Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(9), 1399-1410
Published Online September 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.129153

Hans汉斯

具恐惧效应与趋避敏感性随机捕食模型动力学

王欣琦，张天四*

上海理工大学理学院，上海

收稿日期：2022年7月30日；录用日期：2022年8月31日；发布日期：2022年9月7日

摘 要

恐惧效应是捕食过程中的一种普遍反应，由食饵对捕食者的恐惧而产生的一系列自我保护行为。首先，通过构造一个合适的随机李雅普诺夫函数，给出了模型正解存在唯一平稳分布的充分条件；然后，通过对模型使用Itô's公式，得到了模型中捕食者种群在两种情况下分别灭绝的充分条件。

关键词

捕食－食饵模型，恐惧效应，捕食者的趋避敏感性，平稳分布，遍历性

Dynamics of Stochastic Predator-Prey Model with Fear Effect and Predator-Taxis Sensitivity

Xinqi Wang, Tiansi Zhang*

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Jul. 30th, 2022; accepted: Aug. 31st, 2022; published: Sep. 7th, 2022

Abstract

Fear effect is a common response in the process of predation, and the prey produces a series of self-protection behaviors because of its fear of predators. Firstly, a sufficient condition for the existence and uniqueness of the ergodic stationary distribution of the positive solution of the model was given by a suitable stochastic Lyapunov function. Then, by using Itô's formula to the model, the sufficient conditions for the extinction of predator population in the model were obtained in two cases.

*通讯作者。

文章引用: 王欣琦, 张天四. 具恐惧效应与趋避敏感性随机捕食模型动力学[J]. 理论数学, 2022, 12(9): 1399-1410.
DOI: 10.12677/pm.2022.129153

Keywords

Predator-Prey Model, Fear Effect, Predator-Taxis Sensitivity, Stationary Distribution, Ergodicity

1. 介绍

自从 Lotka 和 Volterra 对捕食系统进行开创性研究以来[1] [2]，捕食者与食饵之间的动态关系得到了广泛的讨论[3]-[9]。在传统的捕食食饵模型中，作者考虑的是捕食者直接杀死食饵的动态效应，然而，在实际的捕食过程中，捕食者会使食饵产生不同程度的恐惧，这种恐惧也会影响到食饵种群的数量，从而会间接影响到捕食过程。文献[10]描述了一种情况，在两个种群的捕食关系中，尽管捕食者可能不会直接捕食食饵，但是食饵由于恐惧会产生一些自我保护措施，如减少觅食的时间、改变栖息地、产生警惕性以及发生生理的变化等，使得对捕食者种群存在的敏感度变高，这些行为同样会影响到捕食作用。基于此，Wang 等人[11]第一次将恐惧效应加入到数学模型中，认为恐惧会影响到食饵的出生率，例如食饵种群可能会转移到一个更适合其生存的环境中，从而增加了食饵的出生率，但是也有可能会转移到一个不适合其生存的地方，从而降低出生率；恐惧效应也有可能对其生理产生影响，从而影响到其出生率，进而影响到整个捕食过程。随后，越来越多的学者开始关注恐惧效应对捕食过程的影响，并做了大量的研究[12] [13] [14] [15] [16]，进一步丰富了生物数学的研究结果。

在文献[12]中，Dong 等人考虑了食饵具有 Hollling II 型功能反应函数和恐惧函数的捕食食饵模型，即：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=r\left(\eta+\dfrac{1-\eta}{1+k\alpha y}\right)x-\delta x-\psi x^2-\dfrac{\beta xy}{1+\xi\alpha x}, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\left(\dfrac{\theta\beta x}{1+\xi\alpha x}-d\right)y, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $r,\eta,k,\alpha,\delta,\psi,\beta,\xi,\theta,d$ 均为正常数； x,y 分别表示食饵种群与捕食者种群在 t 时刻的种群密度；$\eta+\dfrac{1-\eta}{1+k\alpha y}$ 是衡量恐惧成本的恐惧函数；r,δ,ψ 分别表示食饵的出生率、自然死亡率和种内竞争率；β,d 分别表示捕食者的人均消耗率和自然死亡率；$\eta\in(0,1)$ 表示饱和恐惧成本；k 表示恐惧水平；α 表示捕食者趋避敏感性；θ 表示食饵转化为捕食者自身能量的转化率；ξ 表示捕食者捕获每个食饵后的处理时间。

另外自然界中广泛存在各种环境噪声，如白噪声、彩色噪声、马尔可夫过程等，特别的，白噪声是生态系统中的一个重要组成部分，在捕食食饵模型中加入白噪声[17]-[22]的影响是十分必要的。例如，在文献[19]中，Liu 等人讨论了一类食饵种群具有阶段结构的模型，研究了模型全局正解的存在唯一性，得到了在一定的情况下平稳分布的存在性以及在两种情况下捕食者种群灭绝的充分条件。Liu 等人[20]考虑了一类具有 Holling II 型功能反应函数的随机捕食食饵模型，研究了模型在满足一定条件时的捕食者种群与食饵种群的持久与灭绝，并给出了食饵种群与捕食者种群均可长期共存的充分条件。

综合以上考虑，我们在文献[12]的基础上加入捕食者因内部竞争而产生的死亡项和随机参数，得到了

一个具有恐惧效应和捕食者趋避敏感性的随机捕食食饵模型：

$$\begin{cases} \mathrm{d}x = \left[r\left(\eta + \dfrac{1-\eta}{1+k\alpha y} \right) x - \delta x - \psi x^2 - \dfrac{\beta xy}{1+\xi\alpha x} \right] \mathrm{d}t + \sigma_1 x \mathrm{d}B_1(t), \\ \mathrm{d}y = \left[\left(\dfrac{\theta\beta x}{1+\xi\alpha x} - d - \mu y \right) y \right] \mathrm{d}t + \sigma_2 y \mathrm{d}B_2(t), \end{cases} \tag{1.2}$$

