Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(10), 1693-1701
Published Online October 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.1210183

加权Bergman空间上一类斜Toeplitz算子的交换性

刘朝美，张文婷，蒋志娟

大连交通大学理学院，辽宁 大连

收稿日期：2022年9月18日；录用日期：2022年10月17日；发布日期：2022年10月24日

摘 要

本文研究了单位圆盘的加权Bergman空间上斜Toeplitz算子的交换性，得到了两个带有解析符号的斜Toeplitz算子可交换的充要条件是它们的符号函数是线性相关的，以特殊单项式函数为符号的斜Toeplitz算子与带有解析符号的斜Toeplitz算子可交换的充要条件。

关键词

加权Bergman空间，斜Toeplitz算子，交换性

Commutativity of a Class of Slant Toeplitz Operators on the Weighted Bergman Space

Chaomei Liu, Wenting Zhang, Zhijuan Jiang

School of Science, Dalian Jiaotong University, Dalian Liaoning

Received: Sep. 18th, 2022; accepted: Oct. 17th, 2022; published: Oct. 24th, 2022

Abstract

In this paper, we study the commutativity of slant Toeplitz operators on the weighted Bergman space of the unit disk, and obtain the necessary and sufficient condition for the commutativity of two Toeplitz operators with analytic symbols which is that their symbol functions are linearly dependent, and the necessary and sufficient conditions for slant Toeplitz operators with special monomial symbols that commute with slant Toeplitz operators with analytic symbols.

文章引用: 刘朝美, 张文婷, 蒋志娟. 加权 Bergman 空间上一类斜 Toeplitz 算子的交换性[J]. 理论数学, 2022, 12(10): 1693-1701. DOI: 10.12677/pm.2022.1210183

Keywords

Weighted Bergman Space, Slant Toeplitz Operator, Commutativity

1. 引言

本文主要对加权 Bergman 空间上斜 Toeplitz 算子的交换性问题展开探讨。斜 Toeplitz 算子是函数空间上的一类具体算子，它与量子物理、图像处理、微分方程求解、小波分析等方面有着一定的联系。对斜 Toeplitz 算子的研究最早是 M. C. Ho [1]于 1996 年给出的，在该文中 M. C. Ho 给出了单位圆周的 Lebesgue 空间和 Hardy 空间上斜 Toeplitz 算子的概念，探讨了该类算子的有界性、判别标准、等距性、亚正规性等性质，随后深入研究了该类算子及其共轭算子的谱、谱半径等性质[2] [3] [4]，得到了一系列的结论。在[5] [6]中 S. C. Arora 和 R. Batra 给出了单位圆周的 Lebesgue 空间和 Hardy 空间上 k-阶斜 Toeplitz 算子的定义，并探讨该类算子的一些性质。安恒斌和蹇人宜[7] 2004 年定义了单位圆盘的 Bergman 空间上的斜 Toeplitz 算子，并研究了该类算子的有界性、紧性和谱等若干性质。Yang、Leng 和 Lu 2007 年在[8]中给出了单位圆盘的 Bergman 空间上 k-阶斜 Toeplitz 算子的概念，探讨了该类算子的交换性和谱等众多性质。此后，Liu 等又对单位圆周的 Lebesgue 空间和单位圆盘的 Bergman 空间上 k-阶斜 Toeplitz 算子的交换性、亚正规性等性质展开讨论，得到了一些结论[9] [10]。

对算子具体性质的研究有助于人们对该类算子的深入了解，而且对算子性质的研究可以借助其所带符号函数的性质展开。本文主要借助算子符号函数的性质对单位圆盘的加权 Bergman 空间上斜 Toeplitz 算子的交换性问题展开研究，基于单位圆盘的加权 Bergman 空间上斜 Toeplitz 算子的相关基础知识，首先讨论了两个带有解析符号的斜 Toeplitz 算子可交换的充要条件，得到了它们可交换的充要条件是它们的符号函数线性相关，然后研究了以解析函数为符号的斜 Toeplitz 算子和以特殊单项式函数为符号的斜 Toeplitz 算子的交换性问题，得到了它们可交换的充要条件。

2. 基础知识

本文中 N_+ 表示正整数集，N 表示非负整数集，D 表示复平面上的单位圆盘，$\mathrm{d}A$ 表示单位圆盘的正规化面积测度，即 $\int_D 1\mathrm{d}A(z)=1$。设 $\alpha>-1$，$\mathrm{d}A_\alpha(z)=(1+\alpha)\left(1-|z|^2\right)^\alpha \mathrm{d}A(z)$。

