Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(10), 1615-1628
Published Online October 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.1210175

Hans汉斯

具有分数阶线性记忆的非经典反应扩散方程解的渐近性

马文慧，张　盈

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2022年9月11日；录用日期：2022年10月10日；发布日期：2022年10月18日

摘　要

研究了一类具有分数阶线性记忆的非经典反应扩散方程解的渐近性行为. 定义合适的 *Lyapunov* 泛函, 证明了当非线性项f 满足增长性条件, 记忆核g 呈指数衰减时, 系统的解是多项式衰减的; 随后, 应用半群理论, 证明了解是非指数稳定的.

关键词

非经典反应扩散方程，分数阶线性记忆，多项式衰减

The Asymptotic Behavior of Solutions for a Class of Nonclassical Reaction-Diffusion Equations with Fractional Linear Memory

Wenhui Ma, Ying Zhang

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Sep. 11th, 2022; accepted: Oct. 10th, 2022; published: Oct. 18th, 2022

文章引用: 马文慧, 张盈. 具有分数阶线性记忆的非经典反应扩散方程解的渐近性[J]. 理论数学, 2022, 12(10): 1615-1628. DOI: 10.12677/pm.2022.1210175

Abstract

The asymptotic behavior of solutions for a class of nonclassical reaction-diffusion equations with fractional linear memory is investigated. by defining an appropriate *Lyapunov* **functional, it is proved that the solution of the system decays polynomially when the nonlinear term** f **satisfies the growth condition and the memory kernel** g **decays exponentially. After that, we achieve that the solution is non-exponentially stable by means of the semigroup theory.**

Keywords

Non-Classical Reaction Diffusion Equations, Fractional Linear Memory, Polynomially Decay

1. 引言

考虑如下带分数阶线性记忆的非经典反应扩散方程解的渐近性:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u_t - \Delta u - (g*(-\Delta)^{\alpha}u)(t) + f(u) = h(x), & x\in\Omega,\ t>0, \\ u(x,t)=0, & x\in\partial\Omega,\ t\geq 0, \\ u(x,0)=u_0(x), & x\in\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

其中Ω 是$\mathbb{R}^n$ 中具有光滑边界$\partial\Omega$ 的有界开区域, $\alpha\in[0,1)$, $*$ 代表卷积运算, 非经典反应扩散方程是在经典的反应扩散方程中考虑了介质的粘弹性、压强等因素对系统的影响, 由 Aifantis 建立的, 见文献 [1,2], 它在非牛顿流体, 固体力学及热传导理论等领域有着广泛的应用. 问题 (1) 中的卷积项可以反映系统过去的状态对现在及未来状态的影响, 这类问题常常出现在等温粘弹性理论的研究中. 针对记忆项的情况, 许多学者进行了广泛的研究,见文 [3–6]等. Jaime等人在文献 [5]中讨论了一类带记忆和*Dirichlet* 边界的二阶抽象系统解的多项式衰减, 借助该方法, 本文我们主要考虑具有分数阶线性记忆的非经典反应扩散方程解的渐近性行为. 通过定义合适的 *Lyapunov* 泛函, 证明了当记忆核g 呈指数衰减时, 问题 (1) 的解是多项式衰减的; 随后, 应用半群理论, 证明了解是非指数稳定的.

2. 预备知识

首先, 考虑$Hilbert$ 空间$\mathcal{D}(\mathcal{A}^{s/2}), \forall s \in \mathbb{R}$, 其内积和范数分别定义如下

$$(\cdot,\cdot)_{\mathcal{D}(\mathcal{A}^{s/2})} = (\mathcal{A}^{s/2}\cdot, \mathcal{A}^{s/2}\cdot), \ \ \|\cdot\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}^{s/2})} = \|\mathcal{A}^{s/2}\cdot\|.$$

故

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}^0) = L^2(\Omega), \ \mathcal{D}(\mathcal{A}^{1/2}) = H_0^1(\Omega), \mathcal{D}(\mathcal{A}^{-1/2}) = H^{-1}(\Omega).$$

并有如下嵌入成立

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}^{s/2}) \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{A}^{r/2}), \quad \forall s > r.$$

其中$\mathcal{A}$ 为$H = L^2(\Omega)$ 上的严格正算子, 并定义

$$\mathcal{A} = -\Delta, \text{ 其定义域 } \mathcal{D}(\mathcal{A}) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega),$$

分别用$(\cdot,\cdot)$ 和$\|\cdot\|$ 来表示$L^2(\Omega)$ 上的内积和范数; 并用$\|\cdot\|_p$ 来表示$L^p(\Omega)$ 的范数.

