Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(10), 1577-1584
Published Online October 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.1210171

Hans汉斯

6A型顶点算子代数中的Ising向量

武文斌

青岛大学，山东 青岛

收稿日期：2022年9月6日；录用日期：2022年10月5日；发布日期：2022年10月12日

摘　要

本文主要研究了6A型顶点算子代数中的Ising向量。C. H. Lam，H. Yamada和H. Yamauchi构造了具体的6A型顶点算子代数的例子，计算出了6A型顶点算子代数中有7个Ising向量，并给出了它们之间的关系；S. Sakuma证明了6A型顶点算子代数由两个Ising向量e和f生成的顶点算子代数，并且e和f的内积$\langle e, f\rangle = \frac{5}{2^{10}}$。但是在后者中只给出了6个Ising向量，第7个Ising向量的具体形式未知。前者构造的具体实例可以看成是后者的一种实现。本文通过两者的Ising向量的对应关系以及6A型顶点算子代数的唯一性，我们求出了第7个Ising向量在一组基下的表达式。

关键词

顶点算子代数，对合自同构，Ising向量

The Ising Vectors in 6A-Vertex Operator Algebra

Wenbin Wu

Qingdao University, Qingdao Shandong

Received: Sep. 6th, 2022; accepted: Oct. 5th, 2022; published: Oct. 12th, 2022

Abstract

In this paper, we mainly study the Ising vectors in the 6A-algebra. C. H. Lam, H. Yamada and H. Yamauchi constructed an example for the 6A-vertex operator algebra, and they proved that there are seven Ising vectors in the 6A-vertex operator algebra, and they also showed the relations between the Ising vectors. S. Sakuma proved 6A-vertex operator algebra is generated by two Ising vectors e and f, and the inner product of e and f is $\frac{5}{2^{10}}$. But the author only listed six Ising vectors, so we

文章引用: 武文斌. 6A 型顶点算子代数中的 Ising 向量[J]. 理论数学, 2022, 12(10): 1577-1584.
DOI: 10.12677/pm.2022.1210171

didn't know the concrete form for the seventh Ising vector. The former can be regarded as a realization of the latter. In this paper, we calculate the seventh Ising vector under a set of bases by the correspondence between them.

Keywords

Vertex Operator Algebras, Involutive Automorphism, Ising Vectors

1. 引言

顶点代数是过去几十年新发展的一个代数学分支。数学家们受到仿射 Kac-Moody 代数表示理论、月光模及其物理上的 2 维共形场论的启发，定义了顶点代数的概念。

从群论的角度来看，魔高斯代数是一种 196884 维的交换非结合代数，并且在上面有正定不变的双线性型。而魔单群 M 是由高斯在[1]中构造出的作为魔高斯代数的自同构群。魔单群 M 是由一些 $2A$ 型对合自同构生成的，并且对于任意两个 $2A$ 型对合自同构 τ 和 τ'，有 $|\tau\tau'|\le 6$。在[2]中知 $\tau\tau'$ 的共轭类是 $1A$，$2A$，$3A$，$4A$，$5A$，$6A$，$4B$，$2B$ 和 $3C$ 这九种之一。

从顶点算子代数的角度来看，魔单群可以看成是月光顶点算子代数的 $V^\natural=\oplus_{n=0}^{\infty}V_n^\natural$ 的自同构群。在月光顶点算子代数的构造[3]中，我们可知魔高斯代数正是 $V^\natural$ 的权为 2 的子空间，也就是 $V_2^\natural$ 就是一个魔高斯代数。在[4]中我们知道月光顶点算子代数 $V^\natural$ 中有 48 个相互正交的共形向量，并且在 $V^\natural$ 中每一个共形向量生成一个同构于 Virasoro 顶点算子代数 $L\left(\frac{1}{2},0\right)$，且 $L\left(\frac{1}{2},0\right)^{\otimes 48}$ 是 $V^\natural$ 是的一个子代数。我们称这样的中心载荷为 $\frac{1}{2}$ 的共形向量为 Ising 向量。Miyamoto 在[5]中对每一个 Ising 向量 e 构造了关于 e 的 τ-对合自同构记作 τ_e。由[6]知每一个 τ_e 都是一个 $2A$ 型对合自同构，关于 Ising 向量的两个 $2A$ 型对合自同构的乘积 $\tau\tau'$ 正是上面九种之一。对于任意两个 Ising 向量 e 和 f，它们的内积 $\langle e,f\rangle$ 与它们对应 $2A$ 型对合自同构乘积所在的共轭类 $\langle\tau_e\tau_f\rangle^M$ 的关系如下：