设 $L^2(D,\mathrm{d}A_\alpha)$ 为单位圆盘 D 上关于测度 $\mathrm{d}A_\alpha$ 平方可积的复可测函数全体构成的 Hilbert 空间，加权 Bergman 空间 $A_\alpha^2(D)$ 是由 $L^2(D,\mathrm{d}A_\alpha)$ 中所有解析函数构成的闭子空间。设 $L^\infty(D)$ 表示单位圆盘 D 上关于测度 $\mathrm{d}A_\alpha$ 本性有界的复可测函数全体构成的空间，$H^\infty(D)$ 表示单位圆盘 D 有界解析函数全体。

定义在 $A_\alpha^2(D)$ 上的算子 W 为 $W(z^n)=\begin{cases} z^{n/2}, & n\text{为偶数} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，且 W 是有界线性算子。

设 $\varphi\in L^\infty(D)$，定义在 $A_\alpha^2(D)$ 上的斜 Toeplitz 算子为 $B_\varphi=WT_\varphi$，这里 T_φ 是以函数 φ 为符号的 Toeplitz 算子。

关于 Bergman 空间 $A_\alpha^2(D)$ 上 Toeplitz 算子的性质可以参考[11]。下面给出我们所需要的若干结论。

定义 2.1 [11]设 $\varphi \in L^{\infty}(D)$，以函数 φ 为符号的 Toeplitz 算子 T_{φ} 定义为：对任意的 $f \in A_{\alpha}^{2}(D)$，$T_{\varphi} f = P_{\alpha}(\varphi f)$，这里 P_{α} 是投影算子且定义为 $P_{\alpha} f(z) = \int_{D} \frac{f(w)}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}} \mathrm{d}A_{\alpha}(w)$。

引理 2.2 [11]设 $\varphi \in H^{\infty}(D)$ 或 $\overline{\psi} \in H^{\infty}(D)$，则 $T_{\psi} T_{\varphi} = T_{\psi\varphi}$。

引理 2.3 [8]设 k 是满足 $k \geq 2$ 的整数且 $\varphi \in H^{\infty}(D)$，如果 $\varphi(z^{k}) = \varphi(z)$，$\forall z \in D$，则 φ 是常值函数。

3. 斜 Toeplitz 算子的交换性

由于对算子交换性的研究有助于人们加深对算子性质的了解，所以对算子交换性问题的研究吸引了人们的兴趣。Yang、Leng 和 Lu [8]建立了单位圆盘的 Bergman 空间上 k-阶斜 Toeplitz 算子，并探讨了两个带有解析符号的 k-阶斜 Toeplitz 算子可交换的充要条件是它们的符号函数线性相关，Liu 和 Lu [10]讨论了单位圆盘的 Bergman 空间上以调和多项式函数为符号的 k-阶斜 Toeplitz 算子可交换的充要条件也是它们的符号函数线性相关。

本节首先将文献[8]中的结论推广到单位圆盘的加权 Bergman 空间上，得到了单位圆盘的加权 Bergman 空间上以解析函数为符号的斜 Toeplitz 算子可交换的充分必要条件如下：

定理 3.1 设 $\varphi, \psi \in H^{\infty}(D)$，则下列条件等价

(1) $B_{\varphi} B_{\psi} = B_{\psi} B_{\varphi}$；

(2) φ 与 ψ 线性相关，即存在不全为 0 的常数 α 和 β 使得 $\alpha\varphi + \beta\psi = 0$。

为了证明该定理，这里需要以下两个关于 W 算子和 Toeplitz 算子的结论。

命题 3.2 设 $\varphi \in H^{\infty}(D)$，则 $T_{\varphi} W = W T_{\varphi(z^{2})}$。

证明既然 $\varphi \in H^{\infty}(D)$，则 $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n} z^{n}$，$z \in D$，从而对任意的 $f \in A_{\alpha}^{2}(D)$，对任意的 $z \in D$，

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} b_{2j} z^{2j} + \sum_{j=0}^{\infty} b_{2j+1} z^{2j+1},$$

$$T_{\varphi} W(f)(z) = T_{\varphi} W\left(\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{1} b_{2j+i} z^{2j+i}\right) = T_{\varphi}\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_{2j} z^{j}\right) = \varphi(z)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_{2j} z^{j}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_{n} b_{2j} z^{n+j},$$

$$\begin{aligned} W T_{\varphi(z^{2})}(f)(z) &= W T_{\varphi(z^{2})}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{1} b_{2j+i} z^{2j+i}\right) = W\left[\varphi(z^{2})\left(\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{1} b_{2j+i} z^{2j+i}\right)\right] \\ &= W\left(\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{1} a_{n} b_{2j+i} z^{2n+2j+i}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_{n} b_{2j} z^{n+j} \end{aligned},$$

