Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(10), 1597-1614
Published Online October 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.1210174

Hans汉斯

带有强阻尼的粘弹性方程的随机吸引子

任玉晶，马文君，马巧珍*

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2022年9月11日；录用日期：2022年10月10日；发布日期：2022年10月18日

摘 要

关于有界域上的粘弹性问题已经被很多人研究，但目前还未见无界域上的相关研究，所以本文将考虑无界域上具有加性噪声的粘弹性方程解的渐近行为。为了克服在无界域上由Sobolev嵌入的非紧性所造成的困难，我们利用截断函数和算子分解的方法，得到了解的渐近紧性，最后，获得了与方程相关的动力系统随机吸引子的存在唯一性。

关键词

随机吸引子，粘弹性方程，渐近紧性

Random Attractors of Viscoelastic Equation with Strong Damping

Yujing Ren, Wenjun Ma, Qiaozhen Ma*

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Sep. 11th, 2022; accepted: Oct. 10th, 2022; published: Oct. 18th, 2022

Abstract

The viscoelastic problem in bounded domain has been studied by many authors, but there is no relevant study in unbounded domain. Therefore, in this paper, the asymptotic behavior of the solution of viscoelastic equation with additive noise in unbounded domain is considered. To overcome the difficulty caused by the noncompactness of Sobolev embeddedness on unbounded domains, a cut-off function and a decomposition trick are used to establish the asymptotic compactness of the solutions. Finally, we obtain the existence and uniqueness of random attractors for dynamical systems associated with the equation.

*通讯作者。

文章引用: 任玉晶, 马文君, 马巧珍. 带有强阻尼的粘弹性方程的随机吸引子[J]. 理论数学, 2022, 12(10): 1597-1614.
DOI: 10.12677/pm.2022.1210174

Keywords

Random Attractors, Viscoelastic Equation, Asymptotic Compactness

1. 介绍

本文研究如下定义在 $\mathbb{R}^n$ 上具有加性噪声的粘弹性方程的长时间动力学行为，

$$u_{tt}-\Delta u_{tt}-\Delta u-\Delta u_t+f(x,u)=h(x)\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}, \tag{1.1}$$

初值条件为

$$u(x,\tau)=u_0(x),\ u_t(x,\tau)=u_1(x), \tag{1.2}$$

其中 $x\in\mathbb{R}^n$，$t>\tau$，$\tau\in\mathbb{R}$，$h\in L^2(\mathbb{R}^n)$，$W(t)$ 是定义在概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的双边实值 Wiener 过程。

随着科学技术的不断发展，各式各样的非线性问题引起了大家日益密切的关注，这类问题源自于应用数学，物理学等各种应用学科中的非线性偏微分方程。固体力学有很多不同的研究分类，粘弹性理论就是其中之一，如高聚合材料混凝土，某种生物组织以及在高速运动下发生变形的金属材料，不仅有弹性特质，而且还拥有粘性特征，这种兼备两者不同特点的材料称为粘弹性体。

早在 1970 年，Dafermos 在文献[1]中，讨论了确定的一维粘弹性问题，建立了一些存在性结果，然后证明了光滑单调递减松弛函数在 t 趋于无穷时解趋于零。但是，没有具体的衰变速率。在文献[2]中。Dafermos 在关于记忆核的凸性条件下，也得到了类似的结果。在这之后，许多作者对粘弹性问题做了大量的研究，建立了许多存在性和长期行为的结果。例如：在文献[3]中，Cavalcanti 和 Oqundo 研究了如下方程

$$u_{tt}-k_0\Delta u+\int_0^t div\left[a(x)g(t-s)\nabla u(s)\right]\mathrm{d}s+f(u)+b(x)h(u_t)=0, \tag{1.3}$$

其中，a,b 是非增函数，f,h 是幂函数。在松弛函数 g 和 $g'(t)\le-\xi(t)G(g(t))$ 的条件下，得到了非线性局部摩擦阻尼作用的部分粘弹性非线性波动方程的指数衰减率和多项式衰减率。类似结果见文献[4] [5] [6]等。

秦玉明等在文献[7]中研究了具有非自治扰动和历史记忆的非自治粘弹性方程

$$|u_t|^\rho u_{tt}-\Delta u-\Delta u_{tt}+\int_0^{+\infty}g(s)\Delta u(t-s)\mathrm{d}s+u_t=\varepsilon\sigma(x,t),\quad x\in\Omega,t>\tau, \tag{1.4}$$

其中，g 是记忆核函数，$\sigma=\sigma(x,t)$ 是非自治项，称为一个特征，并证明了方程(1.4)的拉回吸引子的存在性和上半连续性。

在文献[8]中，彭小明等用阻尼函数 $g(u_t)$ 代替弱阻尼 u_t，研究了如下方程

$$|u_t|^\rho u_{tt}-\Delta u_{tt}-\alpha\Delta u+\int_{-\infty}^t\mu(t-s)\Delta u(s)\mathrm{d}s+f(u)+g(u_t)=h(x), \tag{1.5}$$

其中，g 是阻尼函数，f 是源项，h 是外力项，并得到了全局吸引子的存在性。

在文献[9]中，张等研究了带衰退的粘弹性方程的长时间行为

$$u_{tt}-\Delta u_{tt}-\gamma\Delta u+\int_0^{+\infty}k'(s)\Delta u(t-s)\mathrm{d}s+f(u)=g(x), \tag{1.6}$$

其中，g 是外力项，f 是非线性函数，k 是记忆核。上式主要特点是不含有强阻尼项 $-\Delta u_t$，通过证明粘弹性方程解生成的半群的渐近紧性，得到了全局吸引子的存在性以及上半连续性。

Belhannache 在文献[10]中，考虑了带有非线性摩擦阻尼和松弛函数满足 $g'(t)\le-\xi(t)G(g(t))$ 条件的粘弹性方程，利用乘法和凸函数的一些性质，由 Galaerkin 方法建立了解的存在性，并证明了一般衰减结果。在文献[11]中，作者假设 $g'(t)\le-\xi(t)H(g(t))$，考虑了带有弱内部阻尼，时变延迟项和非线性加权项的粘弹性方程，证明了一个吸引性结果。在文献[12]中，作者证明了粘弹性非退化的 Kirchhoff 方程初边值问题解的全局存在性和衰退性。

就我们所知，还未见具有噪声扰动的粘弹性方程的研究结果。因此，我们将在本文研究无界域上的粘弹性方程随机吸引子的存在性。关于随机吸引子的概念可以在文献[11] [12] [13] [14]中查到。对于此方程在无界域上的研究，最主要的困难是 Sobolev 嵌入的非紧性，它与解的渐近紧性密切相关。我们参考文献[15]中的方法，利用截断函数和一些分解技巧克服了在 $\mathbb{R}^n$ 上 Sobolev 嵌入的非紧性造成的困难，证明了粘弹性方程(1.1)随机吸引子的存在性。

本文结构如下，关于随机动力系统的一些基本概念和结果在下一部分阐述。在第三部分，定义了 $\mathbb{R}^n$ 上粘弹性方程(1.1)的一个连续随机动力系统。在第四部分，我们对于大的空间和时间变量下的解进行一致估计，最后在第五部分证明了方程(1.1)随机吸引子的存在性。

我们定义 $\|\cdot\|$ 和 $(\cdot,\cdot)$ 是 $L^2(R^n)$ 上的范数和内积，且 $\|\cdot\|_p$ 表示 $L^p(R^n)$ 上的范数。

2. 准备工作

在这一部分，我们给出一些与随机吸引子相关的基本概念，见文献[13] [14] [15] [16] [17]。

设 $(X,\|\cdot\|_X)$ 是具有 Borelσ-代数 $\mathcal{B}(X)$ 的一个可分的 Hilbert 空间，并且 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 是一个概率空间。

定义 2.1 [15]称 $(\Omega,\mathcal{F},P,(\theta_t)_{t\in R})$ 是一个度量动力系统，如果 $\theta:R\times\Omega\to\Omega$ 是 $(\mathcal{B}(R)\times\mathcal{F},\mathcal{F})$-可测的，$\theta_0$ 是 Ω 上的恒等映射，且对于所有的 $s,t\in R$，有 $\theta_{s+t}=\theta_t\circ\theta_s$ 和对于所有的 $t\in R$，有 $\theta_tP=P$。

定义 2.2 [15]设 $(\Omega,\mathcal{F},P,(\theta_t)_{t\in R})$ 是一个度量动力系统，映射

$$\Phi:R^+\times\Omega\times X\to X,\ (t,\omega,x)\mapsto\Phi(t,\omega,x),$$

如果它是 $(\mathcal{B}(R^+)\times\mathcal{F}\times\mathcal{B}(X),\mathcal{B}(X))$-可测的，则称 Φ 是 X 上的一个连续随机动力系统(RDS)，并且对于 $P-a.e.\ \omega\in\Omega$，满足以下三个条件：

(i) $\Phi(0,\omega,\cdot)$ 是定义 X 在上的恒等映射；

(ii) 对于所有的 $t,s\in R^+$，$\Phi(t+s,\omega,\cdot)=\Phi(t,\theta_s\omega,\cdot)\circ\Phi(s,\omega,\cdot)$；

(iii) 对于所有的 $t\in R^+$，$\Phi(t,\omega,\cdot):X\to X$ 是连续的。

定义 2.3 [16]称 X 上的一个有界子集 $\{B(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$ 是关于 $(\theta_t)_{t\in R}$ 缓增的，如果对于所有的 $\beta>0$，

$$\lim_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{-\beta t}d\left(B(\theta_{-t}\omega)\right)=0,\ P-a.e.\ \omega\in\Omega,$$

其中 $d(B)=\sup\limits_{x\in B}\|x\|_X$。

定义 2.4 设 $\mathcal{D}$ 是 X 的随机子集的集合，并且 $\{K(\omega)\}_{\omega\in\Omega}\in\mathcal{D}$，称 $\{K(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$ 是 Φ 在 $\mathcal{D}$ 上的一个拉回吸收集，如果对于每一个 $B\in\mathcal{D}$，存在 $t_B(\omega)>0$，使得对所有的 $t\ge t_B(\omega)$

$$\Phi\left(t,\theta_{-t}\omega,B\left(\theta_{-t}\omega\right)\right)\subseteq K\left(\omega\right),\quad P-a.e.\ \omega\in\Omega.$$

定义 2.5 [16]设 $\mathcal{D}$ 是 X 的随机子集的集合，$\mathcal{D}$ 被称为内闭集合，如果对于所有的 $\omega\in\Omega$，有 $D=D(\omega)_{\omega\in\Omega}\in\mathcal{D}$ 和 $\tilde{D}=\left\{\tilde{D}(\omega)\subseteq X:\omega\in\Omega\right\}$，$\tilde{D}(\omega)\subseteq D(\omega)$，意味着 $\tilde{D}\in\mathcal{D}$。