$\langle\tau_e\tau_f\rangle^M$	$1A$	$2A$	$3A$	$4A$	$5A$	$6A$	$4B$	$2B$	$3C$
$\langle e,f\rangle$	1/4	$1/2^5$	$13/2^{10}$	$1/2^7$	$3/2^9$	$5/2^{10}$	$1/2^8$	0	$1/2^8$

不仅仅是在魔单群中在顶点算子代数中，Sakuma 在[7]中证明了由两个 Ising 向量生成的月光型的顶点算子代数正是以上这九种之一，它们对应的内积关系也如上。

C. H. Lam，H. Yamada 和 H. Yamauchi 在文章[8]中从延伸的 E_8 Dynkin 图出发，构造出 $6A$ 型的余集子代数 U_{6A}，证明了 U_{6A} 是由它的权为 2 的空间 U_2 生成，又证明了 U_2 是由两个 Ising 向量 $\hat{e}$ 和 $\hat{f}$ 生成的。因此 U_{6A} 是由两个 Ising 生成的 $6A$ 型的顶点算子代数。他们用软件 Risa/Asir 算出在 U_{6A} 中有 7 个 Ising 向量。S. Sakuma 在[7]中证明了由两个 Iisng 向量 e 和 f 所确定的 $2A$ 型对合自同构的乘积的阶数小

于等于 6，即 $\left|\tau_e\tau_f\right|\le 6$。特别的，对于 U_{6A} 型，$\langle e,f\rangle=\frac{5}{2^{10}}$，$\left\langle e,e^{\tau_f}\right\rangle=\frac{13}{2^{10}}$ 且 $\left\langle e^{\tau_f},f^{\tau_e}\right\rangle=\frac{1}{2^5}$。这时 e 和 f 所生成的子代数是 8 维的，且带有一组基：$e,e^{\tau_f},e^{\tau_f\tau_e},f,f^{\tau_e},f^{\tau_e\tau_f},\alpha(e,f),\alpha\left(e,e^{\tau_f}\right)$。此时[7]中只给出 6 个 Ising 向量：$e,e^{\tau_f},e^{\tau_f\tau_e},f,f^{\tau_e},f^{\tau_e\tau_f}$。

为了研究 U_{6A} 的自同构群与对合自同构的关系以及其固定点子代数的结构和性质，我们需要求出第七个 Ising 向量的具体形式，由此确定它所对应的对合自同构与 U_{6A} 的自同构群的关系。在本文中我们设出第 7 个 Ising 向量在组基下的线性表达式，通过子代数中定义的内积、Ising 向量的性质、U_{6A} 的自同构群以及 7 个 Ising 向量之间的关系求出第 7 个 Ising 向量的具体形式。

在本篇文章第二部分，我们回顾了我们要用到的一些概念和结果；在第三部分，我们建立起两种 Ising 向量之间的对应关系，并且求出了选定基的乘积表达式；第四部分我们利用 Ising 向量之间的内积关系、基之间的乘积关系和第 7 个 Ising 向量的特点，列出相应的方程组，最后求解出第 7 个 Ising 向量为：

$$\frac{1}{3}\left(e+e^{\tau_f}+e^{\tau_f\tau_e}\right)+\left(f+f^{\tau_e}+f^{\tau_e\tau_f}\right)+32\alpha(e,f)+\frac{32}{3}\alpha\left(e,e^{\tau_f}\right).$$

2. 相关定义及结论

2.1. 相关定义

定义 2.1.1. 顶点算子代数是一个四元组 $(V,Y,1,\omega)$，这里 $(V,Y,1)$ 是域 F 上的顶点代数，且 $V=\oplus_{n\in\mathbb{Z}}V_n$ 是到它的子空间的直和分解，使得 $dimV_n<\infty,\forall n\in\mathbb{Z};V_n\le 0,n\ll 0$。元素 $\omega\in V_2$ 是一个特定的向量，称为 V 的 Virasoro 向量或共形向量，它对应的顶点算子通常表示为两种不同的形式：

$$Y(\omega,z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}L(n)z^{-n-2}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\omega(n)z^{-n-1}$$

并且它的系数满足下列三个条件：

1) $L(-1)=D:L(-1)u=D(u)=u_{(-2)}1,\forall u\in V$；
2) $L(0)\big|_{V_n}=nId_{V_n}:L(0)u=nu,\forall u\in V_n$；
3) $\left[L(m),L(n)\right]=(m-n)L(m+n)+\frac{m^3-m}{12}\delta_{m+n}cId_V$。

