Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(9), 1474-1480
Published Online September 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.129160

Hans汉斯

周期竞争模型的共存解的存在性

伍日广，钟延生*

福建师范大学，数学与统计学院，福建 福州

收稿日期：2022年8月13日；录用日期：2022年9月13日；发布日期：2022年9月20日

摘 要

本文研究了一个具有非局部项的奇异退化抛物方程组，它可以看作是Lotka-Volterra型空间异构竞争模型。应用Leray-Schauder不动点定理，建立了该问题共存周期解的存在性，并结合现有文献，给出了该系统的所有参数的完整图像。

关键词

共存解，周期竞争模型，奇异退化扩散

Existence of Coexistence Solutions for a Periodic Competition Model

Riguang Wu, Yansheng Zhong*

College of Mathematics and Statistics, Fujian Normal University, Fuzhou Fujian

Received: Aug. 13th, 2022; accepted: Sep. 13th, 2022; published: Sep. 20th, 2022

Abstract

We investigate a system of singular-degenerate parabolic equations with non-local terms, which can be regarded as a Lotka-Volterra type spatial heterogeneous competition model. Applying the Leray-Schauder fixed-point theorem, we establish the existence of coexistence periodic solutions to the problem. Moreover, it gives a complete picture for such a system for all parameters.

Keywords

Coexistence Solutions, Periodic Competition Model, Singular-Degenerate Diffusion

*通讯作者。

文章引用: 伍日广, 钟延生. 周期竞争模型的共存解的存在性[J]. 理论数学, 2022, 12(9): 1474-1480.
DOI: 10.12677/pm.2022.129160

1. 引言

反应–扩散方程形式的动力学模型在各种自然科学中得到了广泛的研究。对于生物群落系统的研究一直是生物数学的热门。许多种群动力学模型都可以用延迟反应–扩散方程来刻画。在经典的扩散洛特卡–沃尔特拉型模型中研究了环境的扩散和非均质性之间的相互作用。

我们研究以下系统

$$\begin{cases} L^{m,p,r}[u]=u^{p-1}\left(a(x,t)-\int_{\Omega}K_1(\xi,t)u^2(\xi,t-\tau_1)\mathrm{d}\xi-\int_{\Omega}K_2(\xi,t)v^2(\xi,t-\tau_2)\mathrm{d}\xi\right) \\ L^{n,q,r}[v]=v^{q-1}\left(b(x,t)-\int_{\Omega}K_3(\xi,t)u^2(\xi,t-\tau_3)\mathrm{d}\xi-\int_{\Omega}K_4(\xi,t)v^2(\xi,t-\tau_4)\mathrm{d}\xi\right) \\ u(x,t+\omega)=u(x,t),v(x,t+\omega)=v(x,t),(x,t)\in Q=\Omega\times R \\ u(x,t)=v(x,t)=0,(x,t)\in\partial\Omega\times R, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中，$\Omega\subset R^n\,(n>1)$ 是一个光滑有界域，$p,q\in(1,2),r>1,m>1,n>1$，$K_i,a,b:\Omega\times R\to R$ 相对于时间 t 是 ω-周期函数。上式的非线性算子 $L^{e,f,g}$ 定义如下

$$L^{e,f,g}[W]=\frac{\partial W}{\partial t}-div\left(|W|^e\left|\nabla W^f\right|^{g-2}\left|\nabla W^f\right|\right) \tag{1.2}$$