定义 2.6 [15]设 $\mathcal{D}$ 是 X 的随机子集的集合，如果 $P-a.e.\ \omega\in\Omega$，当 $t_n\to\infty$ 时，$\left\{\Phi\left(t_n,\theta_{-t_n}\omega,x_n\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ 在 X 上有一个收敛子列，并且 $x_n\in B\left(\theta_{-t_n}\omega\right)$ 有 $\left\{\left(B(\omega)\right)\right\}_{\omega\in\Omega}\in\mathcal{D}$，则称 Φ 在 X 上是 $\mathcal{D}$-拉回渐近紧的。

定义 2.7 [13]设 $\mathcal{D}$ 是 X 的随机子集的集合，并且 $\left\{\left(A(\omega)\right)\right\}_{\omega\in\Omega}\in\mathcal{D}$，则称 $\left\{\left(A(\omega)\right)\right\}_{\omega\in\Omega}$ 是 Φ 上的一个 $\mathcal{D}$-随机吸引子(或者 $\mathcal{D}$-拉回吸引子)，如果对于 $P-a.e.\ \omega\in\Omega$，满足下列条件：

(i) 对所有的 $x\in X$，$\mathcal{A}(\omega)$ 是紧的，并且 $\omega\mapsto d\left(x,\mathcal{A}(\omega)\right)$ 是可测的；

(ii) $\left\{\mathcal{A}(\omega)\right\}_{\omega\in\Omega}$ 是不变的，即

$$\Phi\left(t,\omega,\mathcal{A}(\omega)\right)=\mathcal{A}\left(\theta_t\omega\right),\quad \forall t\geq 0;$$

(iii) $\left\{\mathcal{A}(\omega)\right\}_{\omega\in\Omega}$ 吸引 $\mathcal{D}$ 中的每一个集合，也就是说对于每一个 $\left\{\left(B(\omega)\right)\right\}_{\omega\in\Omega}\in\mathcal{D}$。

其中 $d\left(Y,Z\right)=\sup\limits_{y\in Y}\inf\limits_{z\in Z}\left\|y-z\right\|_X$ 是对于所有的 $Y\in X$ 和 $Z\in X$ 所给定的 Hausdorff 半距离。

定理 2.8 [15]设 $\mathcal{D}$ 是 X 上的随机子集的一个内闭集合，并且 Φ 是 X 上的一个连续的随机动力系统。若 $\left\{K(\omega)\right\}_{\omega\in\Omega}$ 是 Φ 在 $\mathcal{D}$ 上的一个闭吸收集，并且 Φ 在 X 上是 $\mathcal{D}$-拉回渐近紧的，那么 Φ 有唯一的 $\mathcal{D}$-随机吸引子 $\left\{\mathcal{A}(\omega)\right\}_{\omega\in\Omega}$，且

$$\mathcal{A}(\omega)=\bigcap_{\tau\geq 0}\overline{\bigcup_{t\geq\tau}\Phi\left(t,\theta_{-t}\omega,K\left(\theta_{-t}\omega\right)\right)}.$$

3. 粘弹性方程

在这一部分，我们定义 $H^1\left(R^n\right)\times H^1\left(R^n\right)$ 上与粘弹性方程相关的连续随机动力系统。设 $z=u_t+\delta u$，这里 δ 是一个小的正常数，则问题(1.1)~(1.2)转化为，

$$u_t+\delta u=z,\tag{3.1}$$

$$z_t-\delta z+\delta^2u-\left(1-\delta+\delta^2\right)\Delta u-\left(1-\delta\right)\Delta z-\Delta z_t+f\left(x,u\right)=h\left(x\right)\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t},\tag{3.2}$$

初值条件为

$$u\left(x,\tau\right)=u_0\left(x\right),\quad z\left(x,\tau\right)=z_0\left(x\right).\tag{3.3}$$

其中，$z_0\left(x\right)=u_1\left(x\right)+\delta u_0\left(x\right)$，$x\in\mathbb{R}^n$，$t>\tau$，以及 $\tau\in\mathbb{R}$，$\delta>0$，$h\in L^2\left(\mathbb{R}^n\right)$，对所有的 $\omega\in\Omega$，$\omega(t)=W(t)$，$\omega(0)=0$，定义一族保测位移算子

$$\theta_t\omega(\cdot)=\omega(\cdot+t)-\omega(t),$$

那么 $\left(\Omega,\mathcal{F},P,\left(\theta_t\right)_{t\in R}\right)$ 是一个度量动力系统。定义 $F\left(x,u\right)=\int_0^u f\left(x,s\right)\mathrm{d}s$，$x\in R^n$，$u\in R$。假设非线性项 f 满足如下条件：

$$\left|f\left(x,u\right)\right|\leq a_1\left|u\right|^r+\varphi_1\left(x\right),\quad \varphi_1\in L^2\left(R^n\right),\tag{3.4}$$

$$f\left(x,u\right)u\geq a_2F\left(x,u\right)+\varphi_2\left(x\right),\quad \varphi_2\in L^1\left(R^n\right),\tag{3.5}$$

$$F(x,u) \ge a_3|u|^{r+1} - \varphi_3(x),\ \ \varphi_3 \in L^1(R^n), \tag{3.6}$$

$$|f_u(x,u)| \le a_4|u|^{r-1} + \varphi_4(x),\ \ \varphi_4 \in H^1(R^n), \tag{3.7}$$

其中当 $n=1,2$ 时，$1 \le r < \infty$；当 $n=3$ 时，$1 \le r < 5$。a_1，a_2，a_3，a_4 是正常数。

下面，我们将粘弹性系统(3.1)~(3.3)转换为一个具有随即参数的确定系统。设 $h_1 = (I-\Delta)^{-1}h$ 和 $v(t,\tau,\omega) = z(t,\tau,\omega) - h_1\omega(t)$，那么(3.1)~(3.3)变为

$$u_t + \delta u = v + h_1(x)\omega(t), \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned} &v_t - \Delta v_t - \delta v - (1-\delta)\Delta v + \delta^2 u - (1-\delta+\delta^2)\Delta u \\ &-\delta h_1(x)\omega(t) - (1-\delta)\Delta h_1(x)\omega(t) + f(x,u) = 0 \end{aligned}, \tag{3.9}$$

$$u(x,\tau) = u_0(x),\ \ v(x,\tau) = v_0(x), \tag{3.10}$$

其中 $v_0(x) = z_0(x) - h_1(x)\omega(\tau)$。如果 $h \in L^2(R^n)$，那么 $h_1 \in H^2(R^n)$。

利用与文献[18] [19]类似的方法，我们可以证明对 $P-a.e.\ \omega \in \Omega, \tau \in R$ 和 $(u_0,v_0) \in H^1(R^n) \times H^1(R^n)$，问题(3.8)~(3.10)有唯一解

$(u(\cdot,\tau,\omega), v(\cdot,\tau,\omega)) \in C([\tau,\infty), H^1(R^n) \times H^1(\mathbb{R}^n))$，$(u(\tau,\tau,\omega), v(\tau,\tau,\omega)) = (u_0,v_0)$，并且解关于初值 (u_0,v_0) 在 $H^1(R^n) \times H^1(R^n)$ 上连续。

由此，对每个 $(t,\omega,(u_0,z_0)) \in R^+ \times \Omega \times H^1(R^n) \times H^1(R^n)$，定义映射 $\Phi: R^+ \times \Omega \times H^1(R^n) \times H^1(R^n) \to H^1(R^n) \times H^1(R^n)$，

$$\Phi(t,\omega,(u_0,z_0)) = (u(t,\tau,\omega), z(t,\tau,\omega)) = (u(t,\tau,\omega), v(t,\tau,\omega) + h_1(x)\omega(t)),$$

那么 Φ 是 $(\Omega,\mathcal{F},P,(\theta_t)_{t\in R})$ 上的一个连续随机动力系统，且对所有的 $\omega \in \Omega$ 和 $t \ge \tau$，Φ 满足，

$$\Phi(t,\theta_{-t}\omega,(u_0,z_0)) = (u(t,\tau,\theta_{-t}\omega), z(t,\tau,\theta_{-t}\omega)) = (u(\tau,-t,\omega), z(\tau,-t,\omega)).$$

设 $\delta > 0$ 足够小，使得 $1-\delta > 0$，$1-\delta+\delta^2 > 0$，令

$$k = \frac{1}{2}\min\{\delta, 1-\delta, \delta a_2\}, \tag{3.11}$$

4. 一致估计

在这一部分，我们将在 $H^1(R^n) \times H^1(R^n)$ 上对问题(3.8)~(3.10)的解进行估计。

引理 4.1 假设 $h \in L^2(R^n)$，条件(3.4)~(3.7)成立，$B = \{B(\omega)\}_{\omega\in\Omega} \in \mathcal{D}$，$(u_0,v_0) \in B(\theta_\tau\omega)$，从而对每个 $\tau \le T$ 和 $P-a.e.\ \omega \in \Omega$，存在 $T = T(B,\omega) < 0$，使得(3.8)~(3.10)的解 $(u(t,\tau,\omega), v(t,\tau,\omega))$，满足对每个 $t \in [\tau, 0]$，

$$\|u(t,\tau,\omega)\|_{H^1(R^n)}^2 + \|v(t,\tau,\omega)\|_{H^1(R^n)}^2 \le \mathrm{e}^{-kt}c_1(\omega), \tag{4.1}$$

并且

$$\int_\tau^t \mathrm{e}^{k\xi}\left(\|u(\xi,\tau,\omega)\|_{H^1(R^n)}^2 + \|v(\xi,\tau,\omega)\|_{H^1(R^n)}^2\right)\mathrm{d}\xi \le c_1(\omega), \tag{4.2}$$

其中 $c_1(\omega)$ 是一个正的随机函数，且当 $s \to -\infty$，对任意的 $\beta > 0$，

$$e^{\beta s} c_1(\theta_s \omega) \to 0. \tag{4.3}$$

证明用 v 与(3.9)在 $L^2(R^n)$ 上作内积可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|v\|^2+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla v\|^2-\delta\|v\|^2+(1-\delta)\|\nabla v\|^2+\delta^2(u,v)-(1-\delta+\delta^2)(\Delta u,v)\\&-\delta\omega(t)(h_1(x),v)-(1-\delta)\omega(t)(\Delta h_1(x),v)+(f(x,u),v)=0\end{aligned}, \tag{4.4}$$