上述等式中的 $c\in F$ 是常量，称为顶点算子代数 V 的中心载荷，且算子 $L(0)$ 是可对角化的(注：$L(n)=\omega_{(n+1)},1\in V_0$)。

定义 2.1.2. 我们称顶点算子代数 $(V,Y,1,\omega)$ 是数域 $\mathbb{R}$ 上 OZ-型的顶点算子代数，如果它满足下面的条件：

$$V=\sum_{n=0}^{\infty}V_n,V_0=\mathbb{R}1,V_1=0$$

定义 2.1.3. 我们称向量 $e\in V_2$ 是中心载荷为 c_e 的共形向量，如果它满足 $e_1e=2e,e_3e=\frac{c_e}{2}1$。此时算子 $L_n^e:=e_{n+1},n\in\mathbb{Z}$，并满足 Virasoro 换位关系式：$\left[L_m^e,L_n^e\right]=(m-n)L_{m+n}^e+\delta_{m+n,0}\frac{m^3-m}{12}c_e$，其中 m 和 n 是整数。如果共形向量 e 的中心载荷为 $\frac{1}{2}$，并且它生成 Virasoro 型顶点算子代数 $L\left(\frac{1}{2},0\right)$，那么我们就称 e 是 Ising 向量。

定义 2.1.4. 我们称顶点代数 V 的子空间 I 是顶点代数的理想，如果它满足封闭条件：$v_{(-2)}1\in I, u_{(n)}v\in I, \forall u\in V, \forall v\in I$。

定义 2.1.5. 我们称顶点代数 $(V,Y,1)$ 是单的，如果它没有非平凡的理想。

2.2. 高斯代数

对 $u,v\in V_2$，我们定义 V_2 中的元素乘积：$uv:=u_1v\in V_2$。利用顶点算子代数中的 n 运算，容易看出定义的乘法满足交换律，不满足结合律(顶点算子代数中的 n 运算不满足结合律)。此时[6] V_2 成为一个交换非结合高斯代数。由[7]可知，6A 型顶点算子代数是由两个 Ising 向量生成的，而其中的高斯代数 V_2 是由 $\left\{e,e^{\tau_f},e^{\tau_f\tau_e},f,f^{\tau_e},f^{\tau_e\tau_f},\alpha(e,f),\alpha\left(e,e^{\tau_f}\right),\alpha\left(f,f^{\tau_e}\right)\right\}$ 张成的。

2.3. 不变双线性型

定义 2.3.1. 我们称顶点算子代数 V 的模 M 上的双线性型 $\langle , \rangle$ 是不变的，如果它满足下列条件：

$$\left\langle Y(a,z)u,v\right\rangle=\left\langle u,Y\left(e^{zL(1)}(-z)^{L(0)}a,z^{-1}\right)u\right\rangle$$

其中 $a\in V, u,v\in M$。

顶点算子代数 V 也可以看成它本身的模。在顶点算子代数 V 上的不变双线性型由文献[9]知有下列定理。

定理 2.3.2. [9]顶点算子代数 V 上的所有不变双线性型所构成的空间同构于下列空间：

$$\left(V_0/L(1)V_1\right)^*=Hom_{\mathbb{C}}\left(V_0/L(1)V_1,\mathbb{C}\right)$$

特别的，如果顶点算子代数 V 是一个 $\mathbb{R}$ 上 OZ-型的单顶点算子代数，根据上述定理，显然在 V 上有唯一的正定对称不变双线性型，且满足 $\langle 1,1\rangle=1$。

把上述对称不变双线性型限制在 V_2 上，在[5]的第六部分可知对 $u,v,w\in V_2$，有 $\langle u,v\rangle 1=u_{(3)}v$ 并且 $\langle uv,w\rangle=\langle v,uw\rangle$。

2.4. 关于 Ising 向量的对合自同构

设 $e\in V_2$ 是一个 Ising 向量，通过定义，e 生成 Virasoro 顶点算子代数 $L\left(\frac{1}{2},0\right)$，由[4]和[10]知 Virasoro 顶点算子代数 $L\left(\frac{1}{2},0\right)$ 是有理的并且有三个不可约模，分别是 $L\left(\frac{1}{2},0\right)$，$L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，$L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{16}\right)$。因此 V 作为 $L\left(\frac{1}{2},0\right)$ 的模，有下列分解：

$$V=V_e(0)\oplus V_e\left(\frac{1}{2}\right)\oplus V_e\left(\frac{1}{16}\right)$$

