_{32}\right)-f\left(e_{32}\right)e_{23}\\&=k_{22}\left(e_{22}-e_{33}\right)-2k_{32}e_{23}-k_{42}\left(e_{21}-e_{13}\right)\end{aligned}$$

又由拟型心的定义可得 $\left[f\left(e_{23}\right),e_{32}\right]=\left[e_{23},f\left(e_{32}\right)\right]$，所以通过比较系数可得：

$$k_{11}=k_{22},k_{31}=k_{32}=k_{51}=k_{42}=0$$

其他情况同理可得 $k_{11}=k_{22}=k_{33}=k_{44}=k_{55}$，

$k_{12}=k_{13}=k_{14}=k_{15}=k_{21}=k_{23}=k_{24}=k_{25}=k_{31}=k_{32}=k_{34}=k_{35}=k_{41}=k_{42}=k_{43}=k_{45}=k_{51}=k_{52}=k_{53}=k_{43}=0$。

类似的，可得 f 是奇变换即 $d\left(f\right)=\overline{1}$ 的情况。

定理 3.3 若 $osp(1,2)$ 的拟型心是奇变换，则其在标准基上的矩阵为 $0_{5\times5}$。

证明：设奇变换为 f 是 $osp(1,2)$ 的拟型心，根据拟型心的定义分别用 $e_{23},e_{32},e_{22}-e_{33},e_{12}-e_{31},e_{13}+e_{21}$ 代替定义中的 x,y 进行运算。当 $x=e_{23},y=e_{32}$ 时，$f\left(e_{23}\right)$ 与 e_{32} 的情况为：

$$\begin{aligned}\left[f\left(e_{23}\right),e_{32}\right]&=f\left(e_{23}\right)e_{32}-(-1)^{d\left(f\left(e_{23}\right)\right)d\left(e_{32}\right)}e_{32}f\left(e_{23}\right)\\&=f\left(e_{23}\right)e_{32}-e_{32}f\left(e_{23}\right)\\&=k_{11}\left(e_{22}-e_{33}\right)-2k_{31}e_{32}+k_{51}\left(e_{12}-e_{31}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left[e_{23}, f\left(e_{32}\right)\right] &= e_{23} f\left(e_{32}\right)-(-1)^{d\left(e_{23}\right) d\left(f\left(e_{32}\right)\right)} f\left(e_{32}\right) e_{23} \\ &= e_{23} f\left(e_{32}\right)-f\left(e_{32}\right) e_{23} \\ &= k_{22}\left(e_{22}-e_{33}\right)-2 k_{32} e_{23}-k_{42}\left(e_{21}-e_{13}\right)\end{aligned}$$

又由拟型心的定义可得$\left[f\left(e_{23}\right), e_{32}\right]=\left[e_{23}, f\left(e_{32}\right)\right]$，所以通过比较系数可得：

$$k_{11}=k_{22}, k_{31}=k_{32}=k_{51}=k_{42}=0$$

其他情况同理可得$k_{11}=k_{22}=k_{33}=k_{44}=k_{55}=0$，
$k_{12}=k_{13}=k_{14}=k_{15}=k_{21}=k_{23}=k_{24}=k_{25}=k_{31}=k_{32}=k_{34}=k_{35}=k_{41}=k_{42}=k_{43}=k_{45}=k_{51}=k_{52}=k_{53}=k_{43}=0$。

4. $osp(1,2)$型心的矩阵表示

定理 4.1 若$osp(1,2)$的型心是偶变换，则其在标准基上的矩阵为$cI_{5\times 5}$其中c为任意的复数。

证明：设$osp(1,2)$的型心f是偶变换，则此时可同样用$osp(1,2)$的基元素代替型心定义中的x, y。当$x=e_{23}, y=e_{32}$时，由$[x, y]=xy-yx$，有：

$$f\left[e_{23}, e_{32}\right]=f\left[e_{23} \times e_{32}-e_{32} \times e_{23}\right]=f\left(e_{22}-e_{33}\right)=c\left(e_{22}-e_{33}\right)$$

$$\left[f\left(e_{23}\right), e_{32}\right]=k_{11}\left(e_{22}-e_{33}\right)-2 k_{31} e_{32}+k_{51}\left(e_{12}-e_{31}\right)$$

又由型心定义

$$f\left[e_{23}, e_{32}\right]=\left[f\left(e_{23}\right), e_{32}\right]$$

所以$k_{11}=c, k_{31}=k_{51}=0$，其他情况同理可得$k_{22}=k_{33}=k_{44}=k_{55}=c$，
$k_{12}=k_{13}=k_{14}=k_{15}=k_{21}=k_{23}=k_{24}=k_{25}=k_{32}=k_{34}=k_{35}=k_{41}=k_{42}=k_{43}=k_{45}=k_{52}=k_{53}=k_{43}=0$。

同理，根据f为奇变换定义运算可得型心矩阵。

定理 4.2 若$osp(1,2)$的型心是奇变换，则其在标准基上的矩阵为$0_{5\times 5}$矩阵。

致　谢

衷心感谢审稿人提出的细致建议。

基金项目

东北林业大学大学生创新训练项目(S202210225006)；中央高校基本科研业务费专项资金资助(2572021BC02)。

参考文献

[1] 孙洪洲，韩其智．李超代数综述[J]．物理学进展, 1983, 3(1): 81-125.

[2] Scheunert, M. (1979) The Theory of Lie Superalgebras: An Introduction. Springer-Verlag, Berlin, 46-47. https://doi.org/10.1007/BFb0070929

[3] Kac, V. (1977) Lie Superalgebras. *Advances in Mathematics*, **26**, 8-96. https://doi.org/10.1016/0001-8708(77)90017-2

[4] 张润萱，张永正．低维李超代数的确定[J]．东北师范大学报(自然科学版), 2008, 40(1): 1-5.

[5] Yuan, J., Chen, L. and Cao, Y. (2021) Super-Biderivations of Cartan Type Lie Superalgebras. *Communications in Algebra*, **49**, 4416-4426. https://doi.org/10.1080/00927872.2021.1921185

[6] Zheng, K. and Zhang, Y. (2013) On (α, β, γ)-Derivations of Lie Superalgebras. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, **10**, 1-18. https://doi.org/10.1142/S0219887813500503

[7] 李明珠，孙玉莉．李超代数拟型心[J]．数学的实践与认识, 2012, 42(24): 226-232.

[8] 张洪娟, 李明明, 郑克礼. 李超代数 gl(1, 2)型心与拟型心的矩阵表示[J]. 哈尔滨师范大学(自然科学学报), 2017, 33(1): 1-3.

[9] 高晨阳, 陆炳权, 郑克礼. 低阶特殊线性李超代数的型心与拟型心[J]. 理论数学, 2022, 12(1): 36-40. https://doi.org/10.12677/PM.2022.121005

[10] 郭睿彤, 李柏霄, 郑克礼. 4 阶特殊线性李超代数的型心与拟型[J]. 数学的实践与认识, 2022, 52(7): 262-265.

[11] 孙丽萍. 交换环上正交-辛李超代数的理想[J]. 哈尔滨师范大学(自然科学学报), 2002, 18(4): 1-4.

[12] 张馨悦, 张雪天, 刘娜, 郑克礼. 素特征域上 osp(1, 4)在广义 Witt 李超代数中的中心化子[J]. 哈尔滨师范大学(自然科学学报), 2021, 37(2): 17-21.