Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(9), 1527-1535
Published Online September 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.129166

点态化完备代数正规类中的几乎幂零代数类

杨宗文，娄本功

云南大学数学系，云南 昆明

收稿日期：2022年8月23日；录用日期：2022年9月22日；发布日期：2022年9月29日

摘　要

环及其它代数系统的根理论已经有了丰富的研究，Puczylowski建立了一般代数正规类的根理论。本文研究点态化完备代数正规类中的几乎幂零代数类α及其确定的下根性质$\mathrm{L}(\alpha)$，讨论了无非零几乎幂零理想代数类$T=\{a\in\mathscr{A}\mid a\text{没有非0几乎幂零理想}\}$确定的上根性质$\mathrm{U}T$，证明了$\mathrm{L}(\alpha)=\mathrm{U}T$。

关键词

点态化完备代数正规类，几乎幂零代数，下根，上根，超幂零根

The Almost Nilpotent Classes in Normal Classes of Complete Pointwise Alagebras

Zongwen Yang, Bengong Lou

Department of Mathematics, Yunnan University, Kunming Yunnan

Received: Aug. 23rd, 2022; accepted: Sep. 22nd, 2022; published: Sep. 29th, 2022

Abstract

The radicals of rings and other various algebraic structures have been researched very much. Puczylowski established the general theory of radicals of the objects called algebras. In this paper, we study the almost nilpotent algebras α in the normal classes of pointwise complete algebras and the properties of the lower radical $\mathrm{L}(\alpha)$ determined by α. We discuss the properties of the upper radical $\mathrm{U}T$ determined by the class $T=\{a\in\mathscr{A}\mid a\text{ has not nonzero almost ideals}\}$ of algebras without nonzero almost nilpotent ideals and prove that $\mathrm{L}(\alpha)=\mathrm{U}T$.

文章引用: 杨宗文, 娄本功. 点态化完备代数正规类中的几乎幂零代数类[J]. 理论数学, 2022, 12(9): 1527-1535.
DOI: 10.12677/pm.2022.129166

Keywords

Normal Classes of Complete Pointwise Algebras, Almost Nilpotent Algebras, Lower Radical, Upper Radical, Supernilpotent Radicals

1. 引言

环及其它代数系统根理论的统一研究促使一般代数正规类根理论的建立[1]-[15]，为了进一步统一地研究一般代数正规类中根性质，文献[16]-[23]分别引入了可积代数正规类、完备代数正规类，对特殊根等进行了研究，并对一类特殊的半环——大半环(可做单侧减法的半环)建立了相应的根理论；文献[24] [25] [26] [27]对完备代数正规类进行了点态化，研究了点态化完备代数正规类中的亚直既约代数类确定的上根——反单根、遗传幂等根、补根、对偶根、子幂等根、诣零根、λ-根、正则根、κ-根和 β-根的结构性质，文献[28]使用预根概念给出了根类的一个映射刻画，文献[29]定义了点态化完备代数正规类中的低幂等根，证明了 Boolean 根 β 、正则根 ν 、遗传幂等根 χ 、λ-根 λ 、幂等代数根 ι 都是低幂等根，并且这 5 个低幂等根满足 $\beta \le \nu \le \chi \le \lambda \le \iota$ ，文献[30]定义了点态化完备代数正规类中的小理想及小理想遗传根，讨论了小理想及根 R 和 R-半单类 S_R 与小理想相关的 2 个条件(*)与(**)的一些性质，进一步讨论了根 R 是一个小理想遗传根的 2 个条件，文献[31]定义了完备代数正规类中代数类 X 确定的基根类 $\mathrm{L}_b(X)$，讨论了基根类 $\mathrm{L}_b(X)$ 与代数类 X，下根 $\mathrm{L}(X)$ 之间的关系。

本文在文献[24]-[31]建立的点态化完备代数正规类基础上，定义了几乎幂零代数、几乎幂零代数类 α 及无非 0 几乎幂零理想代数类 T，讨论了几乎幂零代数类 α 确定的下根及无非 0 几乎幂零理想代数类 T 确定的上根性质。论文第 2 节给出了点态化完备代数正规类相关的概念及基本引理；论文第 3 节定义了几乎幂零代数、几乎幂零代数类 α 及无非 0 几乎幂零理想代数类 T，讨论了完备代数正规类中几乎幂零代数类 α 确定的下根及无非 0 几乎幂零理想代数类 T 确定的上根性质。

2. 预备知识及基本引理

点态化完备代数正规类的相关概念及性质参见文献[24]-[31]，为了建立每个代数的子代数乘积与 S_a 中点乘积之间的联系，本文使用文献[26] [27]中强化了的点乘积公理。