其中的每一部分都是分别同构于 $L\left(\frac{1}{2},h\right), h=0,\frac{1}{2},\frac{1}{16}$ 这些模的和。在[5]中定义了关于 Iisng 向量 e 的 τ 对合自同构，定义方式如下：$\tau_e(v)=v$ 当 $v\in V_e(0)\oplus V_e\left(\frac{1}{2}\right)$；$\tau_e(v)=-v$ 当 $v\in V_e\left(\frac{1}{16}\right)$。根据 $L\left(\frac{1}{2},0\right)$ 的融合律，τ_e 是 V 的 2 阶自同构。

引理 2.4.1. [5]对于 V 中的 Ising 向量 e，V_2 文有如下分解：

$$V_2 = \mathbb{R}e \oplus E^e(0) \oplus E^e\left(\frac{1}{2}\right) \oplus E^e\left(\frac{1}{16}\right)$$

这里的 $E^e(h)$ 是 $e_{(1)}$ 的关于特征值为 h 的特征子空间。

3. 两种 6*A* 型顶点算子代数的构造

3.1. 6*A* 型顶点算子代数的实现

在文章[8]中，C. H. Lam，H. Yamada 和 H. Yamauchi 从下列延伸的 E_8 Dynkin 图构造了一些格顶点算子代数 $V_{\sqrt{2}E_8}$ 的余集顶点算子代数。其中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_8$ 是 E_8 型李代数的单根，$-\alpha_0$ 是根系的最高根。它们之间有关系：$\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle = 2, 0 \le i \le 8$；若 $i \ne j$ 且 α_i 和 α_j 是相连接的，有 $\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle = -1$；其他情况下 $\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle = 0$。它们之间还有如下关系：

$$\alpha_0 + 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 5\alpha_4 + 6\alpha_5 + 4\alpha_6 + 2\alpha_7 + 3\alpha_8 = 0$$

令 $L(5)$ 是由上述 $\alpha_i, 0 \le i \le 8, i \ne 5$ 生成的秩为 8 的 E_8 的子格，从上面 Dynkin 图来看，$L(5)$ 就是在延伸的 E_8 Dynkin 图中去掉 α_5 这个点后生成的，而 $|E_8/L(5)|$ 正是上述等式中 α_5 的系数 6。从图中可以看出：$L(5) \cong \mathrm{A}_5 \oplus \mathrm{A}_2 \oplus \mathrm{A}_1$。为简便，我们把 $L(5)$ 记作 L。$\alpha_5 + L$ 是商群 E_8/L 的生成元。因此 E_8 有分解：$E_8 = \bigcup_{k=0}^{5}(k\alpha_5 + L)$。

令 $\lambda = \sqrt{2}\alpha_5$，则 $\sqrt{2}E_8 = \bigcup_{k=0}^{5}\left(k\lambda + \sqrt{2}L\right)$，我们乘以系数 $\sqrt{2}$ 是为了使其称为一个正定偶格。

此时由文章[11]可知格顶点算子代数有分解：$V_{\sqrt{2}E_8} = V_{\sqrt{2}L} \oplus V_{\lambda+\sqrt{2}L} \oplus \cdots \oplus V_{5\lambda+\sqrt{2}L}$，其中等式后面的每一项都是 $V_{\sqrt{2}L}$ 的不可约模。

由文章[8]的引理 2.2 可知，可换群 E_8/L 可诱导 $V_{\sqrt{2}E_8}$ 上的自同构 σ，$\sigma: V_{\sqrt{2}E_8} \to V_{\sqrt{2}E_8}$，对 $\forall u \in V_{k\lambda+\sqrt{2}L}$，$\sigma(u) = \xi^k u$，其中 $\xi = e^{2\pi i/6} = e^{\pi i/3}$。而自同构 σ 可通过 α 来实现，$\alpha = -\frac{1}{8}(\alpha_0 + 2\alpha_1 + \cdots + 6\alpha_5 + 7\alpha_8)$。此时 $\sigma = e^{-\sqrt{2}\pi i\alpha(0)}$，对 $\forall u \in \mathrm{M}(1) \otimes e^{\alpha} \subset V_{\sqrt{2}E_8}$，有 $\sigma(u) = e^{-\pi i\langle\beta,\alpha\rangle}u$。另外，通过正定偶格 $\sqrt{2}E_8$ 上的自然同构 $\alpha \to -\alpha$，$\alpha \in \sqrt{2}E_8$，诱导 $V_{\sqrt{2}E_8}$ 上的自然的对合自同构 $\theta: V_{\sqrt{2}E_8} \to V_{\sqrt{2}E_8}$，对 $\forall \alpha \in \sqrt{2}E_8$ 的，$\alpha(-n) \to -\alpha(-n), e^{\alpha} \to e^{-\alpha}$。上述的 σ 的相当于旋转变换，θ 相当于反射变换，因此由 σ 和 θ 生成 $V_{\sqrt{2}E_8}$ 的自同构子群是阶为 12 的二面体群。