其中 μ 为正常数，表示捕食者种群因内部竞争而产生的死亡率； $B_1(t), B_2(t)$ 表示独立的标准布朗运动；σ_1, σ_2 表示噪声强度，其余参数均与系统(1.1)相同。

在本文中，$(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\ge 0}, \mathbb{P})$ 表示一个带有过滤的完全概率空间，其中 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\ge 0}$ 满足通常的条件(即 $\mathcal{F}_0$ 包含所有 $\mathbb{P}$-空集，它是递增和右连续的)。设 $B_i(t)$， $i=1,2$ 定义在这个完全概率空间上。当 G 是一个向量或矩阵时，将其转置定义为 G^{T}。我们定义

$$\mathbb{R}_+^d = \left\{ x = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d : x_i > 0, 1 \le i \le d \right\}$$

和

$$\bar{\mathbb{R}}_+^d = \left\{ x = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d : x_i \ge 0, 1 \le i \le d \right\}.$$

本文其他部分的结构如下：第二部分，通过构造合适的李雅普诺夫函数证明了具有任意初值的系统(1.2)存在唯一的全局正解；第三部分，给出系统(1.2)正解的遍历平稳分布存在唯一性的充分条件。第四部分，给出两种情况下捕食者种群灭绝的充分条件，第一种情况是食饵种群存活捕食者种群灭绝，第二种情况是食饵种群与捕食者种群均灭绝。最后，对本文进行了总结。

2. 正解的存在性和唯一性

在本章节，我们将证明系统(1.2)全局正解的存在性和唯一性。因为系统(1.2)中所包含的函数不满足线性增长条件，因此，我们先使用变量变换[23]来证明出局部正解的存在唯一性，再使用李雅普诺夫分析法[24]证明该解是全局的。

定理 2.1 系统(1.2)在 $t\in[0,\tau_e)$ 时存在唯一的全局正解 $(x(t), y(t))$，对于任意的初始值 $(x(0), y(0)) \in \mathbb{R}_+^2$ 都几乎处处成立，其中 τ_e 是爆炸时间。

证明：作变量变换 $u(t) = \ln x(t)$， $v(t) = \ln y(t)$ 和 Itô's 公式，系统(1.2)可以得到满足初始条件 $u(0) = \ln x(0)$， $v(0) = \ln y(0)$ 的方程：

$$\begin{cases} \mathrm{d}u = \left[r\eta - \delta - \dfrac{\sigma_1^2}{2} + \dfrac{r(1-\eta)}{1+k\alpha \mathrm{e}^v} - \psi \mathrm{e}^u - \dfrac{\beta \mathrm{e}^v}{1+\xi\alpha \mathrm{e}^u} \right] \mathrm{d}t + \sigma_1 \mathrm{d}B_1(t), \\ \mathrm{d}v = \left(-d - \dfrac{\sigma_2^2}{2} + \dfrac{\theta\beta \mathrm{e}^u}{1+\xi\alpha \mathrm{e}^u} - \mu \mathrm{e}^v \right) \mathrm{d}t + \sigma_2 \mathrm{d}B_2(t), \end{cases} \tag{2.1}$$

显然，系统(2.1)满足线性增长条件和局部 Lipschitz 条件，因此对于任意的初始值 $(u(0), v(0)) \in \mathbb{R}_+^2$，系统(2.1)在 $t\in[0,\tau_e)$ 时存在唯一的局部正解 $(u(t), v(t))$。因此，$(x(t), y(t)) = \left(\mathrm{e}^{u(t)}, \mathrm{e}^{v(t)}\right)$ 是随机系统(1.2)从第一象限内开始的唯一的正局部解。此即证得系统(1.2)存在唯一的局部正解。

下面，我们来证明系统(2.1)的解是全局的。由定理 2.1 可知，我们只需要证明 $\tau_e = \infty$ 几乎处处成立即可，为此我们引入以下定理。

定理 2.2 对于任意初值 $(x(0), y(0)) \in \mathbb{R}_+^2$，随机系统(1.2)存在唯一解 $(x(t), y(t))$， $t \ge 0$，并且该解将以概率 1 留在 $\mathbb{R}_+^2$ 中。

证明：选择一个足够大的非负实数 n_0，使得 $x(0)$ 和 $y(0)$ 均位于区间 $\left[\frac{1}{n_0}, n_0\right]$ 内。对于每一个整数 $n \ge n_0$，按照文献[25]定义停止时间为

$$\tau_n = \inf\left\{t \in \left[0, \tau_e\right) : \min\left\{x(t), y(t)\right\} \le \frac{1}{n} \text{ or } \max\left\{x(t), y(t)\right\} \ge n\right\},$$

在这篇文章中，我们令 $\inf \phi = \infty$，当 $n \to \infty$ 时，显然可以知道 τ_n 是递增的。令 $\tau_\infty = \lim_{n\to\infty} \tau_n$，$\tau_\infty \le \tau_e$。如果我们可以证明 $\tau_\infty = \infty$ 几乎处处成立，则对于任意的 $t \ge 0$ 有 $\tau_e = \infty$ 和 $(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}_+^2$ 是几乎处处成立的。因此，我们只需要证明 $\tau_\infty = \infty$ 几乎处处成立即可。如果不成立，则存在常数 $T > 0$ 和 $\varepsilon \in (0,1)$，使得

$$\mathbb{P}\left\{\tau_\infty \le T\right\} > \varepsilon.$$

即存在一个常数 $n_1 \ge n_0$，使得

$$\mathbb{P}\left\{\tau_n \le T\right\} \ge \varepsilon, \forall n \ge n_1. \tag{2.2}$$