系统(1.1)模拟了居住在区域 Ω 内的两个种群密度分别为 $u(x,t)$ 和 $v(x,t)$ 的竞争物种之间的相互作用。因此，我们只对非负解 $u\ge 0$，$v\ge 0$ 感兴趣。此外，我们假设 Ω 完全被一个致命的环境所包围，因为这两个种群的密度都服从于均匀的狄利克雷边界条件。关于这种模型的详细描述，见[1]。近年来，共存解，即具有 $u\gneqq 0$，$v\gneqq 0$ 的解 (u,v) 受到了广泛的关注。早期文献中的大部分工作都致力于研究线性扩散的情况：即 $m=n=1$，$p=q=2$ (例如，见[2] [3] [4] [5])。而作为一个特殊的情况，对生物群落系统的共存稳态也进行了相应的研究：见[6] [7] [8]。其生物学背景使得研究与(1.1)相同类型的非线性扩散系统的共存周期解变得非常有趣。在这方面，具有双退化的情况，即 $m,n>1,\ p,q>2$，已经被广泛地讨论过：参见[1] [9]。对于梯度奇异点的情况，即 $1<p$，$q<2$，Fragnelli 等人通过应用 Leray-Schauder 理论(见[10])在 $m>p$，$n>q$ 的情况下证明了问题(1.1)共存周期解的存在性。

在文献[10]的基础上，本文进一步考虑在具有梯度奇异性的情况下共存周期解的存在性问题，即在[10]中，非线性算子 $L^{e,f,g}$ 的 $e=0$，而本文应用 Leray-Schauder 不动点定理考虑 $e>1$ 的情形，从而进一步完善了文献[10]的结论，再结合文献[10]的结果给出了参数 $r>1$，$1<p$，$q<2$，$m>1$，$n>1$ 时解的完整图像。

本文的结构如下：第二节介绍了一些必要的引理以及本文主要结果。第三节首先利用 Leray-Schauder 不动点理论证明了问题(1.1)的一个近似共存解 $(u_\varepsilon,v_\varepsilon)$ 的存在性，且它的下界是不依赖于 ε 的。在此基础上，通过对 ε 取极限，证明了(1.1)共存解的存在性。

2. 基本准备

在本文中，$C_\omega\left(\overline{Q_\omega}\right)$ 表示在 $\bar{\Omega}\times R$ 中连续的且对于时间 t 是 ω-周期性的函数集。B_R 是一个以半径为中心的球。假设 $a(x,t)$，$b(x,t)$，$K_i(x,t)\in C_\omega\left(\overline{Q_\omega}\right)$，$i=1,2,3,4$，和

$$\left\{x\in\Omega:\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}a(x,t)\mathrm{d}t>0\right\}\neq\varnothing,\left\{x\in\Omega:\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}b(x,t)\mathrm{d}t>0\right\}\neq\varnothing \tag{2.1}$$

若选择 $K_i\geq 0$，$i=1,2,3,4$，则这对应于竞争情况。由于(1.1)中的方程的奇异性，问题(1.1)可能没有经典解。因此，我们从以下意义上考虑其弱解。

定义 2.1：在 $\Omega\times(0,\omega)$ 中定义的一对非负函数 (u,v) 被称为问题(1.1)的弱解，若 $u,v\in C_\omega(Q_\omega)$，$|u|^{\frac{r}{p}+m}\in L^p\left((0,\omega);W_0^{1,p}(\Omega)\right)$，$|v|^{\frac{r}{q}+n}\in L^q\left((0,\omega);W_0^{1,q}(\Omega)\right)$ 且 (u,v) 满足

$$\begin{aligned}0=\iint_{Q_\omega}\Big(&-u\frac{\partial\varphi}{\partial t}+|u|^r\left|\nabla u^m\right|^{p-2}\nabla u^m\nabla\varphi-au^{p-1}\varphi+u^{p-1}\varphi\\&+\left[\int_\Omega K_1(\xi,t)u^2(\xi,t-\tau_1)\mathrm{d}\xi+\int_\Omega K_2(\xi,t)v^2(\xi,t-\tau_2)\mathrm{d}\xi\right]\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{2.2}$$

和

$$\begin{aligned}0=\iint_{Q_\omega}\Big(&-v\frac{\partial\varphi}{\partial t}+|v|^r\left|\nabla v^m\right|^{p-2}\nabla v^m\nabla\varphi-bv^{p-1}\varphi+v^{q-1}\varphi\\&+\left[\int_\Omega K_3(\xi,t)u^2(\xi,t-\tau_3)\mathrm{d}\xi+\int_\Omega K_4(\xi,t)v^2(\xi,t-\tau_4)\mathrm{d}\xi\right]\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{2.3}$$