同文 [5], 记忆核$g \in C^2(\mathbb{R}^+) \cap W^{2,1}(\mathbb{R}^+)$, 对任意的$s \in \mathbb{R}^+$, 满足如下假设

(h_1) $g(s) > 0$;

(h_2) $-c_0 g(s) \le g'(s) \le -c_1 g(s)$;

(h_3) $|g''(s)| \le c_2 g(s)$;

(h_4) $1 - G(t) \ge c_3 > 0$.

其中 $c_i, i = 0, 1, 2, 3,$ 均为正常数且 $G(t) := \int_0^t g(s)ds$.

同文 [7], 非线性项f 满足

(f_1) $(\rho+1)F(s) \le f(s)s, F(Z) := \int_0^Z f(s)ds, \ \forall s \in \mathbb{R}$.

(f_2) $|f(s_1) - f(s_2)| \le C(1 + |s_2|^{\rho-1} + |s_2|^{\rho-1})|s_1 - s_2|, \ \forall s_1, s_2 \in \mathbb{R}$,

其中 $C > 0, \rho \ge 1$ 并且有 $(n-2)\rho \le n, \ n \ge 3$. 并定义如下的卷积运算.

$$(g * w)(t) := \int_0^t g(t-s)w(s)ds.$$

为了方便后面的运算, 定义

$$(g\Box w)(t) := \int_0^t g(t-s)|w(t) - w(s)|^2 ds,$$

$$(g \diamond w)(t) := \int_0^t g(t-s)(w(t) - w(s))ds.$$

引理1 [5] ($Poincaré$ 不等式) 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界开区域, 并且有光滑边界, 假设 $u \in W_0^{1,p}(\Omega), 1 \le p < n$. 则有

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \le C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

对任意的 $q \in [1, p^*]$, $p^* = np/(n-p)$, 其中常数 C 仅依赖于 p, q, n 和 Ω.

引理2 [5] ($Young$ 不等式) 设 a, b 是非负实数, $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 那么

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

3. 解的多项式衰减

引理3 [5] 对任意的函数$k \in C(\mathbb{R})$ 以及$\varphi \in W^{1,2}(0,T)$, 可知

$$(k * \varphi)(t) = (k \diamond \varphi)(t) + \left[\int_0^t k(\tau)d\tau\right]\varphi(t).$$

引理4 [5] 对任意的函数 $k \in C^1(\mathbb{R})$ 以及$\varphi \in W^{1,2}(0,T)$, 可得

$$\begin{aligned}(k * \varphi)(t)\varphi_t(t) = & -\frac{1}{2}k(t)\left|\varphi(t)\right|^2 + \frac{1}{2}(k^{'}\Box\varphi)(t) \\ & -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{(k\Box\varphi)(t) - \left[\int_0^t k(\tau)d\tau\right]|\varphi(t)|^2\right\}.\end{aligned}$$

引理5 [5] 对任意的函数$k \in C(\mathbb{R})$ 以及$\varphi \in W^{1,2}(0,T)$, 则

$$|k \diamond \varphi)(t)|^2 \le \left[\int_0^T |k(\tau)|d\tau\right]\left(|K|\Box\varphi\right)(t).$$

引理6 [5] 在$Hilbert$ 空间H 中, 对任意的函数$k \in C(\mathbb{R})$, $k > 0$ 以及$\varphi \in W^{1,2}(0,T)$, $q \in H$. 故存在常数$C_\varepsilon > 0$, 其中$\varepsilon > 0$, 使得

$$|q(t)(k \diamond \varphi)(t)| \le \varepsilon|q(t)|^2 + C_\varepsilon(k\Box\varphi)(t).$$

引理7 [7] 对任意的两个函数$k, w \in C^1(\mathbb{R})$, 其中$\theta \in [0,1]$, 有下面的不等式成立：

$$|(k \diamond w)(t)|^2 \le \left[\int_0^t |k(s)|^{2(1-\theta)}ds\right]|k|^{2\theta}\Box w.$$

定理1 假设g, f 分别满足条件$(h1)-(h4)$ 和$(f_1)-(f_2)$, 则给定初值$u_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ 和$h \in H$, 问题(1) 存在唯一解u, 满足

$$u \in C\left([0,T];\mathcal{D}(\mathcal{A})\right) \cap C^1\left([0,T];\mathcal{D}(\mathcal{A}^{1/2})\right).$$

证明 解的适定性主要用到$Faedo-Galerkin$ 方法以及$Gronwall$ 引理.