由(3.8)我们有

$$(u,v)=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|^2+\delta\|u\|^2-\omega(t)(u,h_1(x)), \tag{4.5}$$

$$-(\Delta u,v)=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla u\|^2+\delta\|\nabla u\|^2-\omega(t)(\nabla u,\nabla h_1(x)), \tag{4.6}$$

$$(f(x,u),v)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{R^n}F(x,u)\mathrm{d}x+\delta(f(x,u),u)-\omega(t)(f(x,u),h_1(x)), \tag{4.7}$$

将(4.5)~(4.7)代入(4.4)得到

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|v\|^2+\|\nabla v\|^2+\delta^2\|u\|^2+(1-\delta+\delta^2)\|\nabla u\|^2+2\int_{R^n}F(x,u)\mathrm{d}x\right)\\&-2\delta\|v\|^2+2(1-\delta)\|\nabla v\|^2+2\delta^3\|u\|^2+2(1-\delta+\delta^2)\delta\|\nabla u\|^2+2\delta(f(x,u),u)\\&=2\delta^2\omega(t)(u,h_1(x))+2(1-\delta+\delta^2)\omega(t)(\nabla u,\nabla h_1(x))+2\delta\omega(t)(h_1(x),v)\\&=-2(1-\delta)\omega(t)(\nabla h_1(x),\nabla v)+2\omega(t)(f(x,u),h_1(x))\end{aligned}. \tag{4.8}$$

下面对(4.8)中等式右边的各项进行估计。由 Hölder 不等式和 Young 不等式得到

$$2\delta^2\omega(t)(u,h_1(x))\le\delta^3\|u\|^2+c|\omega(t)|^2\|h_1(x)\|^2, \tag{4.9}$$

$$2(1-\delta+\delta^2)\omega(t)(\nabla u,\nabla h_1(x))\le\delta(1-\delta+\delta^2)\|\nabla u\|^2+c|\omega(t)|^2\|\nabla h_1(x)\|^2, \tag{4.10}$$

$$-2(1-\delta)\omega(t)(\nabla h_1(x),\nabla v)\le(1-\delta)\|\nabla v\|^2+c|\omega(t)|^2\|\nabla h_1(x)\|^2 \tag{4.11}$$

$$2\delta\omega(t)(h_1(x),v)\le-3\delta\|v\|^2+c|\omega(t)|^2\|h_1(x)\|^2, \tag{4.12}$$

由(3.5)可得

$$(f(x,u),u)\ge a_2\int_{R^n}F(x,u)\mathrm{d}x+\int_{R^n}\varphi_2(x)\mathrm{d}x, \tag{4.13}$$

运用 Hölder 不等式和 Young 不等式，我们由(3.4)和(3.6)

$$\begin{aligned}2\omega(t)(f(x,u),h_1(x))&\le2|\omega(t)|\left(\left(a_1|u|^r+\varphi_1(x)\right)|h_1(x)|\right)\\&\le2|\omega(t)|\|\varphi_1\|\|h_1\|+a|\omega(t)|\|h_1\|_{r+1}\left(\int_{R^n}|u|^{r+1}\mathrm{d}x\right)^{\frac{r}{r+1}}\\&\le2|\omega(t)|\|\varphi_1\|\|h_1\|+a|\omega(t)|\|h_1\|_{r+1}\left(\int_{R^n}(F(x,u)+\varphi_3)\right)^{\frac{r}{r+1}}\\&\le2|\omega(t)|\|\varphi_1\|\|h_1\|+\delta a\int_{R^n}F(x,u)\mathrm{d}x+\delta a\int_{R^n}\varphi_3(x)\mathrm{d}x+a|\omega(t)|^{r+1}\|h_1\|_{H^1(R^n)}^{r+1}\end{aligned}. \tag{4.14}$$

因为 $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\in L^2(R^n)$ 和 $h_1\in H^2(R^n)$，将(4.9)~(4.14)代入到(4.8)中，我们得到

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|v\|^2+\|\nabla v\|^2+\delta^2\|u\|^2+\left(1-\delta+\delta^2\right)\|\nabla u\|^2+2\int_{R^n}F(x,u)\mathrm{d}x\right)\\&+\delta\|v\|^2+(1-\delta)\|\nabla v\|^2+\delta^3\|u\|^2+\left(1-\delta+\delta^2\right)\delta\|\nabla u\|^2+\delta a_2\int_{R^n}F(x,u)\mathrm{d}x\\&\le c\left(1+|\omega(t)|^2+|\omega(t)|^{r+1}\right)\end{aligned}. \tag{4.15}$$

结合(3.6)和(3.11)

$$\delta a_2\int_{R^n}F(x,u)\mathrm{d}x\ge 2k\int_{R^n}F(x,u)\mathrm{d}x+\left(2k-\delta a_2\right)\int_{R^n}\varphi_3\mathrm{d}x, \tag{4.16}$$

利用(3.11)和(4.16),(4.15)可以化为

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|v\|^2+\|\nabla v\|^2+\delta^2\|u\|^2+\left(1-\delta+\delta^2\right)\|\nabla u\|^2+2\int_{R^n}F(x,u)\mathrm{d}x\right)\\&+k\left(\|v\|^2+\|\nabla v\|^2+\delta^2\|u\|^2+\left(1-\delta+\delta^2\right)\|\nabla u\|^2+a_2\int_{R^n}F(x,u)\mathrm{d}x\right)\\&+k\left(\|v\|^2+\|\nabla v\|^2+\delta^2\|u\|^2+\left(1-\delta+\delta^2\right)\|\nabla u\|^2\right)\\&\le c\left(1+|\omega(t)|^2+|\omega(t)|^{r+1}\right)\end{aligned}. \tag{4.17}$$

在方程(4.18)两边乘以 $\mathrm{e}^{k\xi}$，然后关于 ξ 在 (τ,t) 上积分，我们得到

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^{kt}\left(\|v(t,\tau,\omega)\|^2+\|\nabla v(t,\tau,\omega)\|^2+\delta^2\|u(t,\tau,\omega)\|^2+\left(1-\delta+\delta^2\right)\|\nabla u(t,\tau,\omega)\|^2+2\int_{R^n}F(x,u(t,\tau,\omega))\mathrm{d}x\right)\\&+k\int_\tau^t\mathrm{e}^{k\xi}\left(\|v(t,\tau,\omega)\|^2+\|\nabla v(t,\tau,\omega)\|^2+\delta^2\|u(t,\tau,\omega)\|^2+\left(1-\delta+\delta^2\right)\|\nabla u(t,\tau,\omega)\|^2\right)\mathrm{d}\xi\\&\le\mathrm{e}^{k\tau}\left(\|v_0\|^2+\|\nabla v_0\|^2+\delta^2\|u_0\|^2+\left(1-\delta+\delta^2\right)\|\nabla u_0\|^2+2\int_{R^n}F(x,u_0)\mathrm{d}x\right)\\&+c\int_\tau^t\mathrm{e}^{k\xi}\left(1+|\omega(\xi)|^2+|\omega(\xi)|^{r+1}\right)\mathrm{d}\xi\end{aligned}. \tag{4.18}$$

运用(3.4)和(3.5)，我们有

$$\begin{aligned}\int_{R^n}F(x,u_0)\mathrm{d}x&\le a\int_{R^n}\left(|f(x,u_0)u_0|+|\varphi_2(x)|\right)\mathrm{d}x\\&\le a\int_{R^n}\left(|u_0|^{r+1}+|u_0|^2+|\varphi_1(x)|^2+|\varphi_2(x)|\right)\mathrm{d}x\\&\le a\left(1+\|u_0\|^2+\|u_0\|_{H^1(R^n)}^{r+1}\right)\end{aligned}. \tag{4.19}$$

由(3.6)我们有

$$2\int_{R^n}F(x,u(t,\tau,\omega))\mathrm{d}x\ge 2\int_{R^n}\left(a_3|u(t,\tau,\omega)|^{r+1}-\varphi_3(x)\right)\mathrm{d}x\ge -2\int_{R^n}\varphi_3(x)\mathrm{d}x. \tag{4.20}$$

因为 $(u_0,v_0)\in B(\theta_t\omega)$，将(4.19)和(4.20)应用到(4.18)中我们得到

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^{kt}\left(\|v(t,\tau,\omega)\|^2+\|\nabla v(t,\tau,\omega)\|^2+\delta^2\|u(t,\tau,\omega)\|^2+\left(1-\delta+\delta^2\right)\|\nabla u(t,\tau,\omega)\|^2\right)\\&+k\int_\tau^t\mathrm{e}^{k\xi}\left(\|v(t,\tau,\omega)\|^2+\|\nabla v(t,\tau,\omega)\|^2+\delta^2\|u(t,\tau,\omega)\|^2+\left(1-\delta+\delta^2\right)\|\nabla u(t,\tau,\omega)\|^2\right)\mathrm{d}\xi\\&\le c\left(1+\mathrm{e}^{k\tau}\left(d\left(B(\theta_\tau\omega)\right)\right)^{r+1}+\int_\tau^t\mathrm{e}^{k\xi}\left(1+|\omega(\xi)|^2+|\omega(\xi)|^{r+1}\right)\mathrm{d}\xi\right)\end{aligned}. \tag{4.21}$$

设 $r(\omega)=\int_{-\infty}^0\mathrm{e}^{k\xi}\left(1+|\omega(\xi)|^2+|\omega(\xi)|^{r+1}\right)\mathrm{d}\xi$。因为 $B=\{B(\omega)\}_{\omega\in\Omega}\in\mathcal{D}$，存在 $T=T(B,\omega)<0$，使得对

所有的 $\tau\le T$， $c\mathrm{e}^{k\tau}\left(d\left(B\left(\theta_\tau\omega\right)\right)\right)^{r+1}\le r\left(\omega\right)$。在这种情况下，(4.21)的右端可以被 $c\left(1+r\left(\omega\right)\right)$ 控制。设 $c_1\left(\omega\right)=c\left(1+r\left(\omega\right)\right)$。如果我们可以证明 $c_1\left(\omega\right)$ 是缓增的，那么这个证明就可以完成。于是

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{k\tau}c_1\left(\theta_\tau\omega\right)&\le c\mathrm{e}^{k\tau}+c\mathrm{e}^{k\tau}\int_{-\infty}^0\mathrm{e}^{k\xi}\left(\left|\left(\theta_\tau\omega\right)\left(\xi\right)\right|^2+\left|\left(\theta_\tau\omega\right)\left(\xi\right)\right|^{r+1}\right)\mathrm{d}\xi\\&\le c\mathrm{e}^{k\tau}+c\mathrm{e}^{k\tau}\int_{-\infty}^0\mathrm{e}^{k\xi}\left(\left|\omega\left(\tau\right)\right|^2+\left|\omega\left(\tau\right)\right|^{r+1}\right)\mathrm{d}\xi+c\mathrm{e}^{k\tau}\int_{-\infty}^0\mathrm{e}^{k\xi}\left(\left|\omega\left(\tau+\xi\right)\right|^2+\left|\omega\left(\tau+\xi\right)\right|^{r+1}\right)\mathrm{d}\xi\\&\le c\mathrm{e}^{k\tau}+\frac{c}{k}\mathrm{e}^{k\tau}\left(\left|\omega\left(\tau\right)\right|^2+\left|\omega\left(\tau\right)\right|^{r+1}\right)+c\int_{-\infty}^0\mathrm{e}^{k\tau}\left(\left|\omega\left(s\right)\right|^2+\left|\omega\left(s\right)\right|^{r+1}\right)\mathrm{d}s\end{aligned}.\quad(4.22)$$