即可得对任意的 $f \in A_{\alpha}^{2}(D)$，$T_{\varphi} W(f) = W T_{\varphi(z^{2})}(f)$，所以可得 $T_{\varphi} W = W T_{\varphi(z^{2})}$。□

命题 3.3 设 $\varphi \in H^{\infty}(D)$，若 $W^{n} T_{\varphi} = 0$，其中 $n \in N$，则 $\varphi = 0$。

证明既然 $\varphi \in H^{\infty}(D)$，则 $\varphi(z) = \sum_{p=0}^{\infty} a_{p} z^{p}$，$z \in D$。因为 $W^{n} T_{\varphi} = 0$，所以对任意的 $f \in A_{\alpha}^{2}(D)$，

$$W^{n} T_{\varphi} f = 0. \tag{1}$$

而对于常值函数 $f(z) = 1$，$(W^{n} T_{\varphi}) 1 = W^{n}\left(\sum_{p=0}^{\infty} a_{p} z^{p}\right) = \sum_{p=0}^{\infty} a_{2^{n} p} z^{p}$，从而由(1)式可得 $\sum_{p=0}^{\infty} a_{2^{n} p} z^{p} = 0$，所

以可得

$$a_{2^n p}=0,\quad p\in N. \tag{2}$$

对于函数 $f(z)=z^{2^n-j}$，其中 j 是整数且满足 $0<j<2^n$，

$$\left(W^nT_\varphi\right)(f)=W^n\left(T_\varphi f\right)=W^n\left(\sum_{p=0}^{\infty}a_pz^{p+2^n-j}\right)=W^n\left(\sum_{q=2^n-j}^{\infty}a_{q+j-2^n}z^q\right)=\sum_{i=1}^{\infty}a_{2^ni+j-2^n}z^i=\sum_{p=0}^{\infty}a_{2^np+j}z^{p+1},$$

从而由(1)式可得 $\sum_{p=0}^{\infty}a_{2^np+j}z^{p+1}=0$，所以可得 $a_{2^np+j}=0$，$p\in N$ 且 $0<j<2^n$。于是由上式和(2)式可得对任意的 $p\in N$，$a_p=0$，即 $\varphi=0$。□

定理 3.1 的证明若函数 $\varphi,\psi\in H^\infty(D)$ 满足定理 3.1 中的条件(2)，不失一般性，设 $\alpha\neq0$，则 $\varphi=-\frac{\beta}{\alpha}\psi$，从而根据 Toeplitz 算子和 W 算子的性质可得 $B_\varphi B_\psi=B_{-\frac{\beta}{\alpha}\psi}B_\psi=-\frac{\beta}{\alpha}B_\psi B_\psi=B_\psi B_{-\frac{\beta}{\alpha}\psi}=B_\psi B_\varphi$，所以定理 3.1 中的条件(1)成立。

如果定理 3.1 中的条件(1)成立，即 $B_\varphi B_\psi=B_\psi B_\varphi$。既然 φ,ψ 都属于 $H^\infty(D)$，那么由**引理 2.2** 和**命题 3.2** 可得

$$B_\varphi B_\psi=WT_\varphi WT_\psi=WWT_{\varphi(z^2)}T_\psi=WWT_{\varphi(z^2)\psi},\quad B_\psi B_\varphi=WT_\psi WT_\varphi=WWT_{\psi(z^2)}T_\varphi=WWT_{\psi(z^2)\varphi},$$

从而可得 $W^2T_{\varphi(z^2)\psi}=W^2T_{\psi(z^2)\varphi}$，即可得 $W^2T_{\varphi(z^2)\psi-\psi(z^2)\varphi}=0$。于是由**命题 3.3** 可得

$$\varphi(z^2)\psi-\psi(z^2)\varphi=0. \tag{3}$$

下面将分 2 种情况展开讨论。

如果 $\varphi=0$ 或 $\psi=0$，那么显然可得 φ 和 ψ 线性相关。

如果 $\varphi\neq0$ 且 $\psi\neq0$，因为 $\varphi,\psi\in H^\infty(D)$，所以由(3)式可得 $\frac{\varphi(z^2)}{\psi(z^2)}=\frac{\varphi}{\psi}$，从而由**引理 3.3** 可得 $\frac{\varphi}{\psi}=a$，其中 a 是复常数，即 $\varphi=a\psi$，所以 φ 与 ψ 线性相关。□

由**定理 3.1** 可得两个带有解析符号的斜 Toeplitz 算子可交换的充要条件是它们的符号函数线性相关，于是我们自然提出以下问题：**与带有解析符号的斜 Toeplitz 算子可交换的斜 Toeplitz 算子应具有什么性质？**下面我们将讨论以函数 $\psi(z)=\bar{z}^nz^m$ 为符号的斜 Toeplitz 算子与带有解析符号的斜 Toeplitz 算子可交换时，函数 $\psi(z)=\bar{z}^nz^m$ 应满足的条件，具体内容如下：