在这里我们定义如下能量泛函

$$\mathscr{P}(t)=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\Big[|\nabla u(t)|^2-2(u_t,u)-G(t)|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u(t)|^2-|\nabla u_t(t)|^2+(g\Box(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u)(t)$$
$$-|\nabla h|^2\Big]dx+\int_{\Omega}F(u)dx,$$

$$\mathscr{Q}(t)=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left[|(-\Delta)^{1-\frac{\alpha}{2}}u(t)|^2-G(t)|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u(t)|^2+(g\Box\nabla u)(t)+|\nabla h|^2\right]dx$$
$$+\int_{\Omega}(-\Delta)^{1-\alpha}F(u)dx.$$

引理8 设u 是问题(1) 的解, 满足初值$u_0\in\mathcal{D}(\mathcal{A})$, 则有下面的能量不等式:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathscr{P}(t)\le&\int_{\Omega}\left[-2|u_t|^2+c_4|\nabla h|^2+(\frac{c_4}{\eta_1}-1)|\nabla u_t|^2\right]dx\\&-\frac{1}{2}g(t)\int_{\Omega}|(-\Delta)^{\alpha/2}u(t)|^2dx+\frac{1}{2}\int_{\Omega}(g^{'}\Box(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u)(t)dx-(u_{tt},u),\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathscr{Q}(t)\le&\int_{\Omega}\left[c_4|\nabla h|^2+\frac{c_4}{\eta_1}|\nabla u_t|^2-(c_5+c_6)|u_t|^2\right]dx\\&-\frac{1}{2}g(t)\int_{\Omega}|\nabla u(t)|^2dx+\frac{1}{2}\int_{\Omega}(g^{'}\Box\nabla u)(t)dx.\end{aligned}$$

证明 用(1) 中的方程与u_t 做内积, 可得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2+\|u_t\|^2+\|\nabla u\|^2-(g*(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u,(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u_t)+(f(u),u_t)=(h,u_t).$$

在引理 4 中令$\varphi=(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u$, 我们得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(-(u_t,u)-\|\nabla u_t\|^2+\|\nabla u\|^2+g\Box(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u\\&-G(t)\|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u\|^2+\|\nabla h\|^2+\int_{\Omega}F(u)dx\Big)\\&=-(u_{tt},u)+\int_{\Omega}h(x)u_tdx-2\|u_t\|^2-\|\nabla u_t\|^2\\&+\frac{1}{2}g^{'}\Box(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u-\frac{1}{2}g(t)\|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u\|^2-(\nabla u_{tt},\nabla u_t),\end{aligned}\tag{2}$$

应用$Young$ 不等式及$Poincaré$ 不等式, 有

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}h(x)u_tdx&\le c_4\|h(x)\|^2+\frac{c_4}{\eta_1}\|u_t\|^2\\&\le c_4\|\nabla h(x)\|^2+\frac{c_4}{\eta_1}\|\nabla u_t\|^2.\end{aligned}\tag{3}$$

将式 (3) 代入式 (2) 中, 可得

$$\frac{d}{dt}\mathscr{P}(t) \le \int_\Omega \left[-|u_t|^2 + c_4|\nabla h|^2 + (\frac{c_4}{\eta_1} - 1)|\nabla u_t|^2\right] dx$$
$$- \frac{1}{2}g(t)\int_\Omega |(-\Delta)^{\alpha/2}u(t)|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega (g^{'}\square A^{\frac{\alpha}{2}}u)(t)dx - (u_{tt}, u),$$

同理, 我们用 (1) 中的方程与$(-\Delta)^{1-\alpha}u_t$ 做内积. 在引理 4 中令$\varphi = (-\Delta)^{\frac{1}{2}}u$, 有

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \left(|(-\Delta)^{1-\alpha/2}u|^2 + (-\Delta)^{1-\alpha}F(u) - G(t)|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u(t)|^2 + (g\square\nabla u)(t)\right) dx$$
$$= -\left\|(-\Delta)^{\frac{1-\alpha}{2}}u_t\right\|^2 - \left\|(-\Delta)^{1-\alpha/2}u_t\right\|^2 + \left((-\Delta)^{\frac{1-\alpha}{2}}h(x), (-\Delta)^{\frac{1-\alpha}{2}}\right)$$
$$- \frac{1}{2}g(t)\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega (g^{'}\square\nabla u)(t)dx.$$

继续使用$Young$ 不等式和$Poincaré$ 不等式, 可得

$$\frac{d}{dt}\mathscr{Q}(t) \le \int_\Omega \left[c_4|\nabla h|^2 + \frac{c_4}{\eta_1}|\nabla u_t|^2 - (c_5 + c_6)|u_t|^2\right] dx$$
$$- \frac{1}{2}g(t)\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega (g^{'}\square\nabla u)(t)dx.$$

引理证明完成.