根据(4.22)， $c_1\left(\omega\right)$ 满足(4.3)，也就意味着(4.22)满足引理 4.1。

下面引理中给出了 v_t 在 $H^1\left(R^n\right)$ 上的有界性。

引理 4.2 假 $h\in L^2\left(R^n\right)$ 设，条件(3.4)~(3.7)成立， $B=\left\{B\left(\omega\right)\right\}_{\omega\in\Omega}\in\mathcal{D}$， $\left(u_0,v_0\right)\in B\left(\theta_\tau\omega\right)$，那么对所有的 $\tau\le T$ 和 $P-a.e.\ \omega\in\Omega$，存在 $T=T\left(B,\omega\right)<0$，使得(3.8)~(3.10)的 $\left(u\left(t,\tau,\omega\right),v\left(t,\tau,\omega\right)\right)$，满足对所有的 $t\in\left[\tau,0\right]$，

$$\left\|u\left(t,\tau,\omega\right)\right\|_{H^1\left(R^n\right)}^{2r}+\left\|v\left(t,\tau,\omega\right)\right\|_{H^1\left(R^n\right)}^{2r}+\left\|v\left(t,\tau,\omega\right)\right\|_{H^1\left(R^n\right)}^{2}\le c\mathrm{e}^{-kt}c_2\left(\omega\right)+c\left(1+\mathrm{e}^{-kt}+\left|\omega\left(t\right)\right|^2\right).\quad(4.23)$$

$$c_2\left(\omega\right)=\left(\int_{-\infty}^0\mathrm{e}^{\frac{k}{r}s}\left(\left|\omega\left(s\right)\right|^2+\left|\omega\left(s\right)\right|^{r+1}\right)\mathrm{d}s\right)^r.$$

证明我们从(4.17)和(4.19)中得到，存在 $T=T\left(B,\omega\right)<0$，使得对所有 $\tau\le T$ 的和 $t\in\left[\tau,0\right]$，

$$\begin{aligned}&\left\|v\left(t,\tau,\omega\right)\right\|^2+\left\|\nabla v\left(t,\tau,\omega\right)\right\|^2+\delta^2\left\|u\left(t,\tau,\omega\right)\right\|^2+\left(1-\delta+\delta^2\right)\left\|\nabla u\left(t,\tau,\omega\right)\right\|^2+2\int_{R^n}F\left(x,u\left(t,\tau,\omega\right)\right)\mathrm{d}x\\&\le\mathrm{e}^{-\frac{k}{r}t}+c\mathrm{e}^{-\frac{k}{r}t}\int_{-\infty}^0\mathrm{e}^{\frac{k}{r}\xi}\left(1+\left|\omega\left(\xi\right)\right|^2+\left|\omega\left(\xi\right)\right|^{r+1}\right)\mathrm{d}\xi\end{aligned}.\quad(4.24)$$

根据(4.20)，对所有的 $\tau\le T$ 和 $t\in\left[\tau,0\right]$，

$$\begin{aligned}&\left\|v\left(t,\tau,\omega\right)\right\|^2+\left\|\nabla v\left(t,\tau,\omega\right)\right\|^2+\delta^2\left\|u\left(t,\tau,\omega\right)\right\|^2+\left(1-\delta+\delta^2\right)\left\|\nabla u\left(t,\tau,\omega\right)\right\|^2\\&\le c+\mathrm{e}^{-\frac{k}{r}t}+c\mathrm{e}^{-\frac{k}{r}t}\int_{-\infty}^0\mathrm{e}^{\frac{k}{r}\xi}\left(1+\left|\omega\left(\xi\right)\right|^2+\left|\omega\left(\xi\right)\right|^{r+1}\right)\mathrm{d}\xi\end{aligned}.\quad(4.25)$$

用 v_t 与(3.9)在 $L^2\left(R^n\right)$ 上做内积，我们得到

$$\begin{aligned}\left\|v_t\right\|^2+\left\|\nabla v_t\right\|^2&=\delta\left(v,v_t\right)-\left(1-\delta\right)\left(\nabla v,\nabla v_t\right)-\delta^2\left(u,v_t\right)-\left(1-\delta+\delta^2\right)\left(\nabla u,\nabla v_t\right)\\&\quad+\delta\omega\left(t\right)\left(h_1\left(x\right),v_t\right)-\left(1-\delta\right)\omega\left(t\right)\left(\nabla h_1\left(x\right),\nabla v_t\right)-\left(f\left(x,u\right),v_t\right)\end{aligned}.\quad(4.26)$$

对于(4.26)右边的项，我们可以得到如下估计：

$$-\left(-\delta v+\delta^2u+\delta\omega\left(t\right)h_1\left(x\right),v_t\right)\le\frac{1}{2}\left\|v_t\right\|^2+c\left(\left\|v\right\|^2+\left\|u\right\|^2+\left|\omega\left(t\right)\right|^2\left\|h_1\right\|^2\right),\quad(4.27)$$

$$\begin{aligned}&-\left(\left(1-\delta\right)\nabla v+\left(1-\delta+\delta^2\right)\nabla u+\left(1-\delta\right)\omega\left(t\right)\nabla h_1\left(x\right),\nabla v_t\right)\\&\le\frac{1}{2}\left\|\nabla v_t\right\|^2+c\left(\left\|\nabla v\right\|^2+\left|\nabla u\right|^2+\left|\omega\left(t\right)\right|^2\left|\nabla h_1\right|^2\right)\end{aligned}.\quad(4.28)$$

由(3.4)，我们有

$$\begin{aligned}\left|\left(f(x,u),v_t\right)\right| &\le c_1\int_{R^n}|u|^r|v_t|\mathrm{d}x+\int_{R^n}|\varphi_1||v_t|\mathrm{d}x\\&\le c_1\|u\|_{r+1}^r\|v_t\|_{r+1}+\|\varphi_1\|\|v_t\|\\&\le c_1\|u\|_{H^1(R^n)}^r\|v_t\|_{H^1(R^n)}+\|\varphi_1(x)\|\|v_t\|\\&\le\frac{1}{4}\|v_t\|^2+\frac{1}{4}\|\nabla v_t\|^2+c\left(1+\|u\|_{H^1(R^n)}^{2r}\right)\end{aligned}. \tag{4.29}$$

根据(4.27)~(4.29)，$\varphi_1\in L^2(R^n)$，以及 $h_1\in L^2(R^n)$，(4.26)可以变为如下形式

$$\|v_t\|^2+\|\nabla v_t\|^2\le c\left(1+|\omega(t)|^2+\|v\|_{H^1(R^n)}^{2r}+\|u\|_{H^1(R^n)}^{2r}+\|u_t\|_{H^1(R^n)}^{2r}\right), \tag{4.30}$$

由(4.25)，我们可以从(4.30)中得到，对于所有的 $\tau\le T$，$t\in[\tau,0]$，

$$\|v_t\|^2+\|\nabla v_t\|^2\le c\left(1+|\omega(t)|^2\right)+ce^{-kt}+ce^{-kt}\left(\int_{-\infty}^0 e^{\frac{k}{r}\xi}\left(1+|\omega(\xi)|^2+|\omega(\xi)|^{r+1}\right)\mathrm{d}\xi\right)^r, \tag{4.31}$$

根据(4.25)和(4.31)，引理 4.2 得证。

下面我们估计粘弹性方程在大的空间和时间变量下，解的一致尾部估计。给定 $k\ge1$，定义集合 $Q_k=\{x\in R^n:|x|<k\}$，$R^n\setminus Q_k$ 是 R^n 上 Q_k 的组成部分，我们得到以下估计。

引理 4.3 假设 $h\in L^2(R^n)$，条件(3.4)~(3.7)成立，$B=\{B(\omega)\}_{\omega\in\Omega}\in\mathcal{D}$，$(u_0,v_0)\in B(\theta_\tau\omega)$，那么对所有的 $\epsilon>0$ 和 $P-a.e.\ \omega\in\Omega$，存在 $T=T(B,\omega)<0$，$k_0=k_0(\omega,\epsilon)>0$ 使得对所有的 $\tau\le T$，$k\ge k_0$，(3.8)~(3.10)的解 $(u(t,\tau,\omega),v(t,\tau,\omega))$，满足对每个的 $t\in[\tau,0]$，

$$\int_{R^n\setminus Q_k}\left(|u(t,\tau,\omega)|^2+|\nabla u(t,\tau,\omega)|^2+|v(t,\tau,\omega)|^2+|\nabla v(t,\tau,\omega)|^2\right)\mathrm{d}x\le\epsilon e^{-2kt}. \tag{4.32}$$

证明设 $\rho(s)$ 是一个光滑函数，使得对所有的 $s\in(R^n)$，$0\le\rho(s)\le1$ 并且

$$\rho(s)=\begin{cases}0, & \text{当}|s|<1\text{时},\\1, & \text{当}|s|>1\text{时}.\end{cases} \tag{4.33}$$

存在一个正常数 c，对所有的 $s\in R$，$|\rho'(s)|\le c$，$|\rho''(s)|\le c$，用 $\rho\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)v$ 与(3.9)在 $L^2(R^n)$ 上作内积

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{R^n}\rho\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)\left(|v|^2+|\nabla v|^2\right)\mathrm{d}x-2\int_{R^n}\rho\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)\left(\delta|v|^2-(1-\delta)|\nabla v|^2\right)\mathrm{d}x\\&+2\delta^2\int_{R^n}\rho\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)vu\mathrm{d}x-2\left(1-\delta+\delta^2\right)\int_{R^n}\rho\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)v\Delta u\mathrm{d}x+2\int_{R^n}\rho\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)f(x,u)v\mathrm{d}x\\&=2\delta\int_{R^n}\rho\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)\omega(t)h_1(x)v\mathrm{d}x-2\int_{R^n}\rho'\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)\frac{2}{k^2}(\nabla v_t\cdot x)v\mathrm{d}x\\&+2(\delta-1)\int_{R^n}\rho'\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)\frac{2}{k^2}(\nabla v\cdot x)v\mathrm{d}x+2(1-\delta)\int_{R^n}\rho\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)\omega(t)v\cdot\Delta h_1(x)\mathrm{d}x\end{aligned}. \tag{4.34}$$