根据文献[8]和[12]来构造 6*A* 型余集子代数：已知 $L = L(5) \cong \mathrm{A}_5 \oplus \mathrm{A}_2 \oplus \mathrm{A}_1$，记 Φ_1,Φ_2,Φ_3 分别为单李代数 $\mathrm{A}_5,\mathrm{A}_2,\mathrm{A}_1$ 的不可约根系，此时有 6 个相互正交的共形向量：

$s^k = s(\Phi_k) = \frac{1}{2(h^k+2)}\sum_{\alpha\in\Phi_k^+}\left(\alpha(-1)^2 \bullet 1 - 2\left(e^{\sqrt{2}\alpha} + e^{-\sqrt{2}\alpha}\right)\right)$，$\varpi^k = \varpi(\Phi_k) = \omega^k - s^k$，其中 $\omega^k = \omega(\Phi_k) = \frac{1}{2h^k}\sum_{\alpha\in\Phi_k^+}\alpha(-1)^2 \bullet 1$，$k = 1,2,3$。这里的 h^k 是对应于根系 Φ_k 的 Coxeter 数。$V_{\sqrt{2}L}$ 中的共形向量 $\omega = s^1 + s^2 + s^3 + \varpi^1 + \varpi^2 + \varpi^3$ 也是 $V_{\sqrt{2}E_8}$ 中的共形向量。[8]中定义的 6*A* 型余集子代数 $u = \left\{v \in V_{\sqrt{2}E_8} \mid \left(s^k\right)_{(1)} v = 0, \forall k = 1,2,3\right\}$。这是一个 6*A* 型顶点算子代数，其共形向量为 $\omega' = \varpi^1 + \varpi^2 + \varpi^3$。在[8]中可知在 u 中有中心载荷为 $\frac{1}{2}$ 的两个 Ising 向量，分别为 $\hat{e}$ 和 $\hat{f}$，其中 $\hat{f} = \sigma\hat{e}$，

$\hat{e}=\frac{1}{16}\omega+\frac{1}{32}\sum_{\alpha\in\Phi^{+}(E_8)}\left(e^{\sqrt{2}\alpha}+e^{-\sqrt{2}\alpha}\right)$。由[8]中的定理 3.21 和定理 3.22 可知余集子代数可知 u 是由它的权为 2 的子空间 u_2 生成的，而 u_2 是由 $\hat{e}$ 和 $\hat{f}$ 生成的维数为 8 的高斯代数，因此 u 是由 $\hat{e}$ 和 $\hat{f}$ 生成的余集子代数。由[8]中的引理 A.9 知 u 也就是 6A 型顶点算子代数。

由[8]中引理 A.9 可知 u_2 中的 7 个 Ising 向量分别是：$\varpi^2, e_j=\sigma^j\hat{e}, 0\le j\le 5$。并且它们之间的内积关系如下：$\left\langle \varpi^2, e_j\right\rangle=\frac{1}{2^5}, 0\le j\le 5$。还有

$$\left\langle e_i,e_j\right\rangle=\begin{cases}\frac{1}{4}, & i=j\\ \frac{1}{2^5}, & i-j\equiv 3 \bmod 6\\ \frac{13}{2^{10}}, & i-j\equiv \pm 2 \bmod 6\\ \frac{5}{2^{10}}, & i-j\equiv \pm 1 \bmod 6\end{cases}$$

3.2. 6*A* 型顶点算子代数的抽象描述

在[7]中，Sakuma 证明了对于两个 Iisng 向量 e 和 f 的 τ 对合自同构乘积的阶数小于等于 6，也就是 $\left|\tau_e\tau_f\right|\le 6$。而当 $\left|\tau_e\tau_f\right|=6$ 时，$\left\langle e,f\right\rangle=\frac{5}{2^{10}},\left\langle e,e^{\tau_f}\right\rangle=\frac{13}{2^{10}},\left\langle e^{\tau_f},f^{\tau_e}\right\rangle=\frac{1}{2^5}$，由[7]中的定理 4.4.可知 $e^{\tau_f\tau_e}=e^{\tau_f\tau_e\tau_f}$，$f^{\tau_e\tau_f}=f^{\tau_e\tau_f\tau_e}$。此时 e 和 f 生成的顶点算子代数就是 6A 型顶点算子代数，记作 V。它的权为 2 的子空间 V_2 是一个 8 维的向量空间，且 V_2 是由 $\left\{e,e^{\tau_f},e^{\tau_f\tau_e},f,f^{\tau_e},f^{\tau_e\tau_f},\alpha(e,f),\alpha\left(e,e^{\tau_f}\right),\alpha\left(f,f^{\tau_e}\right)\right\}$ 生成的。其中的由[7]中的命题 3.3.可知，$\left\{e,e^{\tau_f},e^{\tau_f\tau_e},f,f^{\tau_e},f^{\tau_e\tau_f},\alpha\left(e,e^{\tau_f}\right),\alpha\left(f,f^{\tau_e}\right)\right\}$ 是线性相关的，且有如下具体关系：