定义如下的能量泛函：

$$\mathscr{F} = \frac{1}{2}\left\|(g*\nabla u)(t)\right\|^2 - \left(u(t), (g*u)_t(t)\right), \tag{4}$$

$$\mathscr{K}(t) = (u(t), u_t(t)) + \left\|\nabla u\right\|^2. \tag{5}$$

引理9 在引理 8 的假设下, 我们得到

$$\frac{d}{dt}\mathscr{F}(t) \le \frac{g(0)}{2}\|u_t\|^2 + \frac{c_0^2 g^2}{g(0)}\|u\|^2 + \frac{1}{g(0)}\left(\int_0^\infty \left|g^{''}(s)\right| ds\right)\left(\left|g^{''}\right|\square u\right)$$
$$+ \eta_2\|\nabla h\|^2 + \left(\frac{c_7}{\eta_2} + c_0\right)g(t)\|u\|^2 + \left(\frac{c_7 c_0}{\eta_2} + \frac{c_{10}}{\eta_4} + \frac{c_{11}}{\eta_5}\right)(g\square\nabla u)(t)$$
$$+ (\eta_3 + \eta_5)\|\nabla u_t\|^2 + (c_8\eta_2 + \eta_4)\|\nabla u\|^2.$$

证明 结合引理 3 并进行求导运算, 有

$$\begin{aligned}(g*u)_t(t) &= g(0)u(t) + (g^{'}*u)(t)\\ &= g(t)u(t) + (g^{'}\diamond u)(t).\end{aligned} \tag{6}$$

用 (1) 中的方程与$(g*u)_t$ 做内积, 再根据 (6) , 我们得到

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(u,(g*u)_t) &= (h(x)-f(u)+(g*(-\Delta)^{\alpha}u)(t)-\Delta u-\Delta u_t,(g*u)_t)\\ &+\left(g(0)u_t+g^{'}u+g^{''}\diamond u,u\right)\\ &=\left(h(x),gu+g^{'}\diamond u\right)-(f(u),(g*u)_t)\\ &-\left(-\Delta u-\Delta u_t,gu+g^{'}\diamond u\right)+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|g*(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u\|^2\\ &+\left(g(0)u_t+g^{'}u+g^{''}\diamond u,u\right).\end{aligned}\tag{7}$$

将 (5), (6)式结合, 经过简单计算, 可得

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\|g*(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u\|^2-(u(t),(g*u)_t)\right]\\ &=(f(u)-h(x),(g*u)_t)+\left(-\Delta u-\Delta u_t,gu+g^{'}\diamond u\right)\\ &-\left(g(0)u_t+g^{''}\diamond u,u\right)-g^{'}\|u\|^2.\end{aligned}\tag{8}$$

下面对 (8) 式等号的右端分别进行估计, 使用$Young$ 不等式及引理 6, 有

$$\begin{aligned}-\left(g(0)u_t+g^{''}\diamond u,u\right) &\le c_0g\left(u_t,u\right)+\left|\left(g^{''}\diamond u,u\right)\right|\\ &\le \frac{g(0)}{2}\|u_t\|^2+\frac{c_0^2g^2}{g(0)}\|u\|^2\\ &+\frac{1}{g(0)}\left(\int_0^{\infty}\left|g^{''}(s)\right|ds\right)\left(\left|g^{''}\right|\Box u\right).\end{aligned}\tag{9}$$

使用$Young$ 不等式和 (6), 我们有

$$(f(u)-h(x),(g*u)_t)\le \eta_2\int_{\Omega}\left(|f(u)|^2+|h|^2\right)dx+\frac{c_7}{\eta_2}\int_{\Omega}\left(g(t)|u|^2-g^{'}\Box u\right)dx.\tag{10}$$

由条件$(f_1)-(f_2)$, $Young$ 不等式, $Poincaré$ 不等式和引理 7, 可知

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}|f(u)|^2dx &\le c_8\left\{\int_{\Omega}|u|^2dx+\int_{\Omega}|u|^{2\rho}dx\right\}\\ &\le c_8\left\{\int_{\Omega}|\nabla u|^2dx+\left(\int_{\Omega}|\nabla u|^2dx\right)^{\rho}\right\}\\ &\le c_8\int_{\Omega}|\nabla u|^2dx.\end{aligned}\tag{11}$$

将 (11) 代入 (10), 应用$Poincaré$ 不等式和条件(h_2), 可得

$$\begin{aligned}(f(u)-h(x),(g*u)_t) &\le c_8\eta_2\|\nabla u\|^2+\eta_2\|\nabla h\|^2+\frac{c_7}{\eta_2}g(t)\|u\|^2-\frac{c_7}{\eta_2}(g^{'}\Box u)\\ &\le c_8\eta_2\|\nabla u\|^2+\eta_2\|\nabla h\|^2+\frac{c_7}{\eta_2}g(t)\|u\|^2+\frac{c_7c_0}{\eta_2}(g\Box\nabla u).\end{aligned}\tag{12}$$