定理 3.4 如果函数 $\varphi\in H^\infty(D)$，函数 $\psi(z)=\bar{z}^nz^m$，其中 $m-n=8j$，$n,m,j\in N$ 且 $j>0$，则 B_φ 与 B_ψ 可交换的充要条件是下列条件之一成立：

(1) $\varphi\equiv0$；

(2) $n=0$ 且 φ 与 ψ 线性相关。

为了该定理的证明，这里需要以下两个引理。

引理 3.5 对任意的 $p\in N$，记 $N_{2p+1}=\{(2p+1)2^s\mid s\in N\}$，则对任意的 $p,q\in N$，若 $p\neq q$，$N_{2p+1}\cap N_{2q+1}=\varnothing$；正整数集 $N_+=\bigcup_{p=0}^{\infty}N_{2p+1}$。

证明 对任意的 $p,q\in N$，若 $p\neq q$，则 $N_{2p+1}=\{(2p+1)2^s\mid s\in N\}$，$N_{2q+1}=\{(2q+1)2^s\mid s\in N\}$，且 $2p+1\neq2q+1$。

假若 $N_{2p+1}\cap N_{2q+1}\neq\varnothing$，则存在正整数 $n\in N_{2p+1}\cap N_{2q+1}$，从而 $n\in N_{2p+1}$ 且 $n\in N_{2q+1}$，即存在 $s_1,s_2\in N$，

使得 $n=(2p+1)2^{s_1}$， $n=(2q+1)2^{s_2}$ 。于是可得 $(2p+1)2^{s_1}=(2q+1)2^{s_2}$ ，从而有

$$2p+1=(2q+1)2^{s_2-s_1}\ (s_2\ge s_1) \text{或} (2p+1)2^{s_1-s_2}=2q+1\ (s_2<s_1),$$

所以可得 $2p+1$ 是偶数或 $2q+1$ 是偶数或者 $2p+1=2q+1$ ，这与已知矛盾。所以假设不成立，即 $N_{2p+1}\cap N_{2q+1}=\varnothing$ 。

显然对任意的 $p\in N$ ， $N_{2p+1}\subset N_+$ ，从而可得 $\bigcup_{p=0}^{\infty}N_{2p+1}\subset N_+$ 。

对任意的 $n\in N_+$ ，因为 n 是有限数，所以

$$\left\{\frac{n}{2^p}\middle|p\in N\right\}\cap N_+$$

是有限集。记 $a=\min\left\{\frac{n}{2^p}\middle|p\in N\right\}\cap N_+$ ，则 a 是奇数。否则，若 a 是偶数，那么 $\frac{a}{2}$ 是整数，即

$$\frac{a}{2}\in\left\{\frac{n}{2^p}\middle|p\in N\right\}\cap N_+,$$

这与 a 的选取矛盾。于是可得 $a=2p_0+1,\ p_0\in N$ ，且 $a=\frac{n}{2^{s_0}},\ s_0\in N$ ，则可得 $n=(2p_0+1)2^{s_0}$ ，即 $n\in N_{2p_0+1}$ ，从而 $n\in\bigcup_{p=0}^{\infty}N_{2p+1}$ 。于是由数 n 的任意性可得 $\bigcup_{p=0}^{\infty}N_{2p+1}\supset N_+$ ，从而可得 $N_+=\bigcup_{p=0}^{\infty}N_{2p+1}$ 。□

引理 3.6 设 $\alpha>-1$ ，设 $m\in N,\ j\in N_+$ 且满足 $m\ge 8j$ 。若对任意的 $t\in N$ ，

$$\frac{(4j+2t+m)!\Gamma(12j+2t+2+\alpha)}{(12j+2t)!\Gamma(4j+2t+m+2+\alpha)}=\frac{(m+4t)!\Gamma(4t+8j+2+\alpha)}{(4t+8j)!\Gamma(m+4t+2+\alpha)},\tag{4}$$

则 $m=8j$ 。

证明因为 $m\ge 8j$ ，所以显然可得 $m>8j$ 或 $m=8j$ 。如果 $m>8j$ ，那么由 Gamma 函数的性质可得对任意的 $t\in N$ ，

$$\frac{(4j+2t+m)!\Gamma(12j+2t+2+\alpha)}{(12j+2t)!\Gamma(4j+2t+m+2+\alpha)}=\frac{(4j+2t+8j+1)\cdots(4j+2t+m)}{(4j+2t+8j+2+\alpha)\cdots(4j+2t+m+1+\alpha)},$$

$$\frac{(m+4t)!\Gamma(4t+8j+2+\alpha)}{(4t+8j)!\Gamma(m+4t+2+\alpha)}=\frac{(4t+8j+1)\cdots(4t+m)}{(4t+8j+2+\alpha)\cdots(4t+m+1+\alpha)},$$