定义一个 C^2 函数 $V : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$

$$V(x, y) = (x - 1 - \ln x) + \frac{1}{\theta}(y - 1 - \ln y), \tag{2.3}$$

这个函数的非负性可以由不等式 $u - 1 - \ln u \ge 0$，$\forall u > 0$ 得到。

对式子(2.3)使用 Itô’s 公式，有

$$\mathrm{d}V(x, y) = \mathcal{L}V(x, y)\mathrm{d}t + \sigma_1(x-1)\mathrm{d}B_1(t) + \frac{\sigma_2}{\theta}(y-1)\mathrm{d}B_2(t),$$

其中 $\mathcal{L}V(x, y)$ 为

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}V &= (x-1)\left[r\eta + \frac{r(1-\eta)}{1+k\alpha y} - \delta - \psi x - \frac{\beta y}{1+\xi\alpha x}\right] + \frac{1}{\theta}(y-1)\left(\frac{\theta\beta x}{1+\xi\alpha x} - d - \mu y\right) + \frac{\sigma_1^2}{2} + \frac{\sigma_2^2}{2\theta} \\
&= -\psi x^2 + \left[r\eta + \frac{r(1-\eta)}{1+k\alpha y} - \delta + \psi - \frac{\beta}{1+\xi\alpha x}\right]x - \frac{\mu}{\theta}y^2 + \left(\frac{\mu}{\theta} - \frac{d}{\theta} + \frac{\beta}{1+\xi\alpha x}\right)y - \frac{r(1-\eta)}{1+k\alpha y} \\
&\quad - r\eta + \delta + \frac{d}{\theta} + \frac{\sigma_1^2}{2} + \frac{\sigma_2^2}{2\theta} \\
&\le -\psi x^2 + (r+\psi)x - \frac{\mu}{\theta}y^2 + \left(\frac{\mu}{\theta} + \beta\right)y + \delta + \frac{d}{\theta} + \frac{\sigma_1^2}{2} + \frac{\sigma_2^2}{2\theta} \\
&\le \frac{(r+\psi)^2}{4\psi} + \frac{(\mu+\theta\beta)^2}{4\theta\mu} + \delta + \frac{d}{\theta} + \frac{\sigma_1^2}{2} + \frac{\sigma_2^2}{2\theta} \\
&:= C_0,
\end{aligned} \tag{2.4}$$

显然 C_0 是一个正常数。其余证明与 Liu 和 Jiang [20]的证明相似，在此略去。这就完成了证明。

3. 遍历平稳分布的存在

在本章节中，我们将建立系统(1.2)正解的遍历平稳分布存在唯一性的充分条件。

设 $X(t)$ 是在 $\mathbb{R}^d$ 中由随机微分方程描述的正则时间齐次马尔可夫过程

$$\mathrm{d}X(t) = f(X(t))\mathrm{d}t + \sum_{r=1}^{k} g_r(X(t))\mathrm{d}B_r(t),$$

$X(t)$ 的扩散矩阵定义为 $A(x)=\left(a_{ij}(x)\right), a_{ij}(x)=\sum_{r=1}^{k} g_r^i(x) g_r^j(x)$。

引理 3.1 [26]如果一个马尔可夫过程存在一个带有常规边界 Γ 的有界开域 $U \subset \mathbb{R}^d$，且满足性质：

A_1：存在一个正数 M 使得 $\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \ge M|\xi|^2$， $x \in U$， $\xi \in \mathbb{R}^d$；

A_2：存在一个非负 C^2-V 函数，使得 $\mathcal{L}V$ 在任何 $\mathbb{R}^d \setminus U$ 上均为负的；则该马尔可夫过程 $X(t)$ 有唯一的遍历平稳分布 $\pi(\cdot)$。

定理 3.1 假设满足条件

$$\psi > \frac{\beta\xi\alpha y^*}{1+\xi\alpha x^*} \tag{3.1}$$

和

$$B+2 \le \min\left\{\frac{\theta}{1+\xi\alpha x^*}\left(\psi-\frac{\beta\xi\alpha y^*}{1+\xi\alpha x^*}\right)\left(x^*\right)^2, \mu\left(y^*\right)^2\right\}, \tag{3.2}$$

其中

$$B=\frac{\theta\sigma_1^2 x^*}{2\left(1+\xi\alpha x^*\right)}+\frac{\sigma_2^2 y^*}{2}, \tag{3.3}$$

$\left(x^*, y^*\right)$ 满足

$$\begin{cases} r\eta-\delta+\dfrac{r(1-\eta)}{1+k\alpha y^*}-\psi x^*-\dfrac{\beta y^*}{1+\xi\alpha x^*}=0, \\ -d+\dfrac{\theta\beta x^*}{1+\xi\alpha x^*}-\mu y^*=0, \end{cases} \tag{3.4}$$

则对于任意初始值 $\left(x(0), y(0)\right) \in \mathbb{R}_+^2$，系统(1.2)具有唯一的遍历平稳分布 $\pi(\cdot)$。

证明：为了证明系统(1.2)有遍历平稳分布，只需要证出引理 3.1 中的两个条件 A_1，A_2 均成立即可。下面我们证明条件 A_1。易知，系统(1.2)的扩散矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} \sigma_1^2 x^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 y^2 \end{pmatrix},$$

则对任意的 $(x, y) \in \bar{U}_\sigma \subset \mathbb{R}_+^2$， $\xi=\left(\xi_1, \xi_2\right) \in \mathbb{R}_+^2$，有

$$\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x, y)\xi_i\xi_j=\sigma_1^2 x^2\xi_1^2+\sigma_2^2 y^2\xi_2^2 \ge M_0\|\xi\|^2,$$