利用$Poincaré$ 不等式, $Young$ 不等式和引理 6, 可得

$$\begin{aligned}\left(-\Delta u-\Delta u_t, gu+g^{'}\diamond u\right)=&(\nabla u, g^{'}\diamond\nabla u)+(\nabla u_t, g^{'}\diamond\nabla u)\\&+g(t)\left\|\nabla u\right\|^2+(\nabla u_t, g(t)u(t))\\&\le\left(1+\frac{c_9}{\eta_3}\right)g(t)\left\|\nabla u\right\|^2+(\eta_3+\eta_5)\left\|\nabla u_t\right\|^2\\&+\left(\frac{c_{10}}{\eta_4}+\frac{c_{11}}{\eta_5}\right)\left(g\square\nabla u\right)(t)+\eta_4\left\|\nabla u\right\|^2,\end{aligned}\tag{13}$$

将 (9), (12)-(13) 代入 (8), 整理可得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathscr{F}(t)\le&\frac{g(0)}{2}\|u_t\|^2+\frac{c_0^2g^2}{g(0)}\left\|u\right\|^2\\&+\frac{1}{g(0)}\left(\int_0^\infty\left|g^{''}(s)\right|ds\right)\left(\left|g^{''}\right|\square u\right)+(c_8\eta_2+\eta_4)\left\|\nabla u\right\|^2\\&+\eta_2\left\|\nabla h\right\|^2+\left(\frac{c_7}{\eta_2}+c_0\right)g(t)\left\|u\right\|^2\\&+\left(\frac{c_7c_0}{\eta_2}+\frac{c_{10}}{\eta_4}+\frac{c_{11}}{\eta_5}\right)(g\square\nabla u)(t)\\&+(\eta_3+\eta_5)\left\|\nabla u_t\right\|^2.\end{aligned}\tag{14}$$

故引理得证.

引理10 在引理 8 的假设条件下, 我们有

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathscr{K}(t)\le&(u_{tt},u)-\|\nabla u_t\|^2+\left(1-c_3+\frac{c_{12}}{\eta_6}+\eta_7\right)\|\nabla u\|^2\\&+\frac{1}{\eta_7}(\int_0^\infty g(s)ds)(g\square(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u)+\eta_6\|\nabla h\|^2-(\rho+1)\int_\Omega F(u)dx.\end{aligned}$$

证明 用 (1) 中的方程与 u 做内积, 在引理 4 中令 $\varphi=(-\Delta)^\alpha u$, 可得

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left[(u,u_t)+\frac{1}{2}\|A^{\frac{1}{2}}u\|^2\right]\\&=(u_{tt},u)-\|\nabla u_t\|^2-(f(u),u)+(h(x),u)\\&+(u,g\diamond(-\Delta)^\alpha u+G(t)(-\Delta)^\alpha u)\\&=(u_{tt},u)-\|\nabla u_t\|^2+G(t)\|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u\|^2\\&+\left((-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u,g\diamond A^{\frac{\alpha}{2}}u\right)-(f(u),u)+(h(x),u)\\&\le(u_{tt},u)-\|\nabla u_t\|^2+(1-c_3)\left\|\nabla u\right\|^2+((-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u,g\diamond(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u),\end{aligned}\tag{15}$$

DOI: 10.12677/pm.2022.1210175

由条件 (f_1), 可知

$$-(f(u),u) \leq -(\rho+1)\int_\Omega F(u)dx, \tag{16}$$

利用 $Young$ 不等式和 $Poincaré$ 不等式, 可得

$$(h,u) \leq \eta_6\|\nabla h\|^2 + \frac{c_{12}}{\eta_6}\|\nabla u\|^2, \tag{17}$$

将 (16)-(17) 代入 (15), 再根据引理 6 和 $Poincaré$ 不等式, 可知

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}((u,u_t)+\frac{1}{2}\|A^{\frac{1}{2}}u\|^2) \leq & (u_{tt},u)-\|\nabla u_t\|^2 + \left(1-c_3+\frac{c_{12}}{\eta_6}+\eta_7\right)\|\nabla u\|^2 \\ & + \frac{1}{\eta_7}(\int_0^\infty g(s)ds)(g\Box(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u) \\ & + \eta_6\|\nabla h\|^2 - (\rho+1)\int_\Omega F(u)dx. \end{aligned} \tag{18}$$