从而(4)式可以改写为：对任意的 $t\in N$ ，

$$\left(\frac{4t+8j+2+\alpha}{4t+8j+1}\right)\cdots\cdots\left(\frac{4t+m+1+\alpha}{4t+m}\right)=\left(\frac{4j+2t+8j+2+\alpha}{4j+2t+8j+1}\right)\cdots\cdots\left(\frac{4j+2t+m+1+\alpha}{4j+2t+m}\right),$$

即对任意的 $t\in N$ ，

$$\left(1+\frac{1+\alpha}{4t+8j+1}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{1+\alpha}{4t+m}\right)=\left(1+\frac{1+\alpha}{4j+2t+8j+1}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{1+\alpha}{4j+2t+m}\right).\tag{5}$$

因为当 $t>\frac{m-4j-1}{2}$ 时， $\frac{1+\alpha}{4t+8j+1}<\frac{1+\alpha}{4j+2t+m}$ ，所以当 $t>\frac{m-4j-1}{2}$ 时，

$$\left(1+\frac{1+\alpha}{4t+8j+1}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{1+\alpha}{4t+m}\right)<\left(1+\frac{1+\alpha}{4j+2t+8j+1}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{1+\alpha}{4j+2t+m}\right),$$

这与(5)式矛盾，故 $m>8j$ 不成立。而且如果 $m=8j$，显然(4)式成立。□

定理 3.4 的证明 如果定理 3.4 中的条件(1)或条件(2)成立，则显然可得 B_φ 与 B_ψ 可交换。

如果 B_φ 与 B_ψ 可交换，即 $B_\varphi B_\psi = B_\psi B_\varphi$，则对任意的 $f(z)=z^q \in A_\alpha^2(D)$，$q\in N$，

$$B_\varphi B_\psi\left(z^q\right)=B_\psi B_\varphi\left(z^q\right). \tag{6}$$

既然 $\varphi\in H^\infty(D)$，则 $\varphi(z)=\sum_{p=0}^{\infty}a_p z^p$。

当 $q=4t+1\,(t\in N)$ 时，则由 Toeplitz 算子和 W 算子的性质可得

$$B_\psi B_\varphi\left(z^q\right)=\sum_{p=0}^{\infty}a_{4p+3}\frac{(2p+2t+m+2)!\,\Gamma(2p+2t+8j+4+\alpha)}{(2p+2t+8j+2)!\,\Gamma(2p+2t+m+4+\alpha)}z^{p+t+4j+1},$$

$$B_\varphi B_\psi\left(z^q\right)=0,$$

从而根据(6)式可得对任意的 $p\in N$，$a_{4p+3}=0$。

当 $q=4t+3\,(t\in N)$ 时，则由 Toeplitz 算子和 W 算子的性质可得

$$B_\psi B_\varphi\left(z^q\right)=\sum_{p=0}^{\infty}a_{4p+1}\frac{(2p+2t+m+2)!\,\Gamma(2p+2t+8j+4+\alpha)}{(2p+2t+8j+2)!\,\Gamma(2p+2t+m+4+\alpha)}z^{p+t+4j+1},$$

$$B_\varphi B_\psi\left(z^q\right)=0,$$

从而根据(6)式可得对任意的 $p\in N$，$a_{4p+1}=0$。于是可得对任意的 $p\in N$，$a_{2p+1}=0$，从而可得

$$\varphi(z)=\sum_{p=0}^{\infty}a_{2p}z^{2p}.$$

当 $q=4t+2\,(t\in N)$ 时，则由 Toeplitz 算子和 W 算子的性质可得

$$B_\psi B_\varphi\left(z^q\right)=\sum_{p=0}^{\infty}a_{4p+2}\frac{(2p+2t+m+2)!\,\Gamma(2p+2t+8j+4+\alpha)}{(2p+2t+8j+2)!\,\Gamma(2p+2t+m+4+\alpha)}z^{p+t+4j+1},$$

$$B_\varphi B_\psi\left(z^q\right)=0,$$

从而根据(6)式可得对任意的 $p\in N$，$a_{4p+2}=0$。既然 $\varphi(z)=\sum_{p=0}^{\infty}a_{2p}z^{2p}$，所以 $\varphi(z)=\sum_{p=0}^{\infty}a_{4p}z^{4p}$。