其中对于 $\forall\varphi\in C^1\left(\overline{Q_\omega}\right)$，有 $\varphi(x,0)=\varphi(x,\omega)$，$x\in\Omega$ 和 $\varphi(x,t)=0$，$\forall(x,t)\in\partial\Omega\times[0,\omega]$。

为了得到该问题(1.1)共存解的存在性，我们在退化抛物型方程中加入了一些粘性项，然后考虑了下面的正则化问题：

$$\begin{cases}L_\varepsilon^{m,p,r}[u]=u^{p-1}\left(a(x,t)-\int_\Omega K_1(\xi,t)u^2(\xi,t-\tau_1)\mathrm{d}\xi-\int_\Omega K_2(\xi,t)v^2(\xi,t-\tau_2)\mathrm{d}\xi\right)+\varepsilon,(x,t)\in Q_\omega,\\L_\varepsilon^{n,q,r}[v]=v^{q-1}\left(b(x,t)-\int_\Omega K_3(\xi,t)u^2(\xi,t-\tau_3)\mathrm{d}\xi-\int_\Omega K_4(\xi,t)v^2(\xi,t-\tau_4)\mathrm{d}\xi\right)+\varepsilon,(x,t)\in Q_\omega,\\u(x,t)=v(x,t)=0,(x,t)\in\partial\Omega\times[0,\omega],\\u(x,0)=u(x,\omega),v(x,0)=v(x,\omega),x\in\Omega,\end{cases} \tag{2.4}$$

其中，非线性算子 $L_\varepsilon^{e,f,g}$ 定义为

$$L_\varepsilon^{e,f,g}[W]=\frac{\partial W}{\partial t}-div\left\{|W+\varepsilon|^e\left[\left|\left(fW^{f-1}+\varepsilon\right)\nabla W\right|^2+\varepsilon\right]^{\frac{g-2}{2}}\left(fW^{f-1}+\varepsilon\right)\nabla W\right\} \tag{2.5}$$

为了应用 Leray-Schauder 不动点定理得到该问题(2.3)共存解的存在性，我们引入了一个映射 $G_\varepsilon:[0,1]\times C_\omega\left(\overline{Q_\omega}\right)\times C_\omega\left(\overline{Q_\omega}\right)\to C_\omega\left(\overline{Q_\omega}\right)\times C_\omega\left(\overline{Q_\omega}\right)$ 如下：

$$(\sigma,f,g)\to(u_\varepsilon,v_\varepsilon)=G_\varepsilon(\sigma,f,g),$$

上式中 $(u_\varepsilon,v_\varepsilon)$ 为以下耦合周期问题的解：

$$\begin{cases}L_\varepsilon^{m,p,r}[u]=\sigma f,(x,t)\in Q_\omega,\\L_\varepsilon^{n,q,r}[v]=\sigma g,(x,t)\in Q_\omega,\\u(x,t)=v(x,t)=0,(x,t)\in\partial\Omega\times[0,\omega],\\u(x,0)=u(x,\omega),v(x,0)=v(x,\omega),x\in\Omega.\end{cases} \tag{2.6}$$

如上所述，令

$$f(u,v)=u_+^{p-1}\left(a(x,t)-\int_\Omega K_1(\xi,t)u^2(\xi,t-\tau_1)\mathrm{d}\xi-\int_\Omega K_2(\xi,t)v^2(\xi,t-\tau_2)\mathrm{d}\xi\right)+\varepsilon$$

和

$$g(u,v)=v_+^{q-1}\left(b(x,t)-\int_\Omega K_3(\xi,t)u^2(\xi,t-\tau_3)\mathrm{d}\xi-\int_\Omega K_4(\xi,t)v^2(\xi,t-\tau_4)\mathrm{d}\xi\right)+\varepsilon$$