定义泛函

$$\mathscr{L}(t) \leq N\mathscr{P}(t) + N\mathscr{Q}(t) + \mathscr{F}(t) + N\mathscr{K}(t).$$

定理2 假设$g \in C^2(\mathbb{R}^+)\cap W^{2,1}(\mathbb{R}^+)$, 条件$(h_1)-(h_4)$ 及$(f_1)-(f_2)$ 成立, 且初值

$$u_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}),$$

那么问题 (1) 的解为多项式衰减, 即存在一个正常数C 满足

$$\mathscr{P}(t)t \leq C\left[\mathscr{P}(0)+\mathscr{Q}(0)\right].$$

证明 由条件(h_4) 可知$\int_0^\infty g(s)ds < 1$. 故将引理 8 , 9 , 10 进行相应整理, 利用$Poincaré$ 不等式, 有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathscr{L}(t) \leq & \left[N\left(\frac{2c_4}{\eta_1}+\frac{g(0)}{2}-c_5-c_6\right)+\eta_3+\eta_5\right]\|\nabla u_t\|^2 \\ & - \left[N\left(c_3+\frac{c_{12}}{\eta_6}+\eta_7-1\right)-c_8\eta_2-\eta_4\right]\|\nabla u\|^2 \\ & + (2Nc_4+\eta_2)\|\nabla h\|^2 - (\rho+1)\int_\Omega F(u)dx \\ & - \left(\frac{N}{2}-\frac{c_0^2}{g(0)}\right)g(t)\left\|(-\Delta)^{\alpha/2}u(t)\right\|^2 \\ & - \left(\frac{N}{2}-\frac{c_7}{\eta_2-c_0}\right)g(t)\|\nabla u(t)\|^2 \\ & - \left(\frac{Nc_1}{2}-\frac{1}{\eta_7}\right)(g\Box(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u) \\ & - \left(\frac{Nc_1}{2}-\frac{c_7c_0}{\eta_2}-\frac{c_{10}}{\eta_4}-\frac{c_{11}}{\eta_5}\right)(g\Box\nabla u), \end{aligned}$$

在对引理 8 , 9 , 10 进行整理的过程中, 我们使用到了条件(h_2), (h_3) 及$Poincaré$ 不等式.

根据$\mathscr{P}(t)$ 的定义, 如果N 充分大, 则存在一个正常数γ_0, 使得

$$\frac{d}{dt}\mathscr{L}(t) \leq -\gamma_0\mathscr{P}(t).$$

不等号两边同时关于t 积分, 得

$$\mathscr{L}(t) - \mathscr{L}(0) + \gamma_0 \int_0^t \mathscr{P}(\tau)d\tau \leq 0.$$

由于N 充分大, 且对$\forall t > 0$, 都有$\mathscr{L}(t) > 0$. 故

$$\int_0^t \mathscr{P}(\tau)d\tau \leq \mathscr{L}(0), \quad \forall t > 0.$$

根据引理 8 及条件$(h_1) - (h_2)$,$(d/dt)\mathscr{P} \leq 0$. 可知

$$\frac{d}{dt}\left[t\mathscr{P}(t)\right] = \mathscr{P}(t) + t\frac{d}{dt}\mathscr{P}(t) \leq \mathscr{P}(t), \quad \forall t > 0.$$

不等号两边同时关于t 积分, 可得

$$t\mathscr{P}(t) \leq \int_0^t \mathscr{P}(\tau)d\tau \leq \mathscr{L}(0), \quad \forall t > 0,$$

故存在常数$C > 0$ 使得

$$\mathscr{P}(t)t \leq C\left[\mathscr{P}(0) + \mathscr{Q}(0)\right].$$

4. 解的非指数稳定

事实上, 在定理2 的基础上假设记忆核函数$g(s)$ 是指数衰减的, 那么问题 (1) 在第 3 小节中指定的初始条件和边界条件下, 其解不能以指数衰减.

引理11 [8] 设X 是一个$Hilbert$ 空间, 作用于空间X 中的C_0 半群e^{At} 是指数稳定的, 当且仅当, $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$ 且存在$M \geq 1$, 使得

$$\left\|(i\lambda I - A)^{-1}\right\| < M, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

为了将问题 (1) 的解作用于适当相空间的半群, 我们引入函数

$$\eta^t(s) = u(t) - u(t-s), \tag{19}$$

由 (1), (19) 可得

$$\begin{cases} u_t - \Delta u_t - \Delta u - G_\infty(-\Delta)^\alpha u & \\ + \int_0^\infty g(s)(-\Delta)^\alpha \eta(s)ds + f(u) = h(x), & x \in \Omega,\ t > 0, \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega,\ t \geq 0, \\ \eta^t(x,s) = 0, & x \in \partial\Omega,\ s \geq 0,\ t \geq 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \\ \eta^0(x,s) = \eta_0(x,s), & x \in \Omega, s \geq 0. \end{cases} \tag{20}$$

其中$G_\infty := \int_0^\infty g(t)dt$, 根据条件$(h_4)$ 可知$G_\infty \leq 1 - c_3$.