其中 $M_0=\min_{(x,y)\in\bar{U}_\sigma}\left\{\sigma_1^2 x^2, \sigma_2^2 y^2\right\}$。则引理 3.1 中的条件 A_1 得证。

下面证明条件 A_2。由式子(3.4)易得

$$r\eta-\delta=-\frac{r(1-\eta)}{1+k\alpha y^*}+\psi x^*+\frac{\beta y^*}{1+\xi\alpha x^*}, -d=-\frac{\theta\beta x^*}{1+\xi\alpha x^*}+\mu y^*,$$

代入系统(1.2)可得

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}x &= x\left[-\frac{r(1-\eta)}{1+k\alpha y^*}+\psi x^*+\frac{\beta y^*}{1+\xi\alpha x^*}+\frac{r(1-\eta)}{1+k\alpha y}-\psi x-\frac{\beta y}{1+\xi\alpha x}\right]\mathrm{d}t+\sigma_1 x\mathrm{d}B_1(t)\\
&= x\left[-\psi\left(x-x^*\right)+\frac{r(1-\eta)\left(1+k\alpha y^*-1-k\alpha y\right)}{\left(1+k\alpha y^*\right)(1+k\alpha y)}+\frac{\beta y^*(1+\xi\alpha x)-\beta y\left(1+\xi\alpha x^*\right)}{\left(1+\xi\alpha x^*\right)(1+\xi\alpha x)}\right]\mathrm{d}t+\sigma_1 x\mathrm{d}B_1(t) \qquad (3.5)\\
&= x\left\{-\psi\left(x-x^*\right)-\frac{k\alpha r(1-\eta)\left(y-y^*\right)}{\left(1+k\alpha y^*\right)(1+k\alpha y)}+\frac{\beta\left[\xi\alpha y^*\left(x-x^*\right)-\left(1+\xi\alpha x^*\right)\left(y-y^*\right)\right]}{\left(1+\xi\alpha x^*\right)(1+\xi\alpha x)}\right\}\mathrm{d}t+\sigma_1 x\mathrm{d}B_1(t),
\end{aligned}
$$

和

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}y &= y\left[-\frac{\theta\beta x^*}{1+\xi\alpha x^*}+\mu y^*+\frac{\theta\beta x}{1+\xi\alpha x}-\mu y\right]\mathrm{d}t+\sigma_2 y\mathrm{d}B_2(t)\\
&= y\left[-\mu\left(y-y^*\right)+\frac{\theta\beta x\left(1+\xi\alpha x^*\right)-\theta\beta x^*(1+\xi\alpha x)}{\left(1+\xi\alpha x^*\right)(1+\xi\alpha x)}\right]\mathrm{d}t+\sigma_2 y\mathrm{d}B_2(t) \qquad (3.6)\\
&= y\left[-\mu\left(y-y^*\right)+\frac{\theta\beta\left(x-x^*\right)}{\left(1+\xi\alpha x^*\right)(1+\xi\alpha x)}\right]\mathrm{d}t+\sigma_2 y\mathrm{d}B_2(t).
\end{aligned}
$$

定义

$$
V(x,y)=\frac{\theta}{1+\xi\alpha x^*}\left(x-x^*-x^*\ln\frac{x}{x^*}\right)+\left(y-y^*-y^*\ln\frac{y}{y^*}\right), \qquad (3.7)
$$

对式子(3.7)使用 Itô’s 公式，并结合(3.5)和(3.6)可得

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}V &= \frac{\theta}{1+\xi\alpha x^*}\left(x-x^*\right)\left\{-\psi\left(x-x^*\right)-\frac{k\alpha r(1-\eta)\left(y-y^*\right)}{\left(1+k\alpha y^*\right)(1+k\alpha y)}+\frac{\beta\left[\xi\alpha y^*\left(x-x^*\right)-\left(1+\xi\alpha x^*\right)\left(y-y^*\right)\right]}{\left(1+\xi\alpha x^*\right)(1+\xi\alpha x)}\right\}\\
&\quad+\left(y-y^*\right)\left[-\mu\left(y-y^*\right)+\frac{\theta\beta\left(x-x^*\right)}{\left(1+\xi\alpha x^*\right)(1+\xi\alpha x)}\right]+B \qquad (3.8)\\
&\le -\frac{\theta\psi}{1+\xi\alpha x^*}\left(x-x^*\right)^2+\frac{\theta\beta\xi\alpha y^*}{\left(1+\xi\alpha x^*\right)^2(1+\xi\alpha x)}\left(x-x^*\right)^2-\mu\left(y-y^*\right)^2+B\\
&\le -\frac{\theta}{1+\xi\alpha x^*}\left(\psi-\frac{\beta\xi\alpha y^*}{1+\xi\alpha x^*}\right)\left(x-x^*\right)^2-\mu\left(y-y^*\right)^2+B.
\end{aligned}
$$

为了证明 A_2，我们构造一个有界开集 U_ε

$$
U_\varepsilon=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}_+^2:\varepsilon<x<\frac{1}{\varepsilon},\varepsilon<y<\frac{1}{\varepsilon}\right\},
$$