设 $\mathscr{A}$ 是一个完备代数正规类，设 X 是完备代数正规类 $\mathscr{A}$ 的子类，文献[15] [16]给出了可积代数正规类的子类 $X \subseteq \mathscr{A}$ 上的如下算子：

$$uX = \{a \in \mathscr{A} \mid \forall i \lhd a, i \ne a, \text{有}\ a/i \notin X\},$$

$$sX = \{a \in \mathscr{A} \mid \forall 0 \ne i \lhd a, \text{有}\ i \notin X\},$$

$$hX = \{a \in \mathscr{A} \mid \text{存在}\ b \in X, i \lhd b, \text{使得}\ a \sim b/i\},$$

$$eX = \{a \in \mathscr{A} \mid \text{存在}\ i \lhd a, i \in X, \text{使得}\ a/i \in X\},$$

$$(X) = \{a \in \mathscr{A} \mid \text{存在}\ i \lhd a, a/i \in X\},$$

$$X_\lambda = \{a \in \mathscr{A} \mid \text{存在}\ i \lhd_s a, 0 \ne i \in X\}。$$

从而，

$$usX=\left\{a\in\mathscr{A}\mid a\text{的非}0\text{同态像}\,b=a/i\,\text{都有非}0\text{理想}\,j/i\in X\right\},$$

$$suX=\left\{a\in\mathscr{A}\mid a\text{的非}0\text{理想}\,i\,\text{都有非}0\text{同态像}\,i/j\in X\right\}。$$

进一步，$\forall a\in\mathscr{A}$，引入记号：

$$A_a=\left\{i,\text{存在}\,i=i_0\le i_1\le i_2\le\cdots\le i_n=a,i_k\lhd i_{k+1},k=0,1,\cdots,n-1\right\}。$$

uX 是非 0 同态像都不在 X 中的代数全体，sX 是非 0 理想都不在 X 中的代数全体，usX 是非 0 同态像都有非 0 理想在 X 中的代数全体，suX 是非 0 理想都有非 0 同态像在 X 中的代数全体，A_a 是代数 a 的所有可达子代数全体。

对 $\mathscr{A}$ 的子类 X，文献[12] [13] [15]分别建立了代数正规类中下根及上根的构造。

对于序 λ，如果 $\lambda=1$，定义

$$X_1=hX=\left\{a\in\mathscr{A}\mid \text{存在}\,b\in X,i\lhd b,\text{使得}\,a\sim b/i\right\},$$

$$X_2=usX_1=\left\{a\in\mathscr{A}\mid a\text{的非}0\text{同态像有非}0\ X_1\text{-理想}\right\};$$

如果 $\lambda\ne1$ 不是极限序，$X_{\lambda-1}$ 已定义，则

$$X_\lambda=\left\{a\in\mathscr{A}\mid a\text{的非}0\text{同态像有非}0\ X_{\lambda-1}\text{-理想}\right\}=usX_{\lambda-1};$$

如果 $\lambda\ne1$ 是极限序，则 $X_\lambda=\bigcup\limits_{\gamma<\lambda}X_\gamma$。

则 $\mathrm{L}(X)=\bigcup X_\lambda$ 是一个根类，称 X 确定的下根。下根 $\mathrm{L}(X)$ 是使得 X 中代数都是根代数的最小的根。

注 1 $\forall\lambda$，$0\in X_\lambda$。

令 $\bar{X}=\left\{a\in\mathscr{A}\mid \text{存在}\,b\in X,\text{使得}\,a\in A_b\right\}=\bigcup\limits_{a\in X}A_a$，即 $\bar{X}$ 是 X 中代数的可达子代数全体构成的代数类(即 $\bar{X}$ 是包含 X 的最小的理想封闭类)，

$$\bar{\bar{X}}=\left\{a\in\mathscr{A}\mid a\text{的非}0\text{理想}\,i\,\text{都有非}0\text{同态像}\,i/j\in\bar{X}\right\}=su\bar{X},$$

则

$$\mathrm{U}X=\left\{a\in\mathscr{A}\mid\forall i\lhd a,0\ne a/i\notin\bar{\bar{X}}\right\}$$

是一个根类，称 X 确定的上根。上根 $\mathrm{U}X$ 是使得 X 中代数都是半单代数的最大的根类且 $\bar{\bar{X}}$ 为上根 $\mathrm{U}X$ 的半单类 $\mathrm{P}(\mathrm{U}X)$。

显然 $X\subseteq\bar{X}\subseteq\bar{\bar{X}}$。

引理 2.1： 1) X 是 $\mathscr{A}$ 的一个子类，则 $X\subseteq X_1$ 且 X_1 同态闭。

2) X 是 $\mathscr{A}$ 的一个同态闭子类，则 $X=X_1=hX$。

3) X 是 $\mathscr{A}$ 的一个子类，对任意序 $\lambda\ne1$，λ 不是极限序，则 $X_{\lambda-1}\subseteq X_\lambda$ 且 X_λ 同态闭。

4) X 是 $\mathscr{A}$ 的一个子类，对任意 2 个序 γ,λ，如果 $\gamma<\lambda$，则 $X_\gamma\subseteq X_\lambda$ 且 X_λ 同态闭。

证明： 1) $\forall a\in X$，$X_1=hX=\left\{a\in\mathscr{A}\mid \text{存在}\,b\in X,i\lhd b,\text{使得}\,a\sim b/i\right\}$。取 $i=0$，则 $a\sim a/i$，从而 $a\in X_1$，即 $X\subseteq X_1$。