设$L_g^2\left(\mathbb{R}^+, \mathcal{D}(\mathcal{A}^{\alpha/2})\right)$ 是定义在g-加权空间上的二次可积函数空间, 其内积定义如下

$$(\eta_1, \eta_2)_g := \int_0^\infty g(s)((-\Delta)^{\alpha/2}\eta_1(s), (-\Delta)^{\alpha/2}\eta_2(s))ds.$$

且定义相应的$Hilbert$ 空间

$$\mathcal{Z} := \mathcal{D}(\mathcal{A}^{1/2}) \times \mathcal{H} \times L_g^2\left(\mathbb{R}^+, \mathcal{D}((\mathcal{A})^{\alpha/2})\right).$$

令$v := u_t$, 定义

$$U(t) := [u(t), \eta]^\top, \quad U_0 := [u_0, \eta_0]^\top \in \mathcal{Z},$$

我们将问题 (20) 转化为空间$\mathcal{Z}$ 中的抽象线性形式

$$\begin{cases} U_t(t) = AU(t), \\ U(0) = U_0. \end{cases} \tag{21}$$

线性算子A 有如下形式

$$A\begin{bmatrix} u \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h - f - \int_0^\infty g(s)(-\Delta)^\alpha\eta(s)ds + G_\infty(-\Delta)^\alpha u + \Delta u + \Delta v \\ v - \eta_s \end{bmatrix},$$

其中定义域表示为

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) := \Bigg\{U \in \mathcal{Z}:\ \mathcal{A}U \in \mathcal{Z},\ \int_0^\infty g(s)(-\Delta)^\alpha\eta(s)ds \in \mathcal{H},$$
$$\eta_s \in L_g^2\left(\mathbb{R}^+, \mathcal{D}(\mathcal{A}^{\alpha/2})\right), \eta(0) = 0\Bigg\}.$$

根据引理 11 , 本文考虑具有$Dirichlet$ 边界条件的算子$\mathcal{A}$ 的谱,

$$\begin{cases} \mathcal{A}e_i = \lambda_i e_i, \\ e_i|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{22}$$

且

$$\|e_i\|_{L^2(\Omega)}=1,\ \ i\geq 1.$$

其中$(\lambda_i)_{i\geq 1}$ 是一个有有限个解及有正的特征值的趋于无穷的递增序列; $(e_i)_{i\geq 1}$ 是其相应的归一化特征函数序列. 并且假设

$$\lambda_1>G_\infty\lambda_1^\alpha.$$

定理3 在定理 2 的假设下, 设记忆核g 是指数衰减的, 那么与方程 (21) 相关的作用于相空间$\mathcal{Z}$ 上的半群$U(t)$ 是非指数稳定的.

证明 设$F=[F_1,F_2]^\top\in\mathcal{Z}$, 考虑如下方程

$$(i\lambda I-A)U=F,\quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

即

$$\begin{cases} i\lambda v+f(u)+\int_0^\infty g(s)(-\Delta)^\alpha\eta(s)ds-G_\infty(-\Delta)^\alpha u-\Delta u-\Delta v=F_1,\\ i\lambda\eta-v+\eta_s=F_2. \end{cases}\tag{23}$$

设$F_1=0,\ F_2=\lambda_\nu^{\frac{-\alpha+1-\epsilon}{2}}e^{-\lambda_\nu^{1-\epsilon}s}e_\nu$. 且定义

$$u=pe_\nu,v=qe_\nu,\eta(s)=\varphi(s)e_\nu.$$

其中$p,q\in\mathbb{C},\ \varphi\in L_g^2(\mathbb{R}^+)$. 由此方程 (23) 可改写为

$$\begin{cases} i\lambda pe_\nu-qe_\nu=0,\\ i\lambda qe_\nu+\lambda_\nu pe_\nu-G_\infty\lambda_\nu^\alpha pe_\nu+\int_0^\infty g(s)\lambda_\nu^\alpha\varphi(s)dse_\nu+\lambda_\nu qe_\nu=0,\\ i\lambda\varphi(s)e_\nu-qe_\nu+\varphi_s(s)e_\nu=\lambda^{\frac{-\alpha+1-\epsilon}{2}}e^{-\lambda_\nu^{1-\varepsilon}s}e_\nu. \end{cases}\tag{24}$$