其中 $0<\varepsilon<1$ 是足够小的常数。在集合 $\mathbb{R}_+^2\setminus U_\varepsilon$ 中，我们选择足够小的常数 ε 使得其满足如下条件：

$$
\varepsilon\le\frac{1}{4x^*}\cdot\frac{1+\xi\alpha x^*}{\theta}\cdot\left(\psi-\frac{\beta\xi\alpha y^*}{1+\xi\alpha x^*}\right)^{-1}\cdot\left[\frac{\theta}{1+\xi\alpha x^*}\left(\psi-\frac{\beta\xi\alpha y^*}{1+\xi\alpha x^*}\right)\left(x^*\right)^2-B\right], \qquad (3.9)
$$

$$
\varepsilon\le\frac{1}{4\mu y^*}\left[\mu\left(y^*\right)^2-B\right], \qquad (3.10)
$$

$$\frac{1}{\varepsilon} > \max\left\{x^*, y^*\right\}, \tag{3.11}$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \ge \sqrt{\frac{1+\xi\alpha x^*}{\theta} \cdot \left(\psi - \frac{\beta\xi\alpha y^*}{1+\xi\alpha x^*}\right)^{-1}(B+1)} + x^*, \tag{3.12}$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \ge \sqrt{\frac{1}{\mu}(B+1)} + y^*. \tag{3.13}$$

为了方便，我们把 $\mathbb{R}_+^2 \setminus U_\varepsilon$ 分为以下 4 个区域，

$$U_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 : x \le \varepsilon\right\}, U_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 : y \le \varepsilon\right\},$$

$$U_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 : x \ge \frac{1}{\varepsilon}\right\}, U_4 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 : y \ge \frac{1}{\varepsilon}\right\}.$$

显然，$\mathbb{R}_+^2 \setminus U_\varepsilon = U_1 \cup U_2 \cup U_3 \cup U_4$。接下来证明对于任意的 $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 \setminus U_\varepsilon$ 有 $\mathcal{L}V \le -1$，这等价于分别在上述 4 个区域上证明它。

情况 1：对于任意的 $(x,y) \in U_1$，由式子(3.1)、(3.2)、(3.8)和(3.9)可得

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}V &\le -\frac{\theta}{1+\xi\alpha x^*}\left(\psi - \frac{\beta\xi\alpha y^*}{1+\xi\alpha x^*}\right)\left(x-x^*\right)^2 + B \\
&\le \frac{2\theta x^* x}{1+\xi\alpha x^*}\left(\psi - \frac{\beta\xi\alpha y^*}{1+\xi\alpha x^*}\right) - \frac{\theta}{1+\xi\alpha x^*}\left(\psi - \frac{\beta\xi\alpha y^*}{1+\xi\alpha x^*}\right)\left(x^*\right)^2 + B \\
&\le \frac{2\theta x^*}{1+\xi\alpha x^*}\left(\psi - \frac{\beta\xi\alpha y^*}{1+\xi\alpha x^*}\right)\varepsilon - \frac{\theta}{1+\xi\alpha x^*}\left(\psi - \frac{\beta\xi\alpha y^*}{1+\xi\alpha x^*}\right)\left(x^*\right)^2 + B \\
&\le -\frac{1}{2}\left[\frac{\theta}{1+\xi\alpha x^*}\left(\psi - \frac{\beta\xi\alpha y^*}{1+\xi\alpha x^*}\right)\left(x^*\right)^2 - B\right] \\
&\le -1,
\end{aligned} \tag{3.14}$$

因此可以得到对于任意的 $(x,y) \in U_1$ 有 $\mathcal{L}V \le -1$。

情况 2：对于任意的 $(x,y) \in U_2$，由式子(3.2)、(3.8)和(3.10)可得

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}V &\le -\mu\left(y-y^*\right)^2 + B \\
&\le 2\mu y^* y - \mu\left(y^*\right)^2 + B \\
&\le 2\mu y^* \varepsilon - \mu\left(y^*\right)^2 + B \\
&\le -\frac{1}{2}\left[\mu\left(y^*\right)^2 - B\right] \\
&\le -1,
\end{aligned} \tag{3.15}$$

因此可以得到对于任意的 $(x,y) \in U_2$ 有 $\mathcal{L}V \le -1$。

情况 3：对于任意的，由式子(3.8)、(3.11)和(3.12)可得

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}V &\le -\frac{\theta}{1+\xi\alpha x^*}\left(\psi - \frac{\beta\xi\alpha y^*}{1+\xi\alpha x^*}\right)\left(x-x^*\right)^2 + B \\
&\le -\frac{\theta}{1+\xi\alpha x^*}\left(\psi - \frac{\beta\xi\alpha y^*}{1+\xi\alpha x^*}\right)\left(\frac{1}{\varepsilon} - x^*\right)^2 + B \\
&\le -1,
\end{aligned} \tag{3.16}$$

因此可以得到对于任意的$(x,y)\in U_3$有$\mathcal{L}V\le -1$。

情况 4：对于任意的$(x,y)\in U_4$，由式子(3.8)、(3.11)和(3.13)可得

$$\begin{aligned}\mathcal{L}V&\le -\mu\left(y-y^*\right)^2+B\\&\le -\mu\left(\frac{1}{\varepsilon}-y^*\right)^2+B\\&\le -1,\end{aligned}\tag{3.17}$$

因此可以得到对于任意的$(x,y)\in U_4$有$\mathcal{L}V\le -1$。

显然，通过式子(3.14)~(3.17)我们可以得到，对于足够小的ε，对所有的$(x,y)\in\mathbb{R}_+^2\setminus U_\varepsilon$均满足$\mathcal{L}V\le -1$，此即证得引理 3.1 中的条件 A_2，故由引理 3.1 可知系统(1.2)具有唯一的遍历平稳分布。这就完成了证明。

4. 灭绝

在本章节中，我们将在两种情况下建立捕食者种群灭绝的充分条件。首先，我们给出了以下引理，它将用于下面的分析。

引理 4.1 设$f\in C\left[[0,\infty)\times\Omega,(0,\infty)\right]$，若对任意的$t\ge 0$存在正常数$\lambda_0,\lambda$使得

$$\ln f(t)\ge \lambda t-\lambda_0\int_0^t f(\xi)\mathrm{d}\xi+F(t)$$

几乎处处成立，其中$F\in C\left[[0,\infty)\times\Omega,(0,\infty)\right]$，$\lim\limits_{t\to\infty}\frac{F(t)}{t}=0$几乎处处成立，则有