其中，$u_+=\max\{u,0\}$，$v_+=\max\{v,0\}$。显然，若非负函数 $u_\varepsilon,v_\varepsilon$ 满足 $(u_\varepsilon,v_\varepsilon)=G_\varepsilon(1,f(u_\varepsilon,v_\varepsilon),g(u_\varepsilon,v_\varepsilon))$ 那么，$(u_\varepsilon,v_\varepsilon)$ 也是问题(2.4)的一个非负解。因此，问题(2.4)的非负解的存在性等价于映射 $(u_\varepsilon,v_\varepsilon)\mapsto G_\varepsilon(1,f(u_\varepsilon,v_\varepsilon),g(u_\varepsilon,v_\varepsilon))$ 的不动点 $(u_\varepsilon,v_\varepsilon)$ 的存在性。设 $\mu_k\ (k=p,q)$ 为 Poincare 常数，使得对于任意 $\eta\in W_0^{1,k}(\Omega)$ 有 $\mu_k\|\eta\|_{L^k(\Omega)}^k\le\|\nabla\eta\|_{L^k(\Omega)}^k$。那么，存在性的结果可以表述如下。

定理 2.2： 假设 $K_i(x,t)\ge0,(i=1,2,3,4)$，$K_i(x,t)\le k_i>0,(i=2,3)$，若

$$\left\{x\in\Omega:\frac{1}{\omega}\int_0^\omega a(x,t)\mathrm{d}t-K_2|\Omega|\left(\frac{\|b\|_{L^\infty(Q_\omega)}}{\mu_q}\right)^{\frac{2}{nq+r+1-n-q}}>0\right\}\ne\varnothing$$

且

$$\left\{x\in\Omega:\frac{1}{\omega}\int_0^\omega b(x,t)\mathrm{d}t-K_3|\Omega|\left(\frac{\|a\|_{L^\infty(Q_\omega)}}{\mu_q}\right)^{\frac{2}{mp+r+1-m-p}}>0\right\}\ne\varnothing$$

则问题(1.1)存在一个共存解 $(u,v)\in C_\omega\left(\overline{Q_\omega}\right)\times C_\omega\left(\overline{Q_\omega}\right)$。

3. 主要结果及证明

首先，我们证明正则化问题(2.4)的周期解 $(u_\varepsilon,v_\varepsilon)$ 的存在性，其中 $(u_\varepsilon,v_\varepsilon)\in C_\omega\left(\overline{Q_\omega}\right)\times C_\omega\left(\overline{Q_\omega}\right)$，$u_\varepsilon,v_\varepsilon>0$，$u_\varepsilon,v_\varepsilon\in Q_\varepsilon$，$\varepsilon>0$ 且 ε 足够小。因此，需应用不动点定理来得到映射 $(u,v)\mapsto G_\varepsilon(1,f(u,v),g(u,v))$ 的正不动点。并且为证明定理 2.1，还需以下引理。

引理 3.1： 若 $(u_\varepsilon,v_\varepsilon)$ 为下式的非平凡解

$$(u_\varepsilon,v_\varepsilon)=G_\varepsilon\left(\sigma,f(u_{\varepsilon,+},v_{\varepsilon,+})+(1-\sigma),g(u_{\varepsilon,+},v_{\varepsilon,+})+(1-\sigma)\right),\sigma\in[0,1],\tag{3.1}$$

则 $u_\varepsilon(x,t)\ge0,v_\varepsilon(x,t)\ge0,\forall(x,t)\in Q_\omega$，此外，若 $u_\varepsilon(x,t)\ne0$ 或 $v_\varepsilon(x,t)\ne0$ 则 $u_\varepsilon>0$ 或 $v_\varepsilon>0$，$u_\varepsilon,v_\varepsilon\in Q_\omega$。