由$(24)_1$, $(24)_2$ 得

$$-\lambda^2pe_\nu+\lambda_\nu pe_\nu-G_\infty\lambda_\nu^\alpha pe_\nu+\int_0^\infty g(s)\lambda_\nu^\alpha\varphi(s)dse_\nu=0,$$

令$\lambda=\sqrt{\lambda_\nu}$, 通过$(24)_{1,2}$, 可知

$$G_\infty p=\int_0^\infty g(s)\varphi(s)ds.\tag{25}$$

利用$(24)_1$, 对常微分方程$(24)_3$ 进行求解, 可得

$$\psi(s)=Ce^{-i\sqrt{\lambda_\nu s}}+p+\frac{\lambda_\nu^{\frac{-\alpha+1-\epsilon}{2}}}{i\lambda_\nu^{\frac{1}{2}}-\lambda_\nu^{1-\epsilon}}e^{-\lambda_\nu^{1-\epsilon}s}.\tag{26}$$

当初值$\eta(0)=0$ 时, 有

$$C=-p-\frac{\lambda_\nu^{\frac{-\alpha+1-\epsilon}{2}}}{i\lambda_\nu^{\frac{1}{2}}-\lambda_\nu^{1-\epsilon}}.$$

由 (26) 可知

$$\varphi(s)=(-p-\frac{\lambda_\nu^{\frac{-\alpha+1-\epsilon}{2}}}{i\lambda_\nu^{\frac{1}{2}}-\lambda_\nu^{1-\epsilon}})e^{-i\sqrt{\lambda_\nu}s}+p+\frac{\lambda_\nu^{\frac{-\alpha+1-\epsilon}{2}}}{i\lambda_\nu^{\frac{1}{2}}-\lambda_\nu^{1-\epsilon}}e^{-\lambda_\nu^{1-\epsilon}s}, \tag{27}$$

通过 (25) 和 (27), 有

$$g(s)=e^{-\gamma s},\gamma\in\mathbb{R}^+.$$

故

$$p=\frac{\lambda_\nu^{\frac{-\alpha+1-\epsilon}{2}}}{\gamma+\lambda_\nu^{1-\epsilon}}.$$

因此, 对任意的$\alpha\in[0,1)$, 存在$\epsilon\in(0,1)$, $\epsilon>\alpha$ 使得

$$\text{当}\lambda_\nu\to\infty\text{时，}\ p\approx C\lambda_\nu^{\frac{-\alpha+1-\epsilon}{2}},$$

重复引用$u=pe_\nu$, 可知

$$\text{当}\lambda_\nu\to\infty\text{时，}\ \|u\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}})}\approx\lambda_\nu^{\frac{\epsilon-\alpha}{2}}\to\infty.$$

综上所述, 结合引理 11 , 定理得证.

参考文献

[1] Aifantis, E.C. (1980) On the Problem of Diffusion in Solids. *Acta Mechanica*, **37**, 265-296. https://doi.org/10.1007/BF01202949

[2] Aifantis, E.C. (2011) Gradient Nanomechanics: Applications to Deformation, Fracture, and Diffusion in Nanopolycrystals. *Metallurgical and Materials Transactions A*, **42**, 2985-2998. https://doi.org/10.1007/s11661-011-0725-9

[3] Wang, X., Yang, L. and Zhong, C.K. (2010) Attractors for the Nonclassical Diffusion Equations with Fading Memory. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **362**, 327-337. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2009.09.029

[4] Wang, X. and Zhong, C.K. (2009) Attractors for the Non-Autonomous Nonclassical Diffusion Equations with Fading Memory. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods Applications*, **71**, 5733-5746. https://doi.org/10.1016/j.na.2009.05.001

[5] Jaime, E., Munoz, R. and Maria, G.N. (2003) Asymptotic Behavior of Energy for a Class of Weakly Dissipative Second-Order Systems with Memory. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **286**, 692-704. https://doi.org/10.1016/S0022-247X(03)00511-0

[6] Al-Gharabli, M.M. (2019) Arbitrary Decay Result of a Viscoelastic Equation with Infinite Memory and Nonlinear Frictional Damping. *Boundary Value Problems*, **2019**, Article No. 140. https://doi.org/10.1186/s13661-019-1253-6

[7] Cavalcanti, M.M. and Oquendo, H.P. (2003) Frictional versus Viscoelastic Damping in a Semilinear Wave Equation. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **42**, 1310-1324. https://doi.org/10.1137/S0363012902408010

[8] Pruss, J. (1984) On the Spectrum of C_0-Semigroups. *Transactions of the American Mathematical Society*, **284**, 847-857. https://doi.org/10.2307/1999112