$\forall a\in X_1$，$i\lhd a$，则存在 $b\in X$，$j\lhd b$，$a\sim b/j$。如果 $a/i=0$，则 $a/i=0\in X_1$。如果 $a/i\ne0$，因为 $a\sim b/j$，则存在 $k\lhd b$，$j\le k$，$i=k/j$，故 $a/i=(b/j)/(k/j)\sim b/k$，从而 $a/i\in X_1$。总之，X_1 同态闭。

2) $\forall a\in X_1$，则存在 $b\in X$，$i\lhd b$，$a\sim b/i$。因为 X 是 $\mathscr{A}$ 的一个同态闭子类，故 $a\sim b\in X$，即 $X_1\subseteq X$。再由 1)，有 $X=X_1$。

3) $X_2 = usX_1 = \{a \in \mathscr{A} \mid a\text{的非0同态像有非0 } X_1\text{-理想}\}$，$\forall a \in X_1$，$i \lhd a$，$a/i \neq 0$，由于 X_1 同态闭，故 a/i 也有非零同态像 $a/i \in X_1$，从而 $a \in X_2$，即 $X_1 \subseteq X_2$。

$\forall a \in X_2$，$i \lhd a$。如果 $a/i = 0$，则 $a/i \in X_2$。如果 $a/i \neq 0$，考虑 a/i 的非零同态像 $(a/i)/(k/i)$ （$k \lhd a$），则有 $0 \neq (a/i)/(k/i) \sim a/k \in X_1$，从而 $a/i \in X_2$。综上，X_2 同态闭。

对序 $\lambda > 2$，λ 不是极限序，存在 $\lambda - 1 > 1$，$X_{\lambda-1}$ 同态闭。$\forall a \in X_{\lambda-1}$，$i \lhd a$，如果 $a/i \neq 0$，由于 $X_{\lambda-1}$ 同态闭，故 a/i 也有非零同态像 $a/i \in X_{\lambda-1}$，从而 $a \in X_\lambda$，即 $X_{\lambda-1} \subseteq X_\lambda$。

$\forall a \in X_\lambda$，$i \lhd a$。如果 $a/i = 0$，则 $a/i \in X_\lambda$。如果 $a/i \neq 0$，考虑 a/i 的非零同态像 $(a/i)/(k/i)$ （$k \lhd a$），则有 $0 \neq (a/i)/(k/i) \sim a/k \in X_{\lambda-1}$，从而 $a/i \in X_\lambda$。综上，X_λ 同态闭。

4) X 是 $\mathscr{A}$ 的一个子类，对任意 2 个序 γ, λ，$\gamma < \lambda$，对 γ 用超限归纳法。

$\lambda = 2$，$\gamma = 1$时由 3)知 $X_\gamma \subseteq X_\lambda$ 且 X_λ 同态闭。

设 $\lambda < \theta$ 时都有 $X_\gamma \subseteq X_\lambda$ 且 X_λ 同态闭，考虑 $\lambda = \theta$。

当 $\lambda = \theta$ 不是极限序，则有 $\gamma \leq \lambda - 1 < \lambda$，因此由归纳假设有 $X_\gamma \subseteq X_{\lambda-1} \subseteq X_\lambda$ 且 $X_{\lambda-1}$ 同态闭，从而由 3)知 $X_\gamma \subseteq X_\lambda$。当 $\lambda = \theta$ 是极限序，则 $X_\gamma \subseteq \vee_{\iota<\lambda} X_\iota = X_\lambda$。$\forall a \in X_\lambda$，$i \lhd a$，则存在 $\iota < \lambda$，$a \in X_\iota$，由于 X_ι 同态闭，从而 $a/i \in X_\iota \subseteq X_\lambda$。综上，对任意 2 个序 γ, λ $\gamma < \lambda$，X_λ 同态闭。

综上，由超限归纳法知：对任意 $\gamma < \lambda$，有 $X_\gamma \subseteq X_\lambda$ 且 X_λ 同态闭。证毕。

注 2 由引理 2.1 知对任意 $\gamma < \lambda$，有 $X_\gamma \subseteq X_\lambda$，$X \subseteq X_\lambda$ 且 X_λ 同态闭；X_1 是包含 X 的最小的理想封闭类。

由定义显然有：

引理 2.2： X 是 $\mathscr{A}$ 的一个子类，X 理想闭，则 $\bar{X} = X$ 且 $\mathrm{P}(\mathrm{U}X) = \bar{\bar{X}} = suX$。

$\mathscr{A}$ 是一个完备代数正规类，X 是 $\mathscr{A}$ 的子类，定义：

$$\mathrm{L}_b(X) = \{a \in \mathscr{A} \mid a\text{的非0同态像有非0 } X\text{-可达子代数}\}。$$

引理 2.3 [31]： $X \subseteq \mathscr{A}$ 是一个代数类，则 $\mathrm{L}_b(X)$ 是一个根类。

引理 2.4 [31]： $X \subseteq \mathscr{A}$ 是一个同态闭类，则 $\mathrm{L}_b(X) = \mathrm{L}(X)$。