证明： 假设 $(u_\varepsilon,v_\varepsilon)$，$\varepsilon\in[0,1]$ 是(3.1)的解，且 $u_\varepsilon\ne0$，首先证明 $u_\varepsilon\ge0$。将(2.6)的第一个方程乘以 $u_{\varepsilon,-}:=\min\{0,u_\varepsilon\}$，再在区间 Q_ω 上积分并且由于 u_ε 的周期性及 $u_{\varepsilon,+}u_{\varepsilon,-}=0$。可得

$$\begin{aligned}&\iint_{Q_\omega}u_{\varepsilon,-}\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\iint_{Q_\omega}u_{\varepsilon,-}div\left\{|u+\varepsilon|^r\left[\left|\left(mu^{m-1}+\varepsilon\right)\nabla u\right|^2+\varepsilon\right]^{\frac{p-2}{2}}\left(mu^{m-1}+\varepsilon\right)\nabla u\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&=\iint_{Q_\omega}(1-\sigma)u_{\varepsilon,-}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le0\end{aligned}$$

分别考虑到上式的各部分，

$$\iint_{Q_\omega}u_{\varepsilon,-}\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\int_\Omega(u_{\varepsilon,-})^2\Big|_0^\omega\mathrm{d}x=0\tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}&-\iint_{Q_\omega}u_{\varepsilon,-}div\left\{|u+\varepsilon|^r\left[\left|\left(mu^{m-1}+\varepsilon\right)\nabla u\right|^2+\varepsilon\right]^{\frac{p-2}{2}}\left(mu^{m-1}+\varepsilon\right)\nabla u\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&=\iint_{Q_\omega}\nabla u_{\varepsilon,-}|u+\varepsilon|^r\left[\left|\left(mu^{m-1}+\varepsilon\right)\nabla u\right|^2+\varepsilon\right]^{\frac{p-2}{2}}\left(mu^{m-1}+\varepsilon\right)\nabla u\mathrm{d}x\mathrm{d}t\end{aligned}\tag{3.3}$$

则

$$\iint_{Q_\omega}\left|\nabla u_{\varepsilon,-}\right|^2\left|u+\varepsilon\right|^r\left[\left|\left(mu^{m-1}+\varepsilon\right)\nabla u\right|^2+\varepsilon\right]^{\frac{p-2}{2}}\left(mu^{m-1}+\varepsilon\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le 0$$

注意到

$$\iint_{Q_\omega}\left|\nabla u_{\varepsilon,-}\right|^2\left|u+\varepsilon\right|^r\left[\left|\left(mu^{m-1}+\varepsilon\right)\nabla u\right|^2+\varepsilon\right]^{\frac{p-2}{2}}mu^{m-1}$$
$$+\iint_{Q_\omega}\varepsilon\left|\nabla u_{\varepsilon,-}\right|^2\left|u+\varepsilon\right|^r\left[\left|\left(mu^{m-1}+\varepsilon\right)\nabla u\right|^2+\varepsilon\right]^{\frac{p-2}{2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le 0$$

且

$$\frac{4m}{(m+1)^2}\iint_{Q_\omega}\left|\nabla u_{\varepsilon,-}^{\frac{m+1}{2}}\right|^2\left|u+\varepsilon\right|^r\left[\left|\left(mu^{m-1}+\varepsilon\right)\nabla u\right|^2+\varepsilon\right]^{\frac{p-2}{2}}mu^{m-1}$$
$$+\varepsilon\iint_{Q_\omega}\left|\nabla u_{\varepsilon,-}\right|^2\left|u+\varepsilon\right|^r\left[\left|\left(mu^{m-1}+\varepsilon\right)\nabla u\right|^2+\varepsilon\right]^{\frac{p-2}{2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le 0$$

因此，特别地，

$$\varepsilon\iint_{Q_\omega}\left|\nabla u_{\varepsilon,-}\right|^2\left|u+\varepsilon\right|^r\left[\left|\left(mu^{m-1}+\varepsilon\right)\nabla u\right|^2+\varepsilon\right]^{\frac{p-2}{2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le 0$$

因为

$$\left|u+\varepsilon\right|^r\left[\left|\left(mu^{m-1}+\varepsilon\right)\nabla u\right|^2+\varepsilon\right]^{\frac{p-2}{2}}>0,$$

则

$$\left|\nabla u_{\varepsilon,-}\right|^2=0.$$

因此

$$\iint_{Q_\omega}\left|\nabla u_{\varepsilon,-}\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0.$$