当 $q=4t\,(t\in N)$ 时，则由 Toeplitz 算子和 W 算子的性质可得

$$B_\psi B_\varphi\left(z^q\right)=z^{t+2j}\sum_{p=0}^{\infty}a_{4p}\frac{(2p+2t+m)!\,\Gamma(2p+2t+8j+2+\alpha)}{(2p+2t+8j)!\,\Gamma(2p+2t+m+2+\alpha)}z^{p+2j},$$

$$B_\varphi B_\psi\left(z^q\right)=z^{t+2j}\sum_{p=0}^{\infty}a_{4p}\frac{(m+4t)!\Gamma(4t+8j+2+\alpha)}{(4t+8j)!\Gamma(4t+m+2+\alpha)}z^{2p},$$

从而根据(6)式可得

$$\sum_{p=0}^{\infty}a_{4p}\frac{(2p+2t+m)!\Gamma(2p+2t+8j+2+\alpha)}{(2p+2t+8j)!\Gamma(2p+2t+m+2+\alpha)}z^{p+2j}=\sum_{p=0}^{\infty}a_{4p}\frac{(m+4t)!\Gamma(4t+8j+2+\alpha)}{(4t+8j)!\Gamma(4t+m+2+\alpha)}z^{2p},$$

即可得

$$\sum_{p=2j}^{\infty}a_{4p-8j}\frac{(2p-4j+2t+m)!\Gamma(2p+2t+4j+2+\alpha)}{(2p+2t+4j)!\Gamma(2p-4j+2t+m+2+\alpha)}z^{p}=\sum_{p=0}^{\infty}a_{4p}\frac{(m+4t)!\Gamma(4t+8j+2+\alpha)}{(4t+8j)!\Gamma(4t+m+2+\alpha)}z^{2p}.$$

于是由上式可得

$$\sum_{p=j}^{\infty} a_{4(2p+1)-8j} \frac{(4p-4j+2t+2+m)!\Gamma(4p+2t+4j+4+\alpha)}{(4p+2t+4j+2)!\Gamma(4p-4j+2t+m+4+\alpha)} z^{2p+1} = 0, \tag{7}$$

$$\sum_{p=0}^{j-1} a_{4p} \frac{(m+4t)!\Gamma(4t+8j+2+\alpha)}{(4t+8j)!\Gamma(m+4t+2+\alpha)} z^{2p} = 0, \tag{8}$$

$$\sum_{p=j}^{\infty} a_{8(p-j)} \frac{(4p-4j+2t+m)!\Gamma(4p+2t+4j+2+\alpha)}{(4p+2t+4j)!\Gamma(4p-4j+2t+m+2+\alpha)} z^{2p} = \sum_{p=j}^{\infty} a_{4p} \frac{(m+4t)!\Gamma(4t+8j+2+\alpha)}{(4t+8j)!\Gamma(m+4t+2+\alpha)} z^{2p}. \tag{9}$$

于是由(7)式和(8)式可得对任意的 $p \in N$，$a_{4(2p+1)} = 0$；对任意的 $0 \le p \le j-1$ 且 $p \in N$，$a_{4p} = 0$。而由(9)式可得对任意的 $p \in N$ 且 $p \ge j$，

$$a_{8(p-j)} \frac{(4p-4j+2t+m)!\Gamma(4p+2t+4j+2+\alpha)}{(4p+2t+4j)!\Gamma(4p-4j+2t+m+2+\alpha)} = a_{4p} \frac{(m+4t)!\Gamma(4t+8j+2+\alpha)}{(4t+8j)!\Gamma(m+4t+2+\alpha)}. \tag{10}$$

下面将根据整数 p 的不同取值分为 3 种情况展开讨论：(1) $p \ge 2j+1$；(2) $j \le p \le 2j-1$；(3) $p = 2j$。

情况 I 当 $p \ge 2j+1$ 时，则我们将分成 2 部分进行分析：$p = 2s+1$，$s \in N$ 且 $s \ge j$；$p = 2s$，$s \in N$ 且 $s \ge j+1$。

若 $p = 2s+1$，$s \in N$ 且 $s \ge j$，则由(10)式可得

$$a_{8(2s+1-j)} \frac{(8s+4-4j+2t+m)!\Gamma(8s+2t+4j+6+\alpha)}{(8s+4+2t+4j)!\Gamma(8s-4j+2t+m+6+\alpha)} = a_{4(2s+1)} \frac{(m+4t)!\Gamma(4t+8j+2+\alpha)}{(4t+8j)!\Gamma(m+4t+2+\alpha)}.$$

既然对任意的 $p \in N$，$a_{4(2p+1)} = 0$，则由上式可得对任意的 $s \in N$ 且 $s \ge j$，$a_{8(2s+1-j)} = 0$，即对任意的 $p \in N$，$a_{8(2p+1+j)} = 0$。