对 $\mathscr{A}$ 的任意子类 X，$\mathrm{L}_b(X)$ 是一个根类，称为是由 X 确定的基根[31]。$\mathrm{L}_b(X)$ 与 X 的关系不确定，$\mathrm{L}_b(X) \cap X = 0$，$\mathrm{L}_b(X) \cap X = X$ 及 $\mathrm{L}_b(X) \cap X \neq 0$，$X$ 都可能成立，故通常 $\mathrm{L}_b(X)$ 与 $\mathrm{L}(X)$ 不一定相同。$\mathrm{L}_b(X)$ 与 $\mathrm{L}(X)$ 的关系也不确定，但是当 X 是一个同态闭类，则 $\mathrm{L}_b(X)$ 与 $\mathrm{L}(X)$ 相同。

结合环类(相对于子环类、左理想类、右理想类及理想类关于集合包含关系“$\subseteq$”构成的完备格及相应的乘积)是完备代数正规类。由完备代数正规类乘积公理可保证环中理想、左右理想乘积相关的运算性质在完备代数正规类中皆成立。

引理 2.5 [15]： $\mathscr{A}$ 是一个完备代数正规类，$\forall a \in \mathscr{A}$，$i \lhd a$，$k \lhd i$，$\bar{k}$ 是 a 的包含 k 的最小理想。则 $\bar{k} = k \vee ak \vee ka \vee aka$，且 $\bar{k}^3 \leq k$。

定义 2.6 [21]： $\forall \mathrm{K} \subseteq \mathscr{A}$，称 K 是一个弱特殊类，如果 K 满足以下 3 条：

1) $\forall a \in \mathrm{K}$，a 中无非 0 幂零理想；

2) $\forall a \in \mathrm{K}$，$i \lhd a$，则 $i \in \mathrm{K}$；

3) $\forall a \in \mathscr{A}$，$i \lhd a$，$i \in \mathrm{K}$，$i^* = 0$，则 $a \in \mathrm{K}$。

定义 2.7 [21]： 设 S 为 $\mathscr{A}$ 中的一个根类。如果 S 满足以下 2 条，则称根类 S 是一个超幂零根：

1) S 是遗传根；

2) $\forall a \in \mathscr{A}$，如果 a 是幂零代数，则 $a \in \mathrm{S}$。

引理 2.8 [21]： 设 S 为 $\mathscr{A}$ 中的一个根类。S 是一个超幂零根 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{S} = \mathrm{UK}$，K 是一个弱特殊类。

3. 点态化完备代数正规类中的几乎幂零代数类及无非 0 几乎幂零理想代数类

$\mathscr{A}$ 是一个点态化完备代数正规类。

定义 3.1 [21]：1) $\forall a \in \mathscr{A}$，$p \lhd a$，如果 $\forall i, j \lhd a$，$ij \le p$ 可推出 $i \le p$ 或者 $j \le p$，则称 p 是 a 的一个素理想；

2) $\forall a \in \mathscr{A}$，如果 0 是 a 的一个素理想，则称 a 是一个素代数；

3) $\forall a \in \mathscr{A}$，$p \lhd a$，如果 $\forall i \lhd a$，$i^2 \le p$ 可推出 $i \le p$，则称 p 是 a 的一个半素理想；

4) $\forall a \in \mathscr{A}$，如果 0 是 a 的一个半素理想，则称 a 是一个半素代数；

5) $\forall a \in \mathscr{A}$，如果存在正整数 n，使 $a^n = 0$，则称 a 是幂零代数；$\forall a \in \mathscr{A}$，$i \lhd a$，如果存在正整数 n，使 $i^n = 0$，则称 i 是 a 的幂零理想；

定义 3.2：1) $\forall a \in \mathscr{A}$，如果 $\forall 0 \ne i \lhd a$ ($0 \ne i \lhd_l a$ 或 $0 \ne i \lhd_r a$)，都存在正整数 n，使得 $a^n \le i$，则称 a 是一个几乎幂零代数(左几乎幂零代数或右几乎幂零代数)；

2) $\forall a \in \mathscr{A}$，如果 $\forall 0 \ne s \le a$，都存在正整数 n，使 $a^n \le s$，则称 a 是一个子代数几乎幂零代数；

3) $\forall a \in \mathscr{A}$，如果 $\forall i \lhd a$ ($i \lhd_l a$ 或 $i \lhd_r a$)，且 i 本身是几乎幂零代数，则称 i 是 a 的一个几乎幂零理想(几乎幂零左理想或几乎右幂零理想)；

4) $\forall a \in \mathscr{A}$，如果 $\forall 0 \ne s \le a$，且 s 本身是几乎幂零代数，则称 s 是 a 的一个几乎子代数；

所有几乎幂零代数、左几乎幂零代数、右几乎幂零代数及子代数几乎幂零代数构成的代数类分别称几乎幂零代数类、左几乎幂零代数类、右几乎幂零代数类理想闭及子代数几乎幂零代数类，分别记为 α，α_l，α_r，α_s。

注 3 1)幂零代数都是几乎幂零代数，但幂等非 0 单代数是非 0 的几乎幂零代数，故几乎幂零代数类 α 是包含幂零代数类，但比幂零代数类更大的代数类。

2) $\alpha_s \subseteq \alpha_l \subseteq \alpha$，$\alpha_s \subseteq \alpha_r \subseteq \alpha$。