根据(3.8)，得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{R^n}\rho\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)\left(|v|^2+|\nabla v|^2+\delta^2|u|^2+\left(1-\delta+\delta^2\right)|\nabla u|^2+2F(x,u)\right)\mathrm{d}x\\
&+2\int_{R^n}\rho\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)\left(-\delta|v|^2+(1-\delta)|\nabla v|^2+\delta^3|u|^2+\left(1-\delta+\delta^2\right)\delta|\nabla u|^2+\delta f(x,u)u\right)\mathrm{d}x\\
&=2\int_{R^n}\rho\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)\left(\delta^2 h_1(x)\omega(t)u+\left(1-\delta+\delta^2\right)\nabla u\nabla h_1(x)\omega(t)+\delta\omega(t)h_1(x)v\right.\\
&\left.-(1-\delta)\omega(t)\nabla v\nabla h_1(x)\omega(t)\right)\mathrm{d}x+2\int_{R^n}\rho\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)f(x,u)h_1(x)\omega(t)\mathrm{d}x\\
&-2\int_{R^n}\rho'\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)\frac{2}{k^2}(\nabla v_t\cdot x)v\mathrm{d}x+2(\delta-1)\int_{R^n}\rho'\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)\frac{2}{k^2}(\nabla v\cdot x)v\mathrm{d}x\\
&-2\left(1-\delta+\delta^2\right)\int_{R^n}\rho'\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)\frac{2}{k^2}(\nabla u\cdot x)v\mathrm{d}x-2(1-\delta)\int_{R^n}\rho'\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)\frac{2}{k^2}\omega(t)\left(\nabla h_1(x)\cdot x\right)v\mathrm{d}x
\end{aligned}
\quad. \tag{4.35}
$$

由(3.4)~(3.6)，我们有

$$
\int_{R^n}\rho\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)f(x,u)u\mathrm{d}x\ge a_2\int_{R^n}\rho\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)F(x,u)\mathrm{d}x+\int_{R^n}\rho\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)\varphi_2(x)\mathrm{d}x\,. \tag{4.36}
$$

根据(3.4)和(3.6)，我们有

$$
\begin{aligned}
2\int_{R^n}\rho\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)f(x,u)h_1(x)\omega(t)\mathrm{d}x&\le\int_{R^n}\rho\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)|\varphi_1(x)|^2\mathrm{d}x+\int_{R^n}\rho\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)|h_1(x)|^2|\omega(t)|^2\mathrm{d}x\\
&+\delta a_2\int_{R^n}\rho\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)F(x,u)\mathrm{d}x+\delta a_2\int_{R^n}\rho\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)\varphi_3(x)\mathrm{d}x\,.\\
&+c\int_{R^n}\rho\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)|h_1(x)|^{r+1}|\omega(t)|^{r+1}\mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{4.37}
$$

由(4.33)，我们有

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n}\rho'\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)\frac{2}{k^2}(\nabla v_t\cdot x)v\mathrm{d}x&\le\int_{k\le|x|\le\sqrt{2}k}\left|\rho'\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)\right|\frac{2|x|}{k^2}|v||\nabla v_t|\mathrm{d}x\\
&\le\frac{c}{k}\int_{\mathbb{R}^n}\left(|v|^2+|\nabla v_t|^2\right)\mathrm{d}x\le\frac{c}{k}\left(\|v\|^2+\|\nabla v_t\|^2\right)
\end{aligned}\quad. \tag{4.38}
$$

类似于(4.38)也可以得到

$$
\int_{\mathbb{R}^n}\rho'\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)\frac{2}{k^2}\left(\nabla h_1(x)\cdot x\right)\omega(t)v\mathrm{d}x\le\frac{c}{k}\left(\|v\|^2+|\omega(t)|^2\|\nabla h_1\|^2\right), \tag{4.39}
$$

$$
\int_{\mathbb{R}^n}\rho'\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)\frac{2}{k^2}(\nabla u\cdot x)v\mathrm{d}x\le\frac{c}{k}\left(\|u\|^2+\|\nabla u\|^2\right), \tag{4.40}
$$

$$
\int_{\mathbb{R}^n}\rho'\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)\frac{2}{k^2}(\nabla v\cdot x)v\mathrm{d}x\le\frac{c}{k}\left(\|v\|^2+\|\nabla v\|^2\right). \tag{4.41}
$$

将(4.36)~(4.41)应用到(4.35)中，得到

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^n}\rho\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)\left(|v|^2+|\nabla v|^2+\delta^2|u|^2+\left(1-\delta+\delta^2\right)|\nabla u|^2+2F(x,u)\right)\mathrm{d}x\\&+\int_{\mathbb{R}^n}\rho\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)\left(-\delta|v|^2+(1-\delta)|\nabla v|^2+\delta^3|u|^2+\left(1-\delta+\delta^2\right)\delta|\nabla u|^2+\delta a_2F(x,u)\right)\mathrm{d}x\\&\le\frac{c}{k}\left(\|v\|^2+\|\nabla u\|^2+\|\nabla v\|^2+\|\nabla v_t\|^2\right)+\frac{c}{k}|\omega(t)|^2\|\nabla h_1\|^2\\&\quad+c|\omega(t)|^2\int_{\mathbb{R}^n}\rho\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)\left(|h_1(x)|^2+|\nabla h_1(x)|^2\right)\mathrm{d}x\\&\quad+c\int_{\mathbb{R}^n}\rho\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)\left(|\varphi_1(x)|^2+|\varphi_2(x)|+|\varphi_3(x)|+|h_1(x)|^{r+1}|\omega(t)|^{r+1}\right)\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{4.42}$$

由于 $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\in L^1(\mathbb{R}^n)$， $h_1\in H^2(\mathbb{R}^n)$，并且对于 $|x|\le k$， $\rho\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)=0$。那么存在一个 $k_1=k_1(\epsilon)\ge 1$，使得对所有 $k\ge k_1$，

$$\begin{aligned}&\frac{c}{k}|\omega(t)|^2\|\nabla h_1\|^2+c|\omega(t)|^2\int_{\mathbb{R}^n}\rho\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)\left(|h_1(x)|^2+|\nabla h_1(x)|^2\right)\mathrm{d}x\\&+c\int_{\mathbb{R}^n}\rho\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)\left(|\varphi_1(x)|^2+|\varphi_2(x)|+|\varphi_3(x)|+|h_1(x)|^{r+1}|\omega(t)|^{r+1}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{c}{k}|\omega(t)|^2\|\nabla h_1\|^2+c|\omega(t)|^2\int_{|x|\ge k}\rho\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)\left(|h_1(x)|^2+|\nabla h_1(x)|^2\right)\mathrm{d}x\\&\quad+c\int_{|x|\ge k}\rho\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)\left(|\varphi_1(x)|^2+|\varphi_2(x)|+|\varphi_3(x)|+|h_1(x)|^{r+1}|\omega(t)|^{r+1}\right)\mathrm{d}x\\&\qquad\le\frac{c}{k}|\omega(t)|^2\|\nabla h_1\|^2+c|\omega(t)|^2\int_{|x|\ge k}\left(|h_1(x)|^2+|\nabla h_1(x)|^2\right)\mathrm{d}x\\&\qquad\quad+c\int_{|x|\ge k}\left(|\varphi_1(x)|^2+|\varphi_2(x)|+|\varphi_3(x)|+|h_1(x)|^{r+1}|\omega(t)|^{r+1}\right)\mathrm{d}x.\\&\qquad\le c\epsilon\left(1+|\omega(t)|^2+|\omega(t)|^{r+1}\right)\end{aligned}\tag{4.43}$$

根据(3.11)和(4.43)，对所有的 $k\ge k_1$，(4.42)可以变为

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^n}\rho\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)\left(|v|^2+|\nabla v|^2+\delta^2|u|^2+\left(1-\delta+\delta^2\right)|\nabla u|^2+2F(x,u)\right)\mathrm{d}x\\&+2k\int_{\mathbb{R}^n}\rho\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)\left(-|v|^2-|\nabla v|^2+\delta^2|u|^2+\left(1-\delta+\delta^2\right)|\nabla u|^2+2F(x,u)\right)\mathrm{d}x.\\&\le\frac{c}{k}\left(\|v\|^2+\|\nabla u\|^2+\|\nabla v\|^2+\|\nabla v_t\|^2\right)+c\epsilon\left(1+|\omega(t)|^2+|\omega(t)|^{r+1}\right)\end{aligned}\tag{4.44}$$

下面将 t 换为 ξ，上式两边同乘以 $\mathrm{e}^{2k\xi}$，然后关于 ξ 在 $(\tau,t),t\le 0$ 求积分，我们发现对于所有的 $k\le k_1$，

$$
\begin{aligned}
&e^{2kt}\int_{\mathbb{R}^n}\rho\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)\left(\left|v(t,\tau,\omega)\right|^2+\left|\nabla v(t,\tau,\omega)\right|^2+\delta^2\left|u(t,\tau,\omega)\right|^2+\left(1-\delta+\delta^2\right)\left|\nabla u(t,\tau,\omega)\right|^2+2F\left(x,u(t,\tau,\omega)\right)\right)dx\\
&\le e^{2k\tau}\int_{\mathbb{R}^n}\rho\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)\left(\left|v_0\right|^2+\left|\nabla v_0\right|^2+\delta^2\left|u_0\right|^2+\left(1-\delta+\delta^2\right)\left|\nabla u_0\right|^2+2F\left(x,u_0\right)\right)dx\\
&+\frac{c}{k}\int_\tau^t e^{2k\xi}\left(\left\|v(\xi,\tau,\omega)\right\|^2+\left\|\nabla u(\xi,\tau,\omega)\right\|^2+\left\|\nabla v(\xi,\tau,\omega)\right\|^2+\left\|\nabla v_t(\xi,\tau,\omega)\right\|^2\right)d\xi\\
&+c\epsilon\int_{-\infty}^0 e^{2k\xi}\left(\left|\omega(\xi)\right|^2+\left|\omega(\xi)\right|^{r+1}\right)d\xi+c\epsilon
\end{aligned}
.(4.45)
$$

与(4.21)的估计类似，并且假设$(u_0,v_0)\in B(\theta_\tau\omega)$，存在$T=T(B,\omega,\epsilon)<0$使得对所有的$\tau\le T$，

$$
e^{2k\tau}\int_{\mathbb{R}^n}\rho\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)\left(\left|u_0\right|^2+\left|\nabla v_0\right|^2+\delta^2\left|u_0\right|^2+\left(1-\delta+\delta^2\right)\left|\nabla u_0\right|^2+2F\left(x,u_0\right)\right)dx\le\epsilon. \tag{4.46}
$$