$$\frac{1}{2^4}\left(e+e^{\tau_f}+e^{\tau_f\tau_e}\right)-\frac{1}{2^4}\left(f+f^{\tau_e}+f^{\tau_e\tau_f}\right)-\alpha\left(e,e^{\tau_f}\right)+\alpha\left(f,f^{\tau_e}\right)=0.$$

因此我们可以选取 V_2 的一组基：$\left\{e,e^{\tau_f},e^{\tau_f\tau_e},f,f^{\tau_e},f^{\tau_e\tau_f},\alpha\left(e,e^{\tau_f}\right),\alpha(e,f)\right\}$。其中的 $\left\{e,e^{\tau_f},e^{\tau_f\tau_e},f,f^{\tau_e},f^{\tau_e\tau_f}\right\}$ 是 V_2 中的 Ising 向量，由上述的内积关系以及不变双线性型的保持对合自同构的性质，我们计算出这些 Ising 向量之间的内积关系如下：

$$\left\langle e,f\right\rangle=\left\langle e^{\tau_f},f\right\rangle=\left\langle e^{\tau_f\tau_e},f^{\tau_e}\right\rangle=\left\langle e,f^{\tau_e}\right\rangle=\left\langle e^{\tau_f},f^{\tau_e\tau_f}\right\rangle=\left\langle e^{\tau_f\tau_e},f^{\tau_e\tau_f}\right\rangle=\frac{5}{2^{10}}$$

$$\left\langle e,e^{\tau_f}\right\rangle=\left\langle e,e^{\tau_f\tau_e}\right\rangle=\left\langle e^{\tau_f},e^{\tau_f\tau_e}\right\rangle=\left\langle f,f^{\tau_e}\right\rangle=\left\langle f,f^{\tau_e\tau_f}\right\rangle=\left\langle f^{\tau_e},f^{\tau_e\tau_f}\right\rangle=\frac{13}{2^{10}}$$

$$\left\langle e^{\tau_f},f^{\tau_e}\right\rangle=\left\langle e,f^{\tau_e\tau_f}\right\rangle=\left\langle e^{\tau_f\tau_e},f\right\rangle=\frac{1}{2^5}$$

3.3. 两种 Ising 向量形式的对应

在这一部分，我们确定了 3.2.中的 6 个 Ising 向量分别对应 3.1.中的哪 6 个 Ising 向量，并给出它们之间的具体对应关系。通过 3.1.中和 3.2.中的 Ising 向量的内积关系式不难看出它们之间只能有如下的对应

关系：$e_0=e^{\tau_f\tau_e},e_1=f^{\tau_e},e_2=e,e_3=f,e_4=e^{\tau_f},e_5=f^{\tau_e\tau_f}$。因此对于最后的第 7 个 Ising 向量 ϖ^2 在 3.2.中没有找到具体的对应。在第四部分我们通过内积关系 $\left\langle\varpi^2,e_j\right\rangle=\frac{1}{2^5},0\le j\le5$，$\left\langle\varpi^2,\varpi^2\right\rangle=\frac{1}{4}$，还有共形向量的性质 $\varpi^2\varpi^2=2\varpi^2$，借助 V_2 的基之间的乘积关系来求 ϖ^2 对应的那个 Ising 向量在 V_2 的基下的具体表达式。