3) $\forall a \in \mathscr{A}$，$a$ 是一个几乎幂零代数，则 $\forall 0 \ne i \lhd a$，a/i 都是幂零代数。

下面研究几乎幂零代数类 α 及其确定的上根。

引理 3.3：1) 几乎幂零代数类 α 理想闭；

2) α 是同态闭类。

证明：1) $\forall a \in \alpha$，任取 $i \lhd a$。

如果 $i = 0$，则 i 是幂零代数，从而是几乎幂零代数。

如果 $i \ne 0$，$\forall 0 \ne j \lhd i$，设 $\overline{j}$ 是 j 在 a 中生成的理想，则由引理 2.5 知 $\overline{j}^3 \le j$。因为 $0 \ne j \le \overline{j} \lhd a$，故存在正整数 n，使得 $a^n \le \overline{j}$，从而 $i^{3n} \le a^{3n} \le \overline{j}^3 \le j$，即 i 是几乎幂零代数。

综上，a 中的理想都是几乎幂零代数，即几乎幂零代数类 α 理想闭。

2) $\forall a \in \alpha$，任取 $i \lhd a$。

如果 $i = a$，则 $a/i = 0$ 是幂零代数，从而是几乎幂零代数。

如果 $i \ne a$，则 $a/i \ne 0$，$\forall 0 \ne j/i \lhd a/i$，则 $0 \ne j \lhd a$，故存在正整数 n，使得 $a^n \le j$，从而 $(a/i)^n \le (a^n \vee i)/i \le (j \vee i)/i = j/i$，即 a/i 是几乎幂零代数；

综上，a 的同态像都是几乎幂零代数，即几乎幂零代数类 α 同态闭。证毕。

引理 3.4：$\forall a \in \alpha$，a 是几乎幂零代数，则：a 是幂零代数或者 a 是素几乎幂零代数。

证明：设 a 不是幂零代数，$\forall i, j \lhd a$，$ij = 0$。如果 $i \ne 0$，$j \ne 0$，因为 a 是几乎幂零代数，故存在正整数 m, n，使得 $a^m \le i$，$a^n \le j$，从而 $a^{m+n} = a^m a^n \le ij = 0$，即 a 是幂零代数，矛盾。故 $i = 0$ 或者 $j = 0$，即 a 是素几乎幂零代数。证毕。

由 a 理想闭、同态闭，且包含所有幂零代数，得

引理 3.5： $\alpha_2 = us\alpha = \{a \in \mathscr{A} \mid a\text{的非0同态像有非0几乎幂0理想}\}$ 是超幂零根。

引理 3.6： $\forall a \in \alpha$，a 是半素代数 $\Leftrightarrow$ a 无非 0 幂零理想。

证明：“$\Rightarrow$”$\forall i \lhd a$，如果存在正整数 m，使得，取 k 为使得 $i^m = 0$ 的最小正整数 m。则 $j = i^k \neq 0$，但 $j^2 = i^{2k} = 0$。因为 a 是半素代数，故 $j = 0$，矛盾。故 $\forall m > 0$，有 $i^m \neq 0$，即 a 中无非 0 幂零理想。

“$\Leftarrow$”a 中无非 0 幂零理想，$\forall i \lhd a$，如果 $i^2 = 0$，即 i 是 a 的幂零理想，故 $i = 0$，即 a 是是半素代数。证毕。

引理 3.7： $\mathrm{K} \subseteq \mathscr{A}$ 是一个半素代数类，则以下 3 条等价：

1) $\forall i \lhd a$，$i \in \mathrm{K}$，$i^* = 0$，则 $a \in \mathrm{K}$；

2) $\forall i \lhd \cdot a$，$i \in \mathrm{K}$ 且 $a/i \in \mathrm{K}$，则 $a \in \mathrm{K}$ (即 K 本质扩张闭)；

3) $\forall i \lhd a$，$i \in \mathrm{K}$，则 $a/i^* \in \mathrm{K}$。

证明： 1) $\Rightarrow$ 2) $i \lhd \cdot a$，$i \in \mathrm{K}$ 且 $a/i \in \mathrm{K}$，因为 $\left(i \wedge i^*\right)^2 \le ii^* = 0$，$i \wedge i^* \lhd i$，$i \in \mathrm{K}$ 是一个半素代数，故 $i \wedge i^* = 0$。由 $i \lhd \cdot a$ 得 $i^* = 0$，从而由 1)得 $a \in \mathrm{K}$，即 2)成立。