若 $p = 2s$，$s \in N$ 且 $s \ge j+1$，则由(10)式可得

$$a_{8(2s-j)} \frac{(8s-4j+2t+m)!\Gamma(8s+2t+4j+2+\alpha)}{(8s+2t+4j)!\Gamma(8s-4j+2t+m+2+\alpha)} = a_{8s} \frac{(m+4t)!\Gamma(4t+8j+2+\alpha)}{(4t+8j)!\Gamma(m+4t+2+\alpha)},$$

从而可得对任意的 $s \in N$ 且 $s \ge 1$，

$$a_{8(2s+j)} \frac{(8s+4j+2t+m)!\Gamma(8s+2t+12j+2+\alpha)}{(8s+2t+12j)!\Gamma(8s+4j+2t+m+2+\alpha)} = a_{8(s+j)} \frac{(m+4t)!\Gamma(4t+8j+2+\alpha)}{(4t+8j)!\Gamma(m+4t+2+\alpha)},$$

于是由上式及**引理 3.5** 可得对任意的 $s \in N$ 且 $i \in N$，

$$\begin{aligned} &a_{8\left[(2s+1)2^{i+1}+j\right]} \frac{\left[(2s+1)2^{i+3}+4j+2t+m\right]!\ \Gamma\left[(2s+1)2^{i+3}+2t+12j+2+\alpha\right]}{\left[(2s+1)2^{i+3}+2t+12j\right]!\ \Gamma\left[(2s+1)2^{i+3}+4j+2t+m+2+\alpha\right]}, \\ &= a_{8\left[(2s+1)2^{i}+j\right]} \frac{(m+4t)!\Gamma(4t+8j+2+\alpha)}{(4t+8j)!\Gamma(m+4t+2+\alpha)} \end{aligned}$$

既然对任意的 $p \in N$，$a_{8(2p+1+j)} = 0$，所以由上式可得对任意的 $p \in N$，$a_{8(2p+2+j)} = 0$。于是可得对任意的 $p \in N$ 且 $p \ge 1$，$a_{8(p+j)} = 0$。

情况 II 当 $j \le p \le 2j-1$ 时，则由(10)式可得对任意的 $s \in N$ 且 $0 \le s \le j-1$，

$$a_{8s} \frac{(4s+2t+m)!\Gamma(4s+2t+8j+2+\alpha)}{(4s+2t+8j)!\Gamma(4s+2t+m+2+\alpha)} = a_{4(s+j)} \frac{(m+4t)!\Gamma(4t+8j+2+\alpha)}{(4t+8j)!\Gamma(m+4t+2+\alpha)},$$

且 $8s<4(s+j)$。记 $\Delta_s=\dfrac{(4s+2t+m)!\Gamma(4s+2t+8j+2+\alpha)}{(4s+2t+8j)!\Gamma(4s+2t+m+2+\alpha)}$，$\Delta=\dfrac{(m+4t)!\Gamma(4t+8j+2+\alpha)}{(4t+8j)!\Gamma(m+4t+2+\alpha)}$，则由 Gamma 函数的性质可得对任意的 $s\in N$，$\Delta_s>0$ 且 $\Delta>0$。于是由上式可得对任意的 $s\in N$ 且 $0\le s\le j-1$，

$$a_{8s}\Delta_s=a_{4(s+j)}\Delta, \tag{11}$$

且 $8s<4(s+j)$。下面将运用数学归纳法对 $a_{8s}(0\le s\le j-1)$ 的取值情况展开讨论。

当 $s=0$ 时，由(11)式可得 $a_0\Delta_0=a_{4j}\Delta$。既然对任意的 $0\le p\le j-1$ 且 $p\in N$，$a_{4p}=0$，所以可得 $a_{4j}=0$，于是可得对任意的 $0\le p\le j$ 且 $p\in N$，$a_{4p}=0$。

当 $s=1$ 时，由(11)式可得 $a_8\Delta_1=a_{4(j+1)}\Delta$。因为 $8<4(1+j)$，所以可得 $8=4s_0$，$s_0\in N$ 且 $s_0\le j$，从而可得 $a_8=0$，且由上式可得 $a_{4(j+1)}=0$。于是可得对任意的 $0\le p\le j+1$ 且 $p\in N$，$a_{4p}=0$。

假设对任意的 $0\le p\le l$ 且 $p\in N$，$a_{8p}=0$，其中 $0\le l<j-1$，那么由(11)式可得 $a_{4(p+j)}=0$，从而可得对任意的 $0\le p\le j+l$ 且 $p\in N$，$a_{4p}=0$。