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t f(\xi)\mathrm{d}\xi\ge\frac{\lambda}{\lambda_0}$$

几乎处处成立。

这个引理的证明类似于 Ji 和 Jiang [27]的证明，这里省略。

定理 4.1 设$(x(t),y(t))$是系统(1.2)的满足任意初值$(x(0),y(0))\in\mathbb{R}_+^2$的解，如果满足条件$\frac{\theta\beta}{\xi\alpha}-d-\frac{\sigma_2^2}{2}<0$，$r-\delta-\frac{\sigma_1^2}{2}>0$，则捕食者种群$y$以概率 1 的指数形式灭绝且食饵种群存活，即有

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t x(s)\mathrm{d}s>\frac{r-\delta-\frac{\sigma_1^2}{2}}{\psi}>0,\ \lim_{t\to\infty}y(t)=0$$

几乎处处成立。

证明：对$\ln y$使用 Itô’s 公式，有

$$\mathcal{L}(\ln y)=\frac{\theta\beta x}{1+\xi\alpha x}-d-\mu y-\frac{\sigma_2^2}{2}\le\frac{\theta\beta}{\xi\alpha}-d-\frac{\sigma_2^2}{2}<0,\tag{4.1}$$

因此有

$$\mathrm{d}(\ln y)=-\left(d+\frac{\sigma_2^2}{2}-\frac{\theta\beta}{\xi\alpha}\right)\mathrm{d}t+\sigma_2\mathrm{d}B_2(t),\tag{4.2}$$

$$\frac{\ln y(t)-\ln y(0)}{t}\le-\left(d+\frac{\sigma_2^2}{2}-\frac{\theta\beta}{\xi\alpha}\right)+\frac{\sigma_2B_2(t)}{t},\tag{4.3}$$

由局部鞅的强大数定理[26]可以得到$\lim\limits_{t\to\infty}\frac{B_2(t)}{t}=0$是几乎处处成立的，对式子(4.3)两边取上确界，则有

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\ln y(t)}{t}\le -\left(d+\frac{\sigma_2^2}{2}-\frac{\theta\beta}{\xi\alpha}\right)<0 \tag{4.4}$$

几乎处处成立。可得有 $\lim_{t\to\infty} y(t)=0$ 几乎处处成立，即证得捕食者种群 y 灭绝。因此对所有满足条件 $0<\varepsilon_1<r-\delta-\frac{\sigma_1^2}{2}$ 的 ε_1，存在 t_1 和一个集合 $\Omega_{\varepsilon_1}\subset\Omega$，对任意的 $t\ge t_1$ 和 $\varepsilon_1\subset\Omega_{\varepsilon_1}$ 满足 $\mathbb{P}\left(\Omega_{\varepsilon_1}\right)>1-\varepsilon_1$，$k\alpha y\le k\alpha\varepsilon_1$ 和 $\beta y\le\beta\varepsilon_1$，所以有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\ln x)&=\left[r\left(\eta+\frac{1-\eta}{1+k\alpha y}\right)-\delta-\frac{\sigma_1^2}{2}-\psi x-\frac{\beta y}{1+\xi\alpha x}\right]\mathrm{d}t+\sigma_1\mathrm{d}B_1(t)\\&\ge\left[r\left(\eta+\frac{1-\eta}{1+k\alpha\varepsilon_1}\right)-\delta-\frac{\sigma_1^2}{2}-\psi x-\frac{\beta\varepsilon_1}{1+\xi\alpha x}\right]\mathrm{d}t+\sigma_1\mathrm{d}B_1(t),\end{aligned} \tag{4.5}$$

令 $\varepsilon_1\to 0$，则有

$$\mathrm{d}(\ln x)\ge\left(r-\delta-\frac{\sigma_1^2}{2}-\psi x\right)\mathrm{d}t+\sigma_1\mathrm{d}B_1(t), \tag{4.6}$$

对式子(4.6)两边从 0 到 t 积分，可得

$$\ln x(t)-\ln x(0)\ge\left(r-\delta-\frac{\sigma_1^2}{2}\right)t-\psi\int_0^t x(s)\mathrm{d}s+\sigma_1 B_1(t),$$

因此有

$$\ln x(t)\ge\left(r-\delta-\frac{\sigma_1^2}{2}\right)t-\psi\int_0^t x(s)\mathrm{d}s+\sigma_1 B_1(t), \tag{4.7}$$

显然，式子(4.7)满足引理 4.1 的条件，故由引理 4.1 可得

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t x(s)\mathrm{d}s\ge\frac{r-\delta-\frac{\sigma_1^2}{2}}{\psi}>0$$

几乎处处成立，即此时食饵种群 x 存活。这便完成了定理 4.1 的证明。

定理 4.2 设 $(x(t),y(t))$ 是系统(1.2)的满足任意初值 $(x(0),y(0))\in\mathbb{R}_+^2$ 的解，如果满足 $\delta+\frac{\sigma_1^2}{2}-r>0$，则食饵种群与捕食者种群均灭绝，即有 $\lim_{t\to\infty}x(t)=0$，$\lim_{t\to\infty}y(t)=0$。

证明：对 $\ln x$ 使用 Itô’s 公式，可得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\ln x)&=\left[r\eta+\frac{r(1-\eta)}{1+k\alpha y}-\delta-\psi x-\frac{\beta y}{1+\xi\alpha x}-\frac{\sigma_1^2}{2}\right]\mathrm{d}t+\sigma_1\mathrm{d}B_1(t)\\&\le\left(r\eta+r-r\eta-\delta-\frac{\sigma_1^2}{2}\right)\mathrm{d}t+\sigma_1\mathrm{d}B_1(t)\\&=-\left(\delta+\frac{\sigma_1^2}{2}-r\right)\mathrm{d}t+\sigma_1\mathrm{d}B_1(t),\end{aligned} \tag{4.8}$$