2) $\Rightarrow$ 3) $\forall i \lhd a$，$i \in \mathrm{K}$，设 $l \lhd a$，且 $i \wedge l = 0$，则 $il \vee li \lhd a$ 且 $il \vee li \le i \wedge l = 0$，故 $l \le i^*$。因为 $\left(i \wedge i^*\right)^2 \le ii^* = 0$，$i \wedge i^* \lhd i \in \mathrm{K}$，所以 $i \wedge i^* = 0$，从而 i^* 是使得 $i \wedge l = 0$ 的 a 的最大理想 l，且 $i \sim i/(i \wedge l) \sim (i \vee l)/l \lhd a/l$。设 $i^* \le k \lhd a$，$i^* \neq k$，$0 \neq k/i^* \lhd a/i^*$。由 i^* 的最大性知 $i^* \le k$，$i^* \neq k$，从而 $i \wedge k \neq 0$，从而 $i \wedge k \not\le i^*$，所以 $0 \neq \left(i^* \vee (i \wedge k)\right)/i^* = \left(\left(i^* \vee i\right)/i^*\right) \wedge \left(\left(i^* \vee k\right)/i^*\right) = \left(\left(i^* \vee i\right)/i^*\right) \wedge \left(k/i^*\right)$，因此 $\left(i \vee i^*\right)/i^* \lhd \cdot a/i^*$。由 2)知 $a/i^* \in \mathrm{K}$，即 3)成立。

3) $\Rightarrow$ 1) $\forall a \in \mathscr{A}$，$i \lhd a$，$i \in \mathrm{K}$，$i^* = 0$，由 3)有 $a \sim a/i^* \in \mathrm{K}$，即 1)成立。证毕。

由引理 3.6，引理 3.7 得：

引理 3.8： $\forall \mathrm{K} \subseteq \mathscr{A}$，K 是一个弱特殊类 $\Leftrightarrow$ 是 K 满足以下 3 条：

1) $\forall a \in \mathrm{K}$，a 是半素代数；

2) $\forall a \in \mathrm{K}$，$i \lhd a$，则 $i \in \mathrm{K}$；

3) $\forall i \lhd a$，$i \in \mathrm{K}$，$i^* = 0$，则 $a \in \mathrm{K}$。

引理 3.9： $\forall \mathrm{K} \subseteq \mathscr{A}$，K 是一个弱特殊类 $\Leftrightarrow$ K 满足以下 3 条：

1) $\forall a \in \mathrm{K}$，a 是半素代数；

2) $\forall a \in \mathrm{K}$，$i \lhd a$，则 $i \in \mathrm{K}$；

3) $\forall i \lhd \cdot a$，$i \in \mathrm{K}$ 且 $a/i \in \mathrm{K}$，则 $a \in \mathrm{K}$ (即 K 本质扩张闭)。

注意到几乎幂零代数类 α 理想闭、同态闭，从而下根 $\mathrm{L}(\alpha) = \mathrm{L}_b(\alpha)$ 是一个超幂零根，称几乎幂零代数根。显然有 Bears 根 $\mathbf{B} \le$ 几乎幂零代数 $\mathrm{L}(\alpha)$。

设 $T = \{a \in \mathscr{A} \mid a\text{没有非0几乎幂零理想}\}$，则：

定理 3.10： T 是弱特殊类。

证明： 1) $\forall a \in T$，设 $i \lhd a$，$i^2 = 0$，则 i 是 a 的幂零理想，从而是几乎幂零理想。由于 $a \in T$ 没有非 0 幂零理想，故 $i = 0$，所以 a 是半素代数；

2) $\forall a \in T$，设 $0 \neq i \lhd a$。设 j 是 i 的非 0 几乎幂零理想，设 $\bar{j}$ 是 j 在 a 中生成的理想，则 $0 \neq \bar{j}^3 \le j$ (因为 a 无非 0 幂零理想)。$\forall 0 \neq k \lhd \bar{j}$，如果 $k \wedge j = 0$，则 $k \wedge \bar{j}^3 \le k \wedge j = 0$，所以 $\left(k\bar{j}\right)^3 \le k\bar{j}^3 = 0$。如果 $k\bar{j} \neq 0$，则 $l = k\bar{j} \neq 0$ 是 $\bar{j}$ 的幂零理想且 $l^3 = 0$。设 $\bar{l}$ 是 l 在 a 中生成的理想，则 $\bar{l}^3 \le l$，进而 $\bar{l}^9 \le l^3 = 0$，即 $\bar{l}$ 是 a 的非 0 幂零理想，与 $a \in \beta$ 矛盾，因此 $k\bar{j} = 0$。进而 $k^2 \le k\bar{j} = 0$，即 k 是 $\bar{j}$ 的非 0 幂零理想，设 $\bar{k}$ 是 k 在 a 中生成的理想，则 $\bar{k}^3 \le k$，进而 $\bar{k}^6 \le k^2 = 0$，即 $\bar{k}$ 是 a 的非 0 幂零理想，与 $a \in T$ 矛盾，因此 $k \wedge j \neq 0$。

因为$k\wedge j\neq 0$，j 是 i 的几乎幂零理想，$0\neq k\wedge j\lhd j$，故存在正整数 n，使得$j^n\leq k\wedge j$，从而$\overline{j}^{3n}\leq j^n\leq k\wedge j\leq k$，即$\forall 0\neq k\lhd\overline{j}$，都存在正整数$m=3n$，使得$\overline{j}^m\leq k$，故$\overline{j}$是$a$的非0几乎幂零理想，与$a\in T$矛盾，因此$i$没有非0几乎幂零理想，从而$i\in T$，即$T$对理想封闭。