另一方面，由引理4.1和4.2，存在$k_2(\epsilon)\ge k_1(\epsilon)$，$T_1\le T$使得对所有的$k\ge k_2$，$\tau\le T_1$，(4.45)右边项可以被$c\in r_1(\omega)$控制，其中$r_1(\omega)$是一个正的随机变量，从这以及(4.46)，并根据(4.45)我们得到对于所有的$k\ge k_2$，$\tau\le T_1$，$t\in[\tau,0]$，

$$
\begin{aligned}
&e^{2kt}\int_{\mathbb{R}^n}\rho\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)\left(\left|v(t,\tau,\omega)\right|^2+\left|\nabla v(t,\tau,\omega)\right|^2+\delta^2\left|u(t,\tau,\omega)\right|^2\right.\\
&\left.+\left(1-\delta+\delta^2\right)\left|\nabla u(t,\tau,\omega)\right|^2+2F\left(x,u(t,\tau,\omega)\right)\right)dx\le c\epsilon r(\omega)
\end{aligned}
, \tag{4.47}
$$

其中$r(\omega)$是一个正的随机变量，利用(3.6)我们有

$$
-2\int_{\mathbb{R}^n}\rho\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)F\left(x,u(t,\tau,\omega)\right)dx\le 2\int_{\mathbb{R}^n}\rho\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)\varphi_3(x)dx\le 2\int_{|x|\ge k}\rho\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)\varphi_3(x)dx\le 2\int_{|x|\ge k}\left|\varphi_3(x)\right|dx\ .(4.48)
$$

因为$\varphi_3\in L^1(\mathbb{R}^n)$，由(4.48)我们发现存在$k_3=k_3(\epsilon)\ge k_2$，使得对所有的$k\ge k_3$，

$$
-2\int_{\mathbb{R}^n}\rho\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)F\left(x,u(t,\tau,\omega)\right)dx\le\epsilon. \tag{4.49}
$$

然后我们可以从(4.47)和(4.49)中得到，对于所有的$\tau\le T$，$k\ge k_3$以及$t\in[\tau,0]$，

$$
\begin{aligned}
&e^{2kt}\int_{|x|\ge\sqrt{2}k}\left(\left|v(t,\tau,\omega)\right|^2+\left|\nabla v(t,\tau,\omega)\right|^2+\delta^2\left|u(t,\tau,\omega)\right|^2+\left(1-\delta+\delta^2\right)\left|\nabla u(t,\tau,\omega)\right|^2\right)dx\\
&\le e^{2kt}\int_{\mathbb{R}^n}\rho\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)\left(\left|v(t,\tau,\omega)\right|^2+\left|\nabla v(t,\tau,\omega)\right|^2+\delta^2\left|u(t,\tau,\omega)\right|^2+\left(1-\delta+\delta^2\right)\left|\nabla u(t,\tau,\omega)\right|^2\right)dx.\\
&\le\epsilon+c\epsilon r(\omega)
\end{aligned}
\tag{4.50}
$$

引理4.3得证。

现在我们检验在有界域上(3.8)~(3.10)解的行为。我们定义$\psi(s)=1-\rho(s)$，这里的$\rho(s)$是在(4.33)中所定义的。设$k\ge1$，定义

$$
\tilde{u}(x,t,\tau,\omega)=\psi\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)u(x,t,\tau,\omega). \tag{4.51}
$$

$$\tilde{v}(x,t,\tau,\omega)=\psi\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)v(x,t,\tau,\omega), \tag{4.52}$$

$$\Delta\tilde{v}=(\Delta\psi)v+2\nabla\psi\cdot\nabla v+\psi\Delta v, \tag{4.53}$$

$$\Delta\tilde{v}_t=(\Delta\psi)v_t+2\nabla\psi\cdot\nabla v_t+\psi\Delta v_t. \tag{4.54}$$

利用(4.53)~(4.54)，我们有

$$\psi\Delta v=\Delta\tilde{v}-v\Delta\psi-2\nabla\psi\cdot\nabla v, \tag{4.55}$$

$$\psi\Delta v_t=\Delta\tilde{v}_t-v_t\Delta\psi-2\nabla\psi\cdot\nabla v_t. \tag{4.56}$$

因为 $\tilde{u}(x,t,\tau,\omega),\tilde{v}(x,t,\tau,\omega)\in H_0^1(Q_{2k})$，用(3.8)~(3.9)乘以 $\psi\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)$，得

$$\tilde{u}_t+\delta\tilde{u}-\tilde{v}=\psi\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)h_1(x)\omega(t), \tag{4.57}$$

$$\begin{aligned}
&\tilde{v}_t-\Delta\tilde{v}_t-\delta\tilde{v}-(1-\delta)\Delta\tilde{v}+\delta^2\tilde{u}-(1-\delta+\delta^2)\Delta\tilde{u}-\delta\psi\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)h_1(x)\omega(t)\\
&-(1-\delta)\Delta h_1(x)\omega(t)\psi\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)+\psi\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)f(x,u)\\
&=-\left(v_t\Delta\psi\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)+2\nabla v_t\nabla\psi\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)\right)-(1-\delta)\left(v\Delta\psi\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)+2\nabla\psi\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)\nabla v\right)\\
&\quad-(1-\delta+\delta^2)\left(u\Delta\psi\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)+2\nabla u\nabla\psi\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)\right)
\end{aligned}. \tag{4.58}$$

考虑特征值问题

$$-\Delta\tilde{u}=\lambda\tilde{u}，\ x\in Q_{2k}，\ \tilde{u}\big|_{\partial Q_{2k}}=0. \tag{4.59}$$

因此，问题有一族特征值 $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ 对应的特征函数 $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ 的集合，使得 $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ 是 $L^2(Q_{2k})$ 上的一个标准正交基，并且，当 $j\to\infty$ 时，

$$\lambda_1\le\lambda_2\le\cdots\le\lambda_j\to\infty.$$

给定 n，设 $X_n=span\{e_1,\cdots,e_n\}$，$P_n:L^2(Q_{2k})\to X_n$ 是投影算子。

引理 4.4 假设 $h\in L^2(R^n)$，条件(3.4)~(3.7)成立，$B=\{B(\omega)\}_{\omega\in\Omega}\in\mathcal{D}$，那么对于每个 $\epsilon>0$ 和 $P-a.e.\ \omega\in\Omega$，存在 $K=K(\omega,\epsilon),T=T(B,\omega,\epsilon)<0$ 和 $N=N(\omega,\epsilon)$，使得对于所有的 $k\ge K,\tau\le T,n\ge N$，

$$\left\|(I-P_n)\tilde{u}(\cdot,0,\tau,\omega)\right\|_{H_0^1(Q_{2k})}+\left\|(I-P_n)\tilde{v}(\cdot,0,\tau,\omega)\right\|_{H_0^1(Q_{2k})}\le\epsilon. \tag{4.60}$$

证明.设 $\tilde{u}_{n,1}=P_n\tilde{u}$，$\tilde{u}_{n,2}=\tilde{u}-\tilde{u}_{n,1}$，$\tilde{v}_{n,1}=P_n\tilde{v}$，并且 $\tilde{v}_{n,2}=\tilde{v}-\tilde{v}_{n,1}$，将 $(I-P_n)$ 应用到(4.57)中得到：

$$\tilde{v}_{n,2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{u}_{n,2}+\delta\tilde{u}_{n,2}-(I-P_n)\left(\psi\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)h_1(x)\omega(t)\right). \tag{4.61}$$

将$(I-P_n)$应用到(4.58)，接着用$\tilde{v}_{n,2}$在$L^2(Q_{2k})$上作内积，我们得

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\tilde{v}_{n,2}\|^2+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla\tilde{v}_{n,2}\|^2-\delta\|\tilde{v}_{n,2}\|^2+(1-\delta)\|\nabla\tilde{v}_{n,2}\|^2+\delta^2(\tilde{u}_{n,2},\tilde{v}_{n,2})-(1-\delta+\delta^2)(\Delta\tilde{u}_{n,2},\tilde{v}_{n,2})\\
&-\delta\omega(t)\left(\psi\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)h_1(x),\tilde{v}_{n,2}\right)-(1-\delta)\omega(t)\left(\psi\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)\Delta h_1(x),\tilde{v}_{n,2}\right)+\left(\psi\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)f(x,u),\tilde{v}_{n,2}\right)\\
&=-\left(v_t\Delta\psi\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)+2\nabla v_t\nabla\psi\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right),\tilde{v}_{n,2}\right)-(1-\delta)\left(v\Delta\psi\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)+2\nabla v\nabla\psi\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right),\tilde{v}_{n,2}\right)\\
&\quad-(1-\delta+\delta^2)\left(u\Delta\psi\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)+2\nabla u\nabla\psi\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right),\tilde{v}_{n,2}\right)
\end{aligned}
\quad. \tag{4.62}
$$

由(4.61)我们有

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\tilde{v}_{n,2}\|^2+\|\nabla\tilde{v}_{n,2}\|^2+\delta^2\|\tilde{u}_{n,2}\|^2+(1-\delta+\delta^2)\|\nabla\tilde{u}_{n,2}\|^2\right)-2\delta\|\tilde{v}_{n,2}\|^2\\
&+2(1-\delta)\|\nabla\tilde{v}_{n,2}\|^2+2\delta^3\|\tilde{u}_{n,2}\|^2+2(1-\delta+\delta^2)\delta\|\nabla\tilde{u}_{n,2}\|^2\\
&=2\delta\omega(t)\left(\psi\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)h_1(x),\tilde{v}_{n,2}\right)+\Delta\psi\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)\left(-2v_t-2(1-\delta)v-2(1-\delta+\delta^2)u,\tilde{v}_{n,2}\right)\\
&\quad+\nabla\psi\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)\left(-4\nabla v_t-4(1-\delta)\nabla v-4(1-\delta+\delta^2)\nabla u,\tilde{v}_{n,2}\right)+2\delta^2\omega(t)\left(\tilde{u}_{n,2},\psi\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)h_1(x)\right)\\
&\quad-2(1-\delta+\delta^2)\omega(t)\left(\tilde{u}_{n,2},\Delta\psi\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)h_1(x)\right)+2(1-\delta)\omega(t)\left(\psi\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)\Delta h_1(x),\tilde{v}_{n,2}\right)\\
&\quad-2\left(\psi\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)f(x,u),\tilde{v}_{n,2}\right)
\end{aligned}
\quad. \tag{4.63}
$$

由于$\psi'(s)=0, s\notin(1,2)$，那么我们得

$$
\left|\nabla\psi\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)\right|=\left|\psi'\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)\frac{2|x|}{k^2}\right|\le\left|\psi'\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)\right|\frac{2\sqrt{2}k}{k^2}\le\frac{c}{k}, \tag{4.64}
$$