由 Poincare 不等式可得

$$0\le\int_\Omega\left|u_{\varepsilon,-}\right|^2\mathrm{d}x\le c\int_\Omega\left|\nabla u_{\varepsilon,-}\right|^2\mathrm{d}x,c>0.$$

对上式在区间 $(0,\omega)$ 上进行积分，可得

$$0\le\iint_{Q_\omega}\left|u_{\varepsilon,-}\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le c\iint_{Q_\Omega}\left|\nabla u_{\varepsilon,-}\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0,$$

再结合边界条件与 $u_{\varepsilon,-}\in C(Q_\omega)$，则可得 $u_{\varepsilon,-}(x,t)=0,(x,t)\in Q_\omega$。因此

$$u_\varepsilon(x,t)=u_{\varepsilon,+}(x,t)\ge 0,\forall(x,t)\in Q_\omega.$$

现在我们证明在 Q_ω 内有 $u_\varepsilon>0$。由于 u_ε 是非平凡的，因此存在 $(x_0,t_0)\in\Omega\times(0,\omega]$，使得 $u_\varepsilon(x_0,t_0)>0$。设 $\Psi\in C_0^\infty(\Omega)$ 是一个非负函数，使得 $0<\Psi(x_0)<u_\varepsilon(x_0,t_0)$ 且对于 $M>0$，令 z 为下式的解

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial t}-div\left\{|z+\varepsilon|^{r}\left[\left|\left(mz^{m+1}\right)\nabla z\right|^{2}+\varepsilon\right]^{\frac{p-2}{2}}\left(mz^{m-1}+\varepsilon\right)\nabla z\right\}+Mz=0,(x,t)\in\Omega\times\left(t_0,t_0+\omega\right]\\ z(x,t)\big|_{\partial\Omega}=0,\\ z(x,t_0)=\Psi(x).\end{cases}$$

由于 $\left(a(x,t)-\int_{\Omega}K_1(\xi,t)u^2(\xi,t-\tau_1)\mathrm{d}\xi-\int_{\Omega}K_2(\xi,t)v^2(\xi,t-\tau_2)\mathrm{d}\xi\right)\in L^{\infty}(Q_{\omega})$，我们可以选择足够大 M，且通过比较原理可知，$u_{\varepsilon}(x,t)\ge z(x,t),\forall(x,t)\in\Omega\times[t_0,t_0+\omega]$。根据极大值原理有，$z(x,t)>0,\forall(x,t)\in\Omega\times[t_0,t_0+\omega]$。因此，$u_{\varepsilon}(x,t)>0,\forall(x,t)\in Q_{\omega}$。同理可知，当 $v_{\varepsilon}\ne 0$ 时，有 $v_{\varepsilon}(x,t)>0$。

引理 3.2：[10]令 $\Phi(t)$ 为区间 $[k_0,+\infty)$ 上一个非负的和非递增的函数，满足

$$\Phi(h)\le\left(\frac{M}{h-k}\right)^{\alpha}\left[\Phi(k)\right]^{\beta},\forall h>k\ge k_0$$

其中 $M>0$，$\alpha>0$，$\beta>1$。则 $\Phi(k_0+d)=0$ 且 $d=2^{\frac{\beta}{\beta-1}}M\left[\Phi(k_0)\right]^{\frac{\beta-1}{\alpha}}$。

引理 3.3：若 $(u_{\varepsilon},v_{\varepsilon})$ 是 $(u_{\varepsilon},v_{\varepsilon})=G_{\varepsilon}\left(1,f(u_{\varepsilon},v_{\varepsilon}),g(u_{\varepsilon},v_{\varepsilon})\right)$ 的解，则存在一个不依赖于 $\sigma\in[0,1]$ 和 ε 的正常数 R。使得 $\max\left\{\|u_{\varepsilon}\|_{L^{\infty}(Q_{\omega})},\|v_{\varepsilon}\|_{L^{\infty}(Q_{\omega})}\right\}\le R$。