3) $\forall i\lhd a$，$i\in T$，$i^*=0$。设j是a的非0几乎幂零理想，如果$i\wedge j=0$，则$ij,ji\leq i\wedge j=0$，从而$ij\leq i^*=0$，与j是a的非0几乎幂零理想矛盾，所以$i\wedge j\neq 0$且是a的非0几乎幂零理想。设$k\lhd i\wedge j$且$k\neq i\wedge j$。设$\overline{k}$是k在j中生成的理想，则$0\neq\overline{k}^3\leq k$。因为$k\lhd i\wedge j\lhd j$，故$\overline{k}$也是$j$的几乎幂零理想，故存在正整数$n$，使得$j^n\leq\overline{k}$，进而$(i\wedge j)^{3n}\leq j^{3n}\leq\overline{k}^3\leq k$。由$k$的任意性知$i\wedge j$是$i$的非0几乎幂零理想，与$i\in T$矛盾。所以$a$没有非0几乎幂零理想，即$a\in T$。

综上，T是弱特殊类。证毕。

由定理3.9知，上根UT是超幂零根，进一步有：

定理3.11： $\mathrm{L}(\alpha)=\alpha_2=\mathrm{U}T$。

证明： $\overline{\overline{T}}=\{a\in\mathscr{A}\mid a\text{的非0理想}i\text{都有非0同态像}i/j\in T\}=suT$，则

$$\mathrm{U}T=\left\{a\in\mathscr{A}\mid\forall i\lhd a,0\neq a/i\notin\overline{\overline{T}}\right\},$$

$$\alpha_2=us\alpha=\{a\in\mathscr{A}\mid a\text{的非0同态像有非0}\,\alpha\text{-理想}\}。$$

$\forall a\in\mathrm{U}T=\left\{a\in\mathscr{A}\mid\forall i\lhd a,0\neq a/i\notin\overline{\overline{T}}\right\}$，如果$a\notin\alpha_2=us\alpha$，则存在$i\lhd a$，$0\neq a/i$没有非零$\alpha$-理想，即$a/i\in T\subseteq\overline{\overline{T}}$，所以$a\notin\mathrm{U}K$，矛盾，故$a\in\alpha_2\subseteq\mathrm{L}(\alpha)$，从而$\mathrm{U}T\subseteq\mathrm{L}(\alpha)$。

反之，$\forall a\in\alpha$，则a是几乎幂零理想，α同态闭及理想闭，从而对a的任意理想i，$0\neq a/i$也是几乎幂零代数，a/i有理想a/i，a/i任意同态像$(a/i)/(k/i)(k\lhd a)$有$0\neq(a/i)/(k/i)\sim a/k$，从而$(a/i)/(k/i)\in\alpha$，因此$(a/i)/(k/i)\notin\overline{\overline{T}}$，即$a/i$的理想$a/i$的非0同态像$(a/i)/(k/i)\notin T$，从而$a/i\notin\overline{\overline{T}}$，即得$a$的非零同态像$0\neq a/i\notin\overline{\overline{T}}$，所以$a\in\mathrm{U}T$，因此$\alpha\subseteq UT$。又因为上根$UT$是根，下根$\mathrm{L}(\alpha)$是所有$\alpha$中代数是根代数的最小根，所以$\alpha_2\subseteq\mathrm{L}(\alpha)\subseteq UT$。

综上，$\mathrm{L}(\alpha)=\alpha_2=\mathrm{U}T$。证毕。

由文献[12] [15]及定理3.11，有：

推论3.12： $\forall a\in\mathscr{A}$，$\mathrm{L}(\alpha)(a)=\mathrm{U}T(a)=\wedge\{i\lhd a\mid a/i\text{没有非0几乎幂零理想}\}$；

$$\mathrm{a}/\mathrm{L}(\alpha)(a)=\mathrm{a}/\mathrm{U}T(a)=\sum\nolimits_s\{a/i\mid i\lhd a,a/i\text{没有非0几乎幂零理想}\}。$$

由引理3.3，引理3.3，引理2.1~引理2.4，有：

推论3.13： $\mathrm{L}(\alpha)=\mathrm{L}_b(\alpha)=UT$。

4. 小结

本文研究点态化完备代数正规类中的几乎幂零代数类α及其确定的下根性质$\mathrm{L}(\alpha)$，讨论了无非0幂零理想代数类$T=\{a\in\mathscr{A}\mid a\text{没有非0几乎幂零理想}\}$确定的上根性质$UT$，证明了$\mathrm{L}(\alpha)=\mathrm{L}_b(\alpha)=UT$。

基金项目

国家自然科学基金(11261067)。

参考文献

[1] Száse, F.A. (1981) Radicals of Rings. John Wiley & Sons, New York.

[2] Gardner, B.J. and Wiegandt, R. (2004) Radical Theory of Rings. Marcel Dekker, Inc., New York and Basel. http://ecite.utas.edu.au/27037 https://doi.org/10.1201/9780203913352

[3] McDougall, R. (1999) A Generalisation of the Lower Radical Class. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, **59**, 139-146. https://doi.org/10.1017/S000497270003269X

[4] van Leeuwen, L.C.A. and Heyman, G.A.P. (1975) A Radical Determined by a Class of Almost Nilpotent Rings. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungarica*, **26**, 259-262. https://doi.org/10.1007/BF01902329

[5] Heyman, G.A.P., Jenkins, T.L. and Roux, H.J. (1982) Variations on Almost Nilpotent Rings, Their Radicals and Partitions. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungarica*, **39**, 11-15.