对式子(4.8)两边从 0 到 t 积分并同时除以 t 可得

$$\frac{\ln x(t)-\ln x(0)}{t}\le-\left(\delta+\frac{\sigma_1^2}{2}-r\right)+\frac{\sigma_1 B_1(t)}{t}, \tag{4.9}$$

对式子(4.9)两边取上确界，且满足 $\lim_{t\to\infty}\frac{B_2(t)}{t}=0$ 是几乎处处成立的，则有

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\ln x(t)}{t}\le -\left(\delta+\frac{\sigma_1^2}{2}-r\right)<0 \tag{4.10}$$

几乎处处成立，从而 $\lim_{t\to\infty}x(t)=0$ 几乎处处成立，即食饵种群 x 灭绝。因此，存在 t_2 和一个集合 $\Omega_{\varepsilon_2}\subset\Omega$ 使得对任意的 $t\ge t_2$， $\varepsilon_2\in\Omega_{\varepsilon_2}$ 满足 $\mathbb{P}\left(\Omega_{\varepsilon_2}\right)>1-\varepsilon_2$ 和 $\theta\beta x\le\theta\beta\varepsilon_2$，且

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(\ln y)&=\left(\frac{\theta\beta x}{1+\xi\alpha x}-d-\mu y-\frac{\sigma_2^2}{2}\right)\mathrm{d}t+\sigma_2\mathrm{d}B_2(t)\\ &\le\left(\theta\beta\varepsilon_2-d-\frac{\sigma_2^2}{2}\right)\mathrm{d}t+\sigma_2\mathrm{d}B_2(t), \end{aligned} \tag{4.11}$$

对式子(4.11)两边从 0 到 t 积分并同时除以 t 可得

$$\frac{\ln y(t)-\ln y(0)}{t}\le -\left(d+\frac{\sigma_2^2}{2}\right)+\theta\beta\varepsilon_2+\frac{\sigma_2 B_2(t)}{t}, \tag{4.12}$$

对式子(4.12)两边取上确界，且满足 $\lim_{t\to\infty}\frac{B_2(t)}{t}=0$，则对于 $1-\varepsilon_2$ 有

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\ln y(t)}{t}\le -\left(d+\frac{\sigma_2^2}{2}\right)+\theta\beta\varepsilon_2, \tag{4.13}$$

令 $\varepsilon_2\to 0$，则有

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\ln y(t)}{t}\le -\left(d+\frac{\sigma_2^2}{2}\right)<0, \tag{4.14}$$

几乎处处成立。即证得 $\lim_{t\to\infty}y(t)=0$ 几乎处处成立，即捕食者种群 y 灭绝。此便完成了定理 4.2 的证明，即此时食饵种群与捕食者种群均灭绝。

5. 结论

这篇文章研究了在白噪声存在的情况下具有恐惧效应与捕食者趋避敏感性的捕食食饵模型的基本特征，了解了在白噪声影响存在的情况下的捕食动力学行为。首先，我们证明了系统(1.2)存在唯一的全局正解；然后，通过给定一些条件的限制，证得系统(1.2)在满足这些条件时存在唯一的遍历平稳分布，即此时两种群可以长期共存；最后，我们分析了两种情况下捕食者种群灭绝的条件，第一种情况是食饵种群可以长期存活但捕食者种群在一段时间后会灭绝，第二种情况是在一段时间后食饵种群与捕食者种群均灭绝。

除此之外，其他一些贴合实际的现象也值得进一步研究。例如，可以考虑脉冲扰动对系统(1.2)的影响，这是因为不连续性是一种常见现象，且许多真实现象通常是不连续的；另一方面可以在系统(1.2)中加入彩色噪声。因为种群的动态影响可能受到温度、湿度、收获等的影响，加入彩色噪声可以更准确反映这一点。这些都可以在今后的研究中加以思考和讨论。

参考文献

[1] Lotka, A.J. (1925) Elements of Physical Biology. Williams and Wilkins, Baltimore.

[2] Volterra, V. (1926) Variazioni e Fluttuazioni Del Numero d'individui in Specie Animali Conviventi. *Memoria della Reale Accademia Nazionale dei Lincei*, **2**, 31-113.

[3] Jana, A. and Roy, S.K. (2021) Behavioural Analysis of Two Prey-Two Predator Mode. *Ecological Complexity*, **47**, Article ID: 100942. https://doi.org/10.1016/j.ecocom.2021.100942

[4] Qi, H.K., Meng, X.Z., Hayat, T. and Hobiny, A. (2022) Stationary Distribution of a Stochastic Predator-Prey Model with Hunting Cooperation. *Applied Mathematics Letters*, **124**, Article ID: 107662. https://doi.org/10.1016/j.aml.2021.107662

[5] Liu, Q. and Jiang, D.Q. (2021) Influence of the Fear Factor on the Dynamics of a Stochastic Predator-Prey Model. *Applied Mathematics Letters*, **112**, Article ID: 106756. https://doi.org/10.1016/j.aml.2020.106756

[6] Wang, Z.J., Deng, M.L. and Liu, M. (2021) Stationary Distribution of a Stochastic Ratio-Dependent Predator-Prey System with Regime-Switching. *Chaos, Solitons and Fractals*, **142**, Article ID: 110462. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.110462

[7] Lu, W.J., Xia, Y.H. and Bai, Y.Z. (2020) Periodic Solution of a Stage-Structured Predator-Prey Model Incorporating Prey Refuge. *Mathematical Biosciences and Engineering*, **17**, 3160-3174. https://doi.org/10.3934/mbe.2020179

[8] Bhatia, S.K., Sudipa, C.H., Agaewal, A. and Jain, R. (2020) Effect of Stage Structure in Predator-Prey Model with Crowley-Martin Functional Response. *International Journal of Applied Mathematics and Statistics*, **59**, 79-92.