当 $s=l+1$ 时，由(11)式可得 $a_{8(l+1)}\Delta_{l+1}=a_{4(j+l+1)}\Delta$。因为 $8(l+1)<4(j+l+1)$，所以可得 $8(l+1)=4s_1$，$s_1\in N$ 且 $s_1\le j+l$，从而由假设可得 $a_{8(l+1)}=0$，且由上式可得 $a_{4(j+l+1)}=0$。

综上所述由数学归纳法可得对任意的 $0\le p\le j-1$ 且 $p\in N$，$a_{8p}=0$。于是此时我们可得函数 $\varphi(z)=a_{8j}z^{8j}$。

情况 III 当 $p=2j$ 时，由(10)式可得

$$a_{8j}\frac{(4j+2t+m)!\Gamma(12j+2t+2+\alpha)}{(12j+2t)!\Gamma(4j+2t+m+2+\alpha)}=a_{8j}\frac{(m+4t)!\Gamma(4t+8j+2+\alpha)}{(4t+8j)!\Gamma(m+4t+2+\alpha)},$$

从而可得

$$a_{8j}\left[\frac{(4j+2t+m)!\Gamma(12j+2t+2+\alpha)}{(12j+2t)!\Gamma(4j+2t+m+2+\alpha)}-\frac{(m+4t)!\Gamma(4t+8j+2+\alpha)}{(4t+8j)!\Gamma(m+4t+2+\alpha)}\right]=0,$$

于是可以得到 $a_{8j}=0$ 或者 $\dfrac{(4j+2t+m)!\Gamma(12j+2t+2+\alpha)}{(12j+2t)!\Gamma(4j+2t+m+2+\alpha)}-\dfrac{(m+4t)!\Gamma(4t+8j+2+\alpha)}{(4t+8j)!\Gamma(m+4t+2+\alpha)}=0$。

若 $a_{8j}=0$，则可得函数 $\varphi(z)\equiv 0$。

若 $\dfrac{(4j+2t+m)!\Gamma(12j+2t+2+\alpha)}{(12j+2t)!\Gamma(4j+2t+m+2+\alpha)}-\dfrac{(m+4t)!\Gamma(4t+8j+2+\alpha)}{(4t+8j)!\Gamma(m+4t+2+\alpha)}=0$，则由**引理 3.6** 可得 $m=8j$。又因为 $m-n=8j$，$n,m\in N$，所以 $n=0$，从而 $\psi(z)=z^m$ 是解析函数。于是由**定理 3.1** 显然有 φ 与 ψ 线性相关。□

基金项目

辽宁省教育厅科学研究经费项目(JDL2019026)。

参考文献

[1] Ho, M.C. (1996) Properties of Slant Toeplitz Operators. *Indiana University Mathematics Journal*, **45**, 843-862. https://doi.org/10.1512/iumj.1996.45.1973

[2] Ho, M.C. (1997) Spectra of Slant Toeplitz Operators with Continuous Symbol. *Michigan Mathematical Journal*, **44**, 157-166. https://doi.org/10.1307/mmj/1029005627

[3] Ho, M.C. (1997) Adjoints of Slant Toeplitz Operators. *Integral Equations and Operator Theory*, **29**, 301-302.

https://doi.org/10.1007/BF01320703

[4] Ho, M.C. (2001) Adjoints of Slant Toeplitz Operators II. *Integral Equations and Operator Theory*, **41**, 179-188. https://doi.org/10.1007/BF01295304

[5] Arora, S.C. and Batra, R. (2003) On Generalized Slant Toeplitz Operators. *Indian Journal of Mathematics*, **45**, 121-134.

[6] Arora, S.C. and Batra, R. (2005) Generalized Slant Toeplitz Operators on H^2. *Mathematische Nachrichten*, **278**, 347-355. https://doi.org/10.1002/mana.200310244

[7] 安恒斌, 蹇人宜. Bergman 空间上的斜 Toeplitz 算子[J]. 数学学报, 2004, 47(1): 103-110.

[8] Yang, J., Leng, A.P. and Lu, Y.F. (2007) k-Order Slant Toeplitz Operators on the Bergman Space. *Northeastern Mathematical Journal*, **23**, 403-412.

[9] Lu, Y.F., Liu, C.M. and Yang, J. (2010) Commutativity of k^{th}-Order Slant Toeplitz Operators. *Mathematische Nachrichten*, **283**, 1304-1313. https://doi.org/10.1002/mana.200710100

[10] Liu, C.M. and Lu, Y.F. (2013) Product and Commutativity of k^{th}-Order Slant Toeplitz Operators. *Abstract and Applied Analysis*, **45**, 900-914.

[11] Zhu, K.H. (1990) Operator Theory in Function Spaces. M. Dekker, New York.