[6] Sands, A.D. (1985) On Almost Nilpotent Rings. *Acta Mathematica Hungarica*, **45**, 41-43. https://doi.org/10.1007/BF01955021

[7] Puczyłowski, E.R. (1986) A Note on Almost Nilpotent Rings. *Acta Mathematica Hungarica*, **48**, 289-291. https://doi.org/10.1007/BF01951354

[8] 梁治安. 关于几乎幂零环的一些结果[J]. 内蒙古大学学报(自然科学版), 1989, 20(4): 435-437.

[9] Heyman, G.A.P. (1990) On Almost Nilpotent Rings and Ideals. *Acta Mathematica Hungarica*, **56**, 283-285.

[10] 张宪君，靳庭良. 关于几乎幂零元环簇的若干结果及其根的模刻[J]. 齐齐哈尔师范学院学报(自然科学版), 1993, 13(2): 4-6.

[11] 靳廷良. 相对于根性质 R 的几乎幂零环类[J]. 河北师范大学学报(自然科学版), 1998, 22(2): 158-161.

[12] Puczylowski, E.R. (1993) On General Theory of Radicals. *Algebra Universalis*, **39**, 53-60. https://doi.org/10.1007/BF01196549

[13] Wang, Y. and Zhang, A.H. (2002) Radicals and Semi-Simple Classes of the Class of Algebras. *Journal of Anshan Normal University*, **4**, 5-10.

[14] 任艳丽，王尧. 代数正规类中的遗传根与强半单根[J]. 数学研究与评论, 2004, 24(4): 597-602.

[15] Yang, Z.W. (2006) The Upper Radical Classes of the Class of Algebras. *Journal of Yunnan University* (*Natural Sciences Edition*), **28**, 8-11.

[16] Yang, Z.W. and Pan, J.M. (2008) The Super Nilpotent Radical, Special Radical and Bear Radical in Normal Classes of Product Algebras. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, **32**, 181-192.

[17] Yang, Z.W. and Pan, J.M. (2010) The Radicals and Like-Modules in Normal Classes of Complete Algebras. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, **34**, 377-386.

[18] 杨宗文，杨柱元. 完备代数正规类的根与右理想[J]. 昆明理工大学学报(理工版), 2006, 31(3): 112-116, 120.

[19] 杨宗文，杨柱元. 子环的和与积[J]. 云南大学学报(自然科学版), 2007, 29(4): 335-338.

[20] 杨宗文，杨柱元，李友宝. 大半环子半环的和与积[J]. 昆明理工大学学报(理工版), 2007, 32(6): 113-118.

[21] 杨宗文，杨柱元，李友宝. 可积代数正规类中半素代数类及半素一致代数类确定的上根[J]. 数学理论与应用, 2008, 28(4): 71-75.

[22] Yang, Z.W., Yang, Z.Y. and Li, Y.B. (2010) The General Radicals Theory of the Big Semirings. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, **34**, 1149-1167.

[23] Yang, Z.W. and Yang, Z.Y. (2011) The Semihereditary and Semisupernilpotent Radicals in Normal Classes of Product Algebras. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, **35**, 891-902.

[24] 杨宗文，何青海. 点态化完备代数正规类中的亚直既约代数类[J]. 理论数学, 2018, 8(5): 546-554. https://doi.org/10.12677//pm.2018.85072

[25] 杨宗文，何青海. 点态化完备代数正规类中的遗传幂等根、补根、对偶根、子幂等根及诣零根[J]. 理论数学, 2018, 8(6): 712-722. https://doi.org/10.12677//pm.2018.86096

[26] 杨宗文，何青海. 点态化完备代数正规类中的 λ-根和正则根[J]. 理论数学, 2019, 9(7): 836-842. https://doi.org/10.12677/pm.2019.97109

[27] 杨宗文，何青海. 点态化完备代数正规类中的 Jacobson 代数和 Boolean 代数[J]. 理论数学, 2019, 9(9): 1009-1014. https://doi.org/10.12677/pm.2019.99127

[28] 杨宗文，娄本功. 点态化完备代数正规类中 Amitsur-Kurosh 根的映射刻画[J]. 理论数学, 2020, 10(12): 1138-1144. https://doi.org/10.12677/pm.2020.1012135

[29] 杨宗文，娄本功. 点态化完备代数正规类中的低幂等根[J]. 理论数学, 2021, 11(1): 1-6. https://doi.org/10.12677/pm.2021.111001

[30] 杨宗文，娄本功. 点态化完备代数正规类中的小理想[J]. 理论数学, 2021, 11(10): 1691-1695.

https://doi.org/10.12677/pm.2021.1110189

[31] 杨宗文, 娄本功. 完备代数正规类中的基根[J]. 理论数学, 2021, 11(12): 2012-2017. https://doi.org/10.12677/pm.2021.1112224