[9] Liu, Q., Jiang, D.Q. and Hayat, T. (2021) Dynamics of Stochastic Predator-Prey Models with Distributed Delay and Stage Structure for Prey. *International Journal of Biomathematics*, **14**, Article ID: 2150020. https://doi.org/10.1142/S1793524521500200

[10] Preisser, E.L. and Bolnick, D.I. (2008) The Many Faces of Fear: Comparing the Pathways and Impacts of Nonconsumptive Predator Effects on Prey Populations. *PLOS ONE*, **3**, Article No. e2465. https://doi.org/10.1371/journal.pone.0002465

[11] Wang, X.Y., Zanette, L. and Zou, X.F. (2016) Modelling the Fear Effect in Predator-Prey Interactions. *Journal of Mathematical Biology*, **73**, 1179-1204. https://doi.org/10.1007/s00285-016-0989-1

[12] Dong, Y.X., Wu, D.Y., Shen, C.S. and Ye, L.H. (2022) Influence of Fear Effect and Predator-Taxis Sensitivity on Dynamical Behavior of a Predator-Prey Model. *Zeitschrift Für Angewandte Mathematik und Physik*, **73**, Article No. 25. https://doi.org/10.1007/s00033-021-01659-8

[13] Alabacy, Z.K. and Majeed, A.A. (2021) The Fear Effect on a Food Chain Prey-Predator Model Incorporating a Prey Refuge and Harvesting. *Journal of Physics*: *Conference Series*, **1804**, Article ID: 012077. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1804/1/012077

[14] Xie, B.F. and Zhang, N. (2022) Influence of Fear Effect on a Holling Type III Prey-Predator System with the Prey Refuge. *AIMS Mathematics*, **7**, 1811-1830. https://doi.org/10.3934/math.2022104

[15] Yousef, A., Thirthar, A.A., Alaoui, A.L., Panja, P. and Abdeljawad, T. (2022) The Hunting Cooperation of a Predator under Two Prey's Competition and Fear-Effect in the Prey-Predator Fractional-Order Model. *AIMS Mathematics*, **7**, 5463-5479. https://doi.org/10.3934/math.2022303

[16] Souna, F., Djilali, S. and Lakmeche, A. (2021) Spatiotemporal Behavior in a Predator-Prey Model with Herd Behavior and Cross-Diffusion and Fear Effect. *The European Physical Journal Plus*, **134**, Article No. 474. https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-021-01489-7

[17] Liu, Q., Jiang, D.Q., Hayat, T. and Alsaedi, A. (2018) Stationary Distribution and Extinction of a Stochastic Predator-Prey Model with Herd Behavior. *Journal of the Franklin Institute*, **355**, 8177-8193. https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2018.09.013

[18] Zhao, X. and Zeng, Z.J. (2020) Stationary Distribution of a Stochastic Predator-Prey System with Stage Structure for Prey. *Physica A*: *Statistical Mechanics and Its Applications*, **545**, Article ID: 123318. https://doi.org/10.1016/j.physa.2019.123318

[19] Liu, Q., Jiang, D.Q., Hayat, T., Alsaedi, A. and Ahmad, B. (2020) Dynamical Behavior of a Stochastic Predator-Prey Model with Stage Structure for Prey. *Stochastic Analysis and Applications*, **38**, 647-667. https://doi.org/10.1080/07362994.2019.1710188

[20] Liu, Q. and Jiang, D.Q. (2019) Stationary Distribution and Extinction of a Stochastic One Prey Two Predator Model with Holling Type II Functional Response. *Stochastic Analysis and Applications*, **37**, 321-345. https://doi.org/10.1080/07362994.2019.1566005

[21] Xu, D.S., Liu, M. and Xu, X.F. (2020) Analysis of a Stochastic Predator-Prey System with Modified Leslie-Gower and Holling-Type IV Schemes. *Physica A*: *Statistical Mechanics and Its Applications*, **537**, Article ID: 122761. https://doi.org/10.1016/j.physa.2019.122761

[22] Zhao, X. and Zeng, Z.J. (2020) Stationary Distribution and Extinction of a Stochastic Ratio-Dependent Predator-Prey

System with Stage Structure for the Predator. *Physica A*: *Statistical Mechanics and Its Applications*, **545**, Article ID: 123310. https://doi.org/10.1016/j.physa.2019.123310

[23] Ji, C.Y., Jiang, D.Q. and Shi, N.Z. (2009) Analysis of a Predator-Prey Model with Modified Leslie-Gower and Holling-Type II Schemes with Stochastic Perturbation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **359**, 482-498. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2009.05.039

[24] Dalal, N., Gerrnhalgh, D. and Mao, X.R. (2008) A Stochastic Model for Internal HIV Dynamics. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **341**, 1084-1101. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.11.005

[25] Mao, X. (1997) Stochastic Differential Equations and Applications. Horwood Publishing, Chichester.

[26] Khasminskii, R. (1980) Stochastic Stability of Differential Equations. Sijthoff and Noordhoff, Alphen aan den Rijn.

[27] Ji, C.Y. and Jiang, D.Q. (2014) Threshold Behaviour of a Stochastic SIR Model. *Applied Mathematical Modelling*, **38**, 5067-5079. https://doi.org/10.1016/j.apm.2014.03.037