4. 求解第七个 Ising 向量的具体形式

4.1. 基之间内积关系式

由上面 3.2.部分可知，V_2 是一个 8 维的向量空间，并且 V_2 是由下面这 8 个向量 $\left\{e,e^{\tau_f},e^{\tau_f\tau_e},f,f^{\tau_e},f^{\tau_e\tau_f},\alpha(e,f),\alpha\left(e,e^{\tau_f}\right)\right\}$ 生成的。其中前 6 个是 Ising 向量，它们之间的内积关系式在上面 3.2.中已经给出，我们通过内积的性质以及保对合自同构的特点，由[13]计算出基之间的内积关系和相应的内积结果：

$$\left\langle e,\alpha(e,f)\right\rangle=\left\langle e^{\tau_f},\alpha(e,f)\right\rangle=\left\langle e^{\tau_f\tau_e},\alpha(e,f)\right\rangle=-\frac{101}{2^{14}}$$

$$\left\langle e,\alpha\left(e,e^{\tau_f}\right)\right\rangle=\left\langle e^{\tau_f},\alpha\left(e,e^{\tau_f}\right)\right\rangle=\left\langle e^{\tau_f\tau_e},\alpha\left(e,e^{\tau_f}\right)\right\rangle=\frac{147}{2^{14}}$$

$$\left\langle f,\alpha(e,f)\right\rangle=\left\langle f^{\tau_e},\alpha(e,f)\right\rangle=\left\langle f^{\tau_e\tau_f},\alpha(e,f)\right\rangle=-\frac{101}{2^{14}}$$

$$\left\langle f,\alpha\left(e,e^{\tau_f}\right)\right\rangle=\left\langle f^{\tau_e},\alpha\left(e,e^{\tau_f}\right)\right\rangle=\left\langle f^{\tau_e\tau_f},\alpha\left(e,e^{\tau_f}\right)\right\rangle=-\frac{93}{2^{14}}$$

4.2. 基向量之间的乘积关系式

我们利用文献[7] [13]中的一些结果，利用 e 和 f 的地位的对等性，来计算 V_2 中的 8 个基向量之间的乘积在这组基下的具体表达式：

$$e\cdot\alpha(e,f)=\frac{7}{16}\alpha(e,f)-\frac{5}{2^7}e+\frac{7}{2^9}\left(f+f^{\tau_e}\right)$$

$$e\cdot\alpha\left(e,e^{\tau_f}\right)=\frac{7}{16}\alpha\left(e,e^{\tau_f}\right)+\frac{5}{2^7}e+\frac{7}{2^9}\left(e^{\tau_f}+e^{\tau_f\tau_e}\right)$$

$$f\cdot\alpha\left(e,e^{\tau_f}\right)=-\frac{1}{48}\left(e+e^{\tau_f}\right)-\frac{7}{3\cdot2^8}e^{\tau_f\tau_e}-\frac{13}{2^8}f+\frac{7}{2^9}\left(f^{\tau_e}+f^{\tau_e\tau_f}\right)-\frac{3}{8}\alpha(e,f)+\frac{7}{48}\alpha\left(e,e^{\tau_f}\right)$$

$$\alpha(e,f)\cdot\alpha(e,f)=\frac{7}{3\cdot2^{11}}\left(e+e^{\tau_f}+e^{\tau_f\tau_e}\right)+\frac{7}{2^{13}}\left(f+f^{\tau_e}+f^{\tau_e\tau_f}\right)-\frac{17}{2^8}\alpha(e,f)-\frac{7}{3\cdot2^9}\alpha\left(e,e^{\tau_f}\right)$$

$$\alpha(e,f)\cdot\alpha\left(e,e^{\tau_f}\right)=-\frac{35}{2^{13}}\left(e+e^{\tau_f}+e^{\tau_f\tau_e}\right)+\frac{7}{2^{12}}\left(f+f^{\tau_e}+f^{\tau_e\tau_f}\right)+\frac{21}{2^8}\alpha(e,f)+\frac{15}{2^9}\alpha\left(e,e^{\tau_f}\right)$$

$$\alpha\left(e,e^{\tau_f}\right)\cdot\alpha\left(e,e^{\tau_f}\right)=\frac{147}{2^{13}}\left(e+e^{\tau_f}+e^{\tau_f\tau_e}\right)-\frac{63}{2^9}\alpha\left(e,e^{\tau_f}\right)$$

因为 V_2 中的 e 和 f 的地位是相同的，因此 V_2 中的其他的基向量之间的乘积都可以由上述它们的乘积推导出来(交换 e 和 f 或者在等式两边同时作用对合自同构)。