并且

$$
\left|\Delta\psi\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)\right|=\left|\psi''\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)\frac{4|x|^2}{k^4}\psi'\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)\frac{2|x|}{k^2}\right|. \tag{4.65}
$$

借助(4.64)~(4.65)，可将(4.63)右边的项进行如下估计：

$$
2\delta^2\omega(t)\left(\tilde{u}_{n,2},\psi\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)h_1(x)\right)\le\frac{1}{2}\delta(1-\delta+\delta^2)\|\nabla\tilde{u}_{n,2}\|^2+c|\omega(t)|^2\|h_1\|^2, \tag{4.66}
$$

$$-2\left(1-\delta+\delta^2\right)\omega(t)\left(\tilde{u}_{n,2},\Delta\psi\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)h_1(x)\right)$$

$$=-2\left(1-\delta+\delta^2\right)\omega(t)\left(\tilde{u}_{n,2},\Delta\psi\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)h_1(x)\right)+2\nabla\psi\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)\nabla h_1(x)+\psi\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)\Delta h_1(x) \quad , \tag{4.67}$$

$$\le\delta^3\|\tilde{u}_{n,2}\|^2+\frac{1}{2}\delta\left(1-\delta+\delta^2\right)\|\nabla\tilde{u}_{n,2}\|^2+\frac{c}{k^4}|\omega(t)|^2\|h_1\|^2+\frac{c}{k^2}|\omega(t)|^2\|\nabla h_1\|^2+c|\omega(t)|^2\|\Delta h_1\|^2$$

$$2(1-\delta)\omega(t)\left(\psi\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)\Delta h_1(x),\tilde{v}_{n,2}\right)\le\frac{1}{3}(1-\delta)\|\nabla\tilde{v}_{n,2}\|^2+c|\omega(t)|^2\|h_1\|^2, \tag{4.68}$$

$$2\delta\omega(t)\left(\psi\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)h_1(x),\tilde{v}_{n,2}\right)\le\frac{1}{3}(1-\delta)\|\nabla\tilde{v}_{n,2}\|^2+c|\omega(t)|^2\|h_1\|^2, \tag{4.69}$$

$$\left(\Delta\psi\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)\left(-2v_t+2\delta v+2\left(1-\delta+\delta^2\right)u\right),\tilde{v}_{n,2}\right)\le-\frac{1}{2}\delta\|\tilde{v}_{n,2}\|^2+\frac{c}{k^4}\left(\|v_t\|^2+\|v\|^2+\|u\|^2\right) \tag{4.70}$$

那么由(3.4)和插值不等式，对(4.63)右边的两项进行如下估计：

$$\left(\nabla\psi\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)\left(-4\nabla v_t+4\delta\nabla v-4\left(1-\delta+\delta^2\right)\delta u\right),\tilde{v}_{n,2}\right)\le-\frac{1}{2}\delta\|\tilde{v}_{n,2}\|^2+\frac{c}{k^4}\left(\|\nabla v_t\|^2+\|\nabla v\|^2+\|\nabla u\|^2\right), \tag{4.71}$$

$$\begin{aligned}2\left(\psi\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)f(x,u),\tilde{v}_{n,2}\right)&\le2c_1\int_{\mathbb{R}^n}\psi\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)|u|^r|\tilde{v}_{n,2}|\mathrm{d}x+2\int_{\mathbb{R}^n}\psi\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)\varphi_1(x)|\tilde{v}_{n,2}|\mathrm{d}x\\&\le c\|u\|_{r+1}^1\|\tilde{v}_{n,2}\|_{r+1}+2\|\varphi_1\|\|\tilde{v}_{n,2}\|\le c\|u\|_{r+1}^1\|\nabla\tilde{v}_{n,2}\|^\theta\|\tilde{v}_{n,2}\|^{1-\theta}+2\|\varphi_1\|\|\nabla\tilde{v}_{n,2}\|.\\&\le c\|u\|_{H^1}^r\|\nabla\tilde{v}_{n,2}\|+2\|\varphi_1\|\|\nabla\tilde{v}_{n,2}\|\le\frac{1}{3}(1-\delta)\|\nabla\tilde{v}_{n,2}\|^2+c\|u\|_{H^1}^{2r}+c\|\varphi_1\|^2\end{aligned} \tag{4.72}$$

根据(3.11)和(4.66)~(4.72)，(4.63)可以变为如下形式

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\tilde{v}_{n,2}\|^2+\|\nabla\tilde{v}_{n,2}\|^2+\delta^2\|\tilde{u}_{n,2}\|^2+\left(1-\delta+\delta^2\right)\|\nabla\tilde{u}_{n,2}\|^2\right)\\&+2k\left(\|\tilde{v}_{n,2}\|^2+\|\nabla\tilde{v}_{n,2}\|^2+\delta^2\|\tilde{u}_{n,2}\|^2+\left(1-\delta+\delta^2\right)\|\nabla\tilde{u}_{n,2}\|^2\right)\\&\le\frac{c}{k^4}\left(\|v_t\|^2+\|v\|^2+\|u\|^2\right)+\frac{c}{k^2}\left(\|\nabla v_t\|^2+\|\nabla v\|^2+\|\nabla u\|^2\right)+\frac{c}{k^4}|\omega(t)|^2\|h_1\|^2\\&+\frac{c}{k^2}|\omega(t)|^2\|\nabla h_1\|^2+c|\omega(t)|^2\|h_1\|^2+c|\omega(t)|^2\|\Delta h_1\|^2+c\|u\|_{H^1}^{2r}+c\|\varphi_1\|^2\end{aligned}. \tag{4.73}$$

因为 φ_1 以及 $h_1\in L^2\left(\mathbb{R}^n\right)$，那么有 $N_1=N_1(\epsilon)$，并且 $k_1=k_1(\epsilon)$，使得对所有的 $n\ge N_1$，$k\ge k_1$，从(4.73)中我们得到

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\tilde{v}_{n,2}\|^2+\|\nabla\tilde{v}_{n,2}\|^2+\delta^2\|\tilde{u}_{n,2}\|^2+\left(1-\delta+\delta^2\right)\|\nabla\tilde{u}_{n,2}\|^2\right)\\&+2k\left(\|\tilde{v}_{n,2}\|^2+\|\nabla\tilde{v}_{n,2}\|^2+\delta^2\|\tilde{u}_{n,2}\|^2+\left(1-\delta+\delta^2\right)\|\nabla\tilde{u}_{n,2}\|^2\right)\\&\le c\epsilon\left(1+|\omega(t)|^2+\|v\|_{H^1}^2+\|u\|_{H^1}^2+\|u\|_{H^1}^{2r}+\|v_t\|_{H^1}^2+\|u_t\|_{H^1}^2\right)\\&\le c\epsilon\left(1+|\omega(t)|^2+\|u\|_{H^1}^{2r}+\|u_t\|_{H^1}^2+\|v\|_{H^1}^{2r}+\|v_t\|_{H^1}^2\right)\end{aligned}. \tag{4.74}$$

下面用 ξ 换 t，两边同时乘以 $e^{2k\xi}$，然后关于 ξ 在 $(\tau,0)$ 上积分，我们从(4.74)中得到，对于所有的 $n\ge N_1$，以及 $k\ge k_1$，

$$\begin{aligned}&\|\tilde{v}_{n,2}(0,\tau,\omega)\|^2+\|\nabla\tilde{v}_{n,2}(0,\tau,\omega)\|^2+\delta^2\|\tilde{u}_{n,2}(0,\tau,\omega)\|^2+(1-\delta+\delta^2)\|\nabla\tilde{v}_{n,2}(0,\tau,\omega)\|^2\\&\le e^{2k\tau}\left(\|\tilde{v}_{n,2}(\tau,\tau,\omega)\|^2+\|\nabla\tilde{v}_{n,2}(\tau,\tau,\omega)\|^2+\delta^2\|\tilde{u}_{n,2}(\tau,\tau,\omega)\|^2+(1-\delta+\delta^2)\|\nabla\tilde{v}_{n,2}(\tau,\tau,\omega)\|^2\right)\\&\quad+c\epsilon\int_\tau^0 e^{2k\xi}\left(1+|\omega(\xi)|^2+\|u(\xi,\tau,\omega)\|_{H^1}^{2r}+\|u_t(\xi,\tau,\omega)\|_{H^1}^2+\|v(\xi,\tau,\omega)\|_{H^1}^{2r}+\|v_t(\xi,\tau,\omega)\|_{H^1}^2\right)\\&\le ce^{2k\tau}\left(1+\|v_0\|_{H^1}^2+\|u_0\|_{H^1}^2+\|u_0\|_{H^1}^{r+1}\right)+c\epsilon\int_\tau^0 e^{2k\xi}\left(1+|\omega(\xi)|^2\right)d\xi\\&\quad+c\epsilon\int_\tau^0 e^{2k\xi}(\|u(\xi,\tau,\omega)\|_{H^1}^{2r}+\|u_t(\xi,\tau,\omega)\|_{H^1}^2+\|v(\xi,\tau,\omega)\|_{H^1}^{2r}+\|v_t(\xi,\tau,\omega)\|_{H^1}^2\end{aligned}\quad. \tag{4.75}$$

因为 $(u_0,v_0)\in B(\theta_\tau\omega)$，当 $\tau\to-\infty$ 时(4.75)右边的第一项趋于零。那么有 $T=T(B,\omega,\epsilon)<0$ 使得对所有的 $\tau\le T$，第一项以 ϵ 为界，由引理 4.2，我们从(4.75)中发现，对所有 $n\ge N_1$， $k\ge k_1$ 以及 $\tau\le T$，

$$\begin{aligned}&\|\tilde{v}_{n,2}(0,\tau,\omega)\|^2+\|\nabla\tilde{v}_{n,2}(0,\tau,\omega)\|^2+\delta^2\|\tilde{u}_{n,2}(0,\tau,\omega)\|^2+(1-\delta+\delta^2)\|\nabla\tilde{v}_{n,2}(0,\tau,\omega)\|^2\\&\le c\epsilon+c\epsilon\int_\tau^0 e^{2k\xi}\left(e^{-k\xi}r_2(\omega)+1+e^{-k\xi}+|\omega(\xi)|^2\right)d\xi\\&\le c\epsilon(1+r_2(\omega))+c\epsilon\int_{-\infty}^0 e^{2k\xi}|\omega(\xi)|^2\,d\xi\end{aligned}\quad. \tag{4.76}$$