证明：由引理 3.1 可知 $u_{\varepsilon}>0$，$v_{\varepsilon}>0$。再令 $L_{\varepsilon}^{m,p,r}[u]$ 为

$$L_{\varepsilon}^{m,p,r}[u]=u^{p-1}\left(a(x,t)-\int_{\Omega}K_1(\xi,t)u^2(\xi,t-\tau_1)\mathrm{d}\xi-\int_{\Omega}K_2(\xi,t)v^2(\xi,t-\tau_2)\mathrm{d}\xi\right)+\varepsilon$$

对上式两边同乘 u_{ε}^{m} 再在区间 Ω 上积分可得

$$\frac{1}{m+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_{\varepsilon}\|_{m+1}^{m+1}+\int_{\Omega}|u_{\varepsilon}|^{r}\left|\nabla u_{\varepsilon}^{m}\right|^{p}\mathrm{d}x\le\|a\|_{L^{\infty}(Q_{\omega})}\|u_{\varepsilon}\|_{m+p+1}^{m+p+1}+\varepsilon\|u\|_{m}^{m}.$$

由 Poincare 不等式及 Young 不等式可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{m+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_{\varepsilon}\|_{m+1}^{m+1}+\mu_p|\Omega|^{\frac{1-r-m(p-1)}{m+1}}\|u_{\varepsilon}\|_{m+1}^{mp+r}\\&\le\|a\|_{L^{\infty}(Q_{\omega})}\|u_{\varepsilon}(t)\|_{m+p-1}^{m+p-1}+\varepsilon\|u_{\varepsilon}\|_{m}^{m}\\&\le\|a\|_{L^{\infty}(Q_{\omega})}|\Omega|^{\frac{2-p}{m+1}}\|u_{\varepsilon}(t)\|_{m+1}^{m+p-1}+\varepsilon|\Omega|^{\frac{1}{m+1}}\|u_{\varepsilon}\|_{m+1}^{m}.\end{aligned}$$

利用 u_{ε} 关于时间 t 的周期性，存在一个 $t_0\in[0,\omega]$，使得

$$\int_{\Omega}u_{\varepsilon}^{m+1}(t_0)\mathrm{d}x=\sup_{t\in[0,\omega]}\|u_{\varepsilon}\|_{m+1}^{m+1},$$

且有

$$\sup_{t\in[0,\omega]}\|u_{\varepsilon}(t)\|_{m+1}\le\left(\frac{\|a\|_{L^{\infty}(Q_{\omega})}}{\mu_p}\right)^{\frac{1}{mp+r-m-p+1}}|\Omega|^{\frac{1}{m+1}}+h(\varepsilon),$$

其中函数 $h(\varepsilon)$ 满足 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}h(\varepsilon)=0$。特别地，可知有

$$\sup_{t\in[0,\omega]}\|u_{\varepsilon}(t)\|_{2}\le\left(\frac{\|a\|_{L^{\infty}(Q_{\omega})}}{\mu_p}\right)^{\frac{1}{mp+r-m-p+1}}|\Omega|^{\frac{1}{2}}+h(\varepsilon)|\Omega|^{\frac{m-1}{2(m+1)}},$$

利用[1]中的类似方法可知，对于任何 $j>0$，存在一个常数 C_j，只依赖于 j,m,p 和 $\|a\|_{L^\infty(Q_\omega)}$ 使得

$$\sup_{t\in[0,\omega]}\|u_\varepsilon(t)\|_j \le C_j.$$

接下来，可以利用 DeGiorgis 迭代来证明(3.11)。事实上，用(3.12)乘以 $(u_\varepsilon-k)_+^j\chi_{[t_1,t_2]}(t),\forall k\ge 1$，其中 $\chi_{[t_1,t_2]}(t)$ 是区间 $[t_1,t_2]$ 的特征函数，并将结果对 Q_ω 进行积分，则有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{j+1}\int_{t_2}^{t_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega(u_\varepsilon-k)_+^{j+1}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_{t_2}^{t_1}\int_\Omega(u_\varepsilon-k)_+^j|u|^r\left|\nabla u^m\right|^{p-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&\le\|a\|_{L^\infty(Q_\omega)}\int_{t_2}^{t_1}\int_\Omega u_\varepsilon^{p-1}(u_\varepsilon-k)_+^j\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\varepsilon\int_{t_2}^{t_1}\int_\Omega(u_\varepsilon-k)_+^j\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