4.3. 求解 Ising 向量的具体表达式

对于 ϖ^2 对应的那个第 7 个 Ising 向量不妨记作 $\tilde{\omega}$，首先它在 V_2 中，假设它在 V_2 中我们选定基下的

表达式为 $\tilde{\omega}=x_0e^{\tau_f\tau_e}+x_1f^{\tau_e}+x_2e+x_3f+x_4e^{\tau_f}+x_5f^{\tau_e\tau_f}+x_6\alpha(e,f)+x_7\alpha\left(e,e^{\tau_f}\right)$。根据 3.3.中两种 Ising 向量之间的对应及其内积关系有：$\langle\tilde{\omega},\tilde{\omega}\rangle=\frac{1}{4}$，$\tilde{\omega}\tilde{\omega}=2\tilde{\omega}$，还有下面关系式

$$\langle\tilde{\omega},e\rangle=\left\langle\tilde{\omega},e^{\tau_f}\right\rangle=\left\langle\tilde{\omega},e^{\tau_f\tau_e}\right\rangle=\langle\tilde{\omega},f\rangle=\left\langle\tilde{\omega},f^{\tau_e}\right\rangle=\left\langle\tilde{\omega},f^{\tau_e\tau_f}\right\rangle=\frac{1}{32}.$$

在 $\tilde{\omega}$ 的表达式中有 8 个未知量，上述正好有 8 个方程，将 $\tilde{\omega}$ 的表达式带入到上述 8 个等式中，再利用 4.1.中内积关系式和 4.2.中乘积关系式，利用 Matlab 可以求解出方程组。最后我们求出最后结果为：$x_0=x_2=x_4=\frac{1}{3},x_1=x_3=x_5=1,x_6=32,x_7=\frac{32}{3}$。因此我们得到了第 7 个 Ising 向量在我们选定的基下的表达式：$\tilde{\omega}=\frac{1}{3}\left(e+e^{\tau_f}+e^{\tau_f\tau_e}\right)+\left(f+f^{\tau_e}+f^{\tau_e\tau_f}\right)+32\alpha(e,f)+\frac{32}{3}\alpha\left(e,e^{\tau_f}\right)$。

参考文献

[1] Conway, J.H. (1985) A Simple Construction for the Fisher-Griess Monster Group. *Inventiones Mathematicae*, **79**, 513-540. https://doi.org/10.1007/BF01388521

[2] Conway, J.H., Curtis, R.T., Norton, S.P., Parker, R.A. and Wilson, R.A. (1985) ATLAS of Finite Groups. Oxford University Press, New York.

[3] Frenkel, I.B., Lepowsky, J. and Meurman, A. (1989) Vertex Operator Algebras and the Monster. Pure and Applied Mathematics, Volume 134, Academic Press, New York.

[4] Dong, C., Mason, G. and Zhu, Y. (1994) Discrete Series of the Virasoro Algebra and the Moonshine Module. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, **56**, 295-316.

[5] Miyamoto, M. (1996) Griess Algebras and Conformal Vectors in Vertex Operator Algebras. *Journal of Algebra*, **179**, 523-548. https://doi.org/10.1006/jabr.1996.0023

[6] Dong, C., Li, H., Mason, G. and Norton, S.P. (1998) Associative Subalgebras of the Griess Algebra and Related Topics. In: Ferrar, J. and Harada, K., Eds., *The Monster and Lie Algebras*: *Proceedings of a Special Research Quarter at the Ohio State University*, *May* 1996, De Gruyter, Berlin, New York, 27-42. https://doi.org/10.1515/9783110801897.27

[7] Sakuma, S. (2006) 6-Transposition Property of τ-Involutions of Vertex Operator Algebras. *International Mathematics Research Notices*, **2007**, 19 p.

[8] Lam, C.H., Yamada, H. and Yamauchi, H. (2005) McKay's Observation and Vertex Operator Algebras Generated by Two Conformal Vectors of Central Charge 1/2. *International Mathematics Research Papers*, No. 3, 1143-1159.

[9] Li, H. (1994) Symmetric Invariant Bilinear Forms on Vertex Operator Algebras. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **96**, 279-297. https://doi.org/10.1016/0022-4049(94)90104-X

[10] Wang, W. (1993) Rationality of Virasoro Vertex Operator Algebras. *International Mathematics Research Notices*, No. 7, 197-211.

[11] Dong, C. (1993) Vertex Algebras Associated with Even Lattices, *Journal of Algebra*, **161**, 245-265. https://doi.org/10.1006/jabr.1993.1217

[12] Lam, C.H., Yamada, H. and Yamauchi, H. (2007) Vertex Operator Algebras, Extended E_8 Diagram, and McKay's Observation on the Monster Simple Group. *Transactions of the American Mathematical Society*, **359**, 4107-4123.

[13] Jiao, X.Y. and Zheng, W. (2022) Vertex Operator Algebras Generated by Two Ising Vectors. *Journal of Algebra*, **610** 546-570. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2022.07.034