引理 4.4 得证。

5. 随机吸引子

在这一部分，我们主要证明 $\mathbb{R}^n$ 上的粘弹性问题(3.1)~(3.3) $\mathcal{D}$-拉回随机吸引子的存在性。给定 $B=\{B(\omega)\}_{\omega\in\Omega}\in\mathcal{D}$，由引理 4.1，对于 $P-a.e.\ \omega\in\Omega$，存在 $T=T(B,\omega)>0$，使得对所有的 $t\le T$，

$$\|\Phi(t,\theta_{-t}\omega,(u_0,z_0))\|_{H^1(\mathbb{R}^n)\times H^1(\mathbb{R}^n)}^2=\|u(\tau,-t,\omega)\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}^2+\|z(\tau,-t,\omega)\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}^2\le c_1(\omega). \tag{5.1}$$

其中 $c_1(\omega)$ 是(4.1)中给出的随机函数。定义集合

$$E(\omega)=\left\{(u,z)\in H^1(\mathbb{R}^n)\times H^1(\mathbb{R}^n):\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}^2+\|z\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}^2\le c_1(\omega)\right\}. \tag{5.2}$$

那么由(5.1)可知 $E=\{E(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$ 是 Φ 在 $\mathcal{D}$ 上的闭的随机吸收集。我们现在证明 Φ 在 $H^1(\mathbb{R}^n)\times H^1(\mathbb{R}^n)$ 上的拉回渐近紧性。

引理 5.1 假设 $h\in L^2(R^n)$ 以及(3.4)~(3.7)成立。那么随机动力系统 Φ 在 $H^1(\mathbb{R}^n)\times H^1(\mathbb{R}^n)$ 上是 $\mathcal{D}$-拉回渐近紧的，即，对 $P-a.e.\ \omega\in\Omega$，如果 $t_m\to\infty$， $(u_{0,m},z_{0,m})\in B(\theta_{-tm}\omega)$ 有 $B=\{B(\omega)\}_{\omega\in\Omega}\in\mathcal{D}$，序列 $\{\Phi(t_m,\theta_{-tm}\omega,(u_{0,m},z_{0,m}))\}$ 在 $H^1(\mathbb{R}^n)\times H^1(\mathbb{R}^n)$ 上有一个收敛子列。

证明因为 $t_m\to\infty$，由引理 4.1，对于 $P-a.e.\ \omega\in\Omega$，有 $M_1=M_1(B,\omega)>0$，使得对所有的 $m\ge M_1$，

$$\|u(0,-t_m,\omega)\|_H^1(\mathbb{R}^n)^2+\|v(0,-t_m,\omega)\|_H^1(\mathbb{R}^n)^2\le r_1(\omega). \tag{5.3}$$

给定 $\epsilon>0$，由引理 4.3，有 $M_2=M_2(B,\omega,\epsilon)>0$ 并且 $k_0=k_0(\omega,\epsilon)>0$，使得对于所有的 $m\ge M_2$

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus Q_{k_0}}\left(|u(0,-t_m,\omega)|^2+|\nabla u(0,-t_m,\omega)|^2+|v(0,-t_m,\omega)|^2+|\nabla v(0,-t_m,\omega)|^2\right)dx\le\epsilon. \tag{5.4}$$

设 $k_1(\omega,\epsilon)\ge k_0$， $M_3(B,\omega,\epsilon)\ge\max\{M_1,M_2\}$ 并且 $N(\omega,\epsilon)>0$，使得对所有的 $n\ge M_3$，

$$\left\|\left(I-P_N\right)\tilde{u}\left(0,-t_m,\omega\right)\right\|_{H_0^1\left(Q_{2k_1}\right)}+\left\|\left(I-P_N\right)\tilde{v}\left(0,-t_m,\omega\right)\right\|_{H_0^1\left(Q_{2k_1}\right)}\le\epsilon. \tag{5.5}$$

从(5.3)中得到$\left\{P_N\left(u\left(0,-t_m,\omega\right),v\left(0,-t_m,\omega\right)\right)\right\}$在有限维空间$P_N\left(H^1\left(Q_{2k_1}\right)\times H^1\left(Q_{2k_1}\right)\right)$上有界，因此在$P_N\left(H^1\left(Q_{2k_1}\right)\times H^1\left(Q_{2k_1}\right)\right)$上是相对紧的。根据(5.5)，这表明$\left\{\left(u\left(0,-t_m,\omega\right),v\left(0,-t_m,\omega\right)\right)\right\}$在$H^1\left(Q_{2k_1}\right)\times H^1\left(Q_{2k_1}\right)$上是相对紧，因此$\left(u\left(0,t_m,\omega\right),v\left(0,t_m,\omega\right)\right)=\left(u\left(0,t_m,\omega\right),v\left(0,t_m,\omega\right)\right)$对于$|x|\le k_1$，$\left\{\left(u\left(0,-t_m,\omega\right),v\left(0,-t_m,\omega\right)\right)\right\}$在$H^1\left(Q_{2k_1}\right)\times H^1\left(Q_{2k_1}\right)$上是相对紧的。

由(5.4)可知$\left\{\left(u\left(0,-t_m,\omega\right),v\left(0,-t_m,\omega\right)\right)\right\}$在$H^1\left(\mathbb{R}^n\right)\times H^1\left(\mathbb{R}^n\right)$上是相对紧的。

现在，我们给出本文的主要结果：

定理 5.2 假设$h\in L^2\left(R^n\right)$且(3.4)~(3.7)成立。那么随机动力系统Φ在$H^1\left(\mathbb{R}^n\right)\times H^1\left(\mathbb{R}^n\right)$上存在唯一的$\mathcal{D}$-拉回随机吸引子$\left\{\mathcal{A}(\omega)\right\}_{\omega\in\Omega}$。

证明由(5.2)可知Φ存在一个闭拉回吸收集，并且根据引理 5.1，它在$H^1\left(\mathbb{R}^n\right)\times H^1\left(\mathbb{R}^n\right)$上是$\mathcal{D}$-拉回渐近紧的。因此由定理 2.8 得$\Phi$存在唯一的$\mathcal{D}$-拉回随机吸引子。

本文较其他有界域上的粘弹性方程的研究相比较，初次讨论了在无界域上带有加性噪声的粘弹性方程的长时间动力学行为，利用截断函数和算子分解的方法，得到了解的渐近紧性，最后，获得了粘弹性方程随机吸引子的存在唯一性，为以后更进一步研究无界域上的粘弹性方程吸引子的存在性提供了方法。

参考文献

[1] Dafermos, C.M. (1970) Asymptotic Stability in Viscoelasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **37**, 297-308. https://doi.org/10.1007/BF00251609

[2] Dafermos, C.M. (1970) An Abstract Volterra Equation with Applications to Linear Viscoelasticity. *Journal of Differential Equations*, **7**, 554-569. https://doi.org/10.1016/0022-0396(70)90101-4

[3] Cavalcanti, M.M. and Oquendo, H.P. (2003) Frictional versus Viscoelastic Damping in a Semilinear Wave Equation. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **42**, 1310-1324. https://doi.org/10.1137/S0363012902408010

[4] Cavalcanti, M.M., Cavalcanti, V.N.D., Ma, T.F., *et al*. (2002) Global Existence and Asymptotic Stability for Viscoelastic Problems. *Differential and Integral Equations*, **15**, 731-748.

[5] Messaoudi, S.A. (2008) General Decay of Solutions of a Viscoelastic Equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **341**, 1457-1467. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.11.048

[6] Guesmia, A. and Messaoudi, S.A. (2012) A General Decay Result for a Viscoelastic Equation in the Presence of Past and Finite History Memories. *Nonlinear Analysis*: *Real World Applications*, **13**, 476-485. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2011.08.004

[7] Qin, Y., Zhang, J. and Sun, L. (2013) Upper Semicontinuity of Pullback Attractors for a Non-Autonomous Viscoelastic Equation. *Applied Mathematics and Computation*, **223**, 362-376. https://doi.org/10.1016/j.amc.2013.08.034

[8] Peng, X. and Shang, Y. (2021) Attractors for a Quasilinear Viscoelastic Equation with Nonlinear Damping and Memory. *AIMS Mathematics*, **6**, 543-563. https://doi.org/10.3934/math.2021033

[9] Zhang, J. and Xie, Y. (2021) Asymptotic Behavior for a Class of Viscoelastic Equations with Memory Lacking Instantaneous Damping. *AIMS Mathematics*, **6**, 9491-9509. https://doi.org/10.3934/math.2021552

[10] Belhannache, F., Algharabli, M.M. and Messaoudi, S.A. (2020) Asymptotic Stability for a Viscoelastic Equation with Nonlinear Damping and Very General Type of Relaxation Functions. *Journal of Dynamical and Control Systems*, **26**, 45-67. https://doi.org/10.1007/s10883-019-9429-z

[11] Makheloufi, H. and Bahlil, M. (2021) Global Well-Posedness and Stability Results for an Abstract Viscoelastic Equation with a Non-Constant Delay Term and Nonlinear Weight. *Ricerche di Matematica*, 1-37. https://doi.org/10.1007/s11587-021-00617-w

[12] Mezouar, N. and Boulaaras, S. (2020) Global Existence and Decay of Solutions for a Class of Viscoelastic Kirchhoff Equation. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, **43**, 725-755. https://doi.org/10.1007/s40840-018-00708-2

[13] Crauel, H. and Flandoli, F. (1994) Attractors for Random Dynamical Systems. *Probability Theory and Related Fields*,

100, 365-393. https://doi.org/10.1007/BF01193705

[14] Phan, C. and You, Y. (2021) Random Attractor for Stochastic Hindmarsh-Rose Equations with Additive Noise. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, **33**, 489-510. https://doi.org/10.1007/s10884-019-09816-4

[15] Jones, R. and Wang, B. (2013) Asymptotic Behavior of a Class of Stochastic Nonlinear Wave Equations with Dispersive and Dissipative Terms. *Nonlinear Analysis*: *Real World Applications*, **14**, 1308-1322. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2012.09.019

[16] Wang, B. (2009) Random Attractors for the Stochastic Benjamin-Bona-Mahony Equation on Unbounded Domains. *Journal of Differential Equations*, **246**, 2506-2537. https://doi.org/10.1016/j.jde.2008.10.012

[17] Crauel, H., Debussche, A. and Flandoli, F. (1997) Random Attractors. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, **9**, 307-341. https://doi.org/10.1007/BF02219225

[18] Carvalho, A. and Cholewa, J. (2009) Local Well Posedness, Asymptotic Behavior and Asymptotic Bootstrapping for a Class of Semilinear Evolution Equations of the Second Order in Time. *Transactions of the American Mathematical Society*, **361**, 2567-2586. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-08-04789-2

[19] 谢永钦, 杨莉, 秦桂香. 非线性弹性杆中的应变孤波[J]. 湖南大学学报: 自然科学版, 2007, 34(5): 58-61.