因此，类似[9]中定理 2.2 的证明方法，利用 Sobolev 嵌入定理、Young 不等式和引理 3.2，可知 $\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(Q_\omega)}\le R$，且 R 不依赖于 ε 和 σ。同理可知，$\|v_\varepsilon\|_{L^\infty(Q_\omega)}\le R$，由此引理得证。

利用文献[10]中的方法，可以证明下述引理 3.4 与引理 3.5 成立。

引理 3.4： 映射 $(u,v)\mapsto G_\varepsilon(1,f(u,v),g(u,v))$ 存在至少一个不动点 $(u_\varepsilon,v_\varepsilon)$，有 $u_\varepsilon,v_\varepsilon\ge 0$。

引理 3.5： 假设定理 2.2 中的假设(2.7)和(2.8)成立。则存在正常数 ε_0 和 r_0，使得对于映射

$$(u,v)\mapsto G_\varepsilon(1,f(u,v),g(u,v))$$

上的任意一个不动点 $(u_\varepsilon,v_\varepsilon)$ 存在下列不等式 $\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(Q_\omega)}\ge r_0,\|v_\varepsilon\|_{L^\infty(Q_\omega)}\ge r_0$。

定理 2.2 的证明

结合上述引理 3.1~3.5，类似文献[10]中的方法，通过对上述正则性问题 $(u_\varepsilon,v_\varepsilon)$ 中的 ε 取极限，由此可以证明定理 2.2 成立。

基金项目

国家自然科学基金资助项目(11671085)；福建省自然科学基金资助项目(2020J01160)。

参考文献

[1] Fragnelli, G., Mugnai, D., Nistri, P. and Papini, D. (2015) Non-Trivial Non-Negative Periodic Solutions of a System of Singular-Degenerate Parabolic Equations with Nonlocal Terms. *Communications in Contemporary Mathematics*, **17**, 1450025. https://doi.org/10.1142/S0219199714500254

[2] Du, Y. (1996) Positive Periodic Solutions of a Competitor-Competitor-Mutualist Model. *Differential and Integral Equations*, **9**, 1043-1066.

[3] Hess, P. (1991) Periodic-Parabolic Boundary Value Problems and Positivity. Pitman Research Notes in Mathematics.

[4] Pao, C.V. (2000) Periodic Solutions of Parabolic Systems with Time Delays. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **251**, 251-263. https://doi.org/10.1006/jmaa.2000.7045

[5] Tian, C. and Lin, Z. (2010) Asymptotic Behavior of Solutions of a Periodic Diffusion System of Plankton Allelopathy. *Nonlinear Analysis*: *Real World Applications*, **11**, 1581-1588. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2009.03.012

[6] Tineo, A. (1994) Asymptotic Behavior of Solutions of a Periodic Reaction-Diffusion System of a Competitor Competitor Mutualist Model. *Journal of Differential Equations*, **108**, 326-341. https://doi.org/10.1006/jdeq.1994.1037

[7] Suárez, A. (2004) Nonnegative Solutions for a Heterogeneous Degenerate Competition Model. *The ANZIAM Journal*, **46**, 273-297. https://doi.org/10.1017/S1446181100013845

[8] Fragnelli, G. (2010) Positive Periodic Solutions for a System of Anisotropic Parabolic Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **367**, 204-228. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2009.12.039

[9] Yin, J. and Jin, C. (2010) Periodic Solutions of the Evolutionary P-Laplacian with Nonlinear Sources. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **368**, 604-622. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2010.03.006

[10] Wang, Y.F., Yin, J.X. and Ke, Y.Y. (2017) Coexistence Solutions for a Periodic Competition Model with Singular-Degenerate Diffusion. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, **60**, 1065-1075. https://doi.org/10.1017/S001309151600033X