Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(10), 1564-1570
Published Online October 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.1210169

Hans汉斯

希尔伯特空间算子的数值域半径不等式

任林源

西安工业大学基础学院，陕西 西安

收稿日期：2022年9月5日；录用日期：2022年10月4日；发布日期：2022年10月10日

摘　要

算子数值域半径不等式在算子论的研究中有着很重要的作用。本文利用Bohr不等式和Young不等式得到一些Hilbert空间中的算子数值域半径不等式，同时和文献中的已知结果做了一些对比。

关键词

数值域半径，算子范数，Bohr不等式，Young不等式，Cartesian分解

Numerical Radius Inequalities for Hilbert Space Operators

Linyuan Ren

Basic College of Xi'an Technology University, Xi'an Shaanxi

Received: Sep. 5th, 2022; accepted: Oct. 4th, 2022; published: Oct. 10th, 2022

Abstract

Inequalities of numerical radius play an important role in operator theory. In the present paper, we obtain some numerical radius refinements of inequalities for operators acting on a Hilbert space by using the Bohr and Young inequalities. We also compare our results with some known results.

Keywords

Numerical Radius, Operator Norm, Bohr Inequality, Young Inequality, Cartesian Decomposition

文章引用：任林源. 希尔伯特空间算子的数值域半径不等式[J]. 理论数学, 2022, 12(10): 1564-1570.
DOI: 10.12677/pm.2022.1210169

1. 引言和主要结果

本文设 H 表示复 Hilbert 空间，$B(H)$ 表示在复 Hilbert 空间 H 上的所有有界线性算子的 C^*-代数，对任意算子 $T\in B(H)$，设 $|T|=(T^*T)^{\frac{1}{2}}$ 表示算子的算术平方根，其中 T^* 表示 T 的伴随算子。如果对任意算子 $T\in B(H)$，T 可以写为 $T=A+iB$，i 为虚数单位，那么称此表达式为算子 T 的 Cartesian 分解，其中 $A=\mathrm{Re}(T)=\frac{T+T^*}{2}$，$B=\mathrm{Im}(T)=\frac{T-T^*}{2i}$。如果对任意非零向量 $x\in H$，有 $\langle Tx,x\rangle\ge 0$，那么称 T 为半正定算子，记为 $T\ge 0$。算子 T 的数值域半径定义[1]为 $\omega(T)=\sup\{|\langle Tx,x\rangle|:x\in H,\|x\|=1\}$。显然 $\omega(T)$ 在 $B(H)$ 上定义了一个范数，此范数 $\|\bullet\|$ 是算子范数，通常算子范数和数值域半径是等价的[2] [3]，即有不等式

$$\frac{1}{2}\|T\|\le\omega(T)\le\|T\| \tag{1.1}$$

成立。$\omega(T)$ 的一个重要不等式是数值域半径的幂的不等式[3] [4]

$$\omega(T^n)\le\omega^n(T) \tag{1.2}$$

其中 $n=1,2,3,\cdots$。利用该不等式，很多文献[2]-[14]得到很多关于 $\omega(T)$ 的重要估计不等式。

一般而言，算子数值域半径的计算很困难，所以研究给出 $\omega(T)$ 上下界的估计或者推广就显得很重要，比如文献[5]证明了

$$\omega(T)\le\frac{1}{2}\|T\|+\frac{1}{2}\|T^2\|^{\frac{1}{2}} \tag{1.3}$$

明显(1.3)要比(1.1)好。文献[14]又得到

$$\omega(T)\le\frac{1}{2}\|T\|+\frac{1}{2}\omega(\tilde{T}) \tag{1.4}$$

可以看出(1.4)又改进了(1.3)，其中 $\tilde{T}$ 是算子 T 的 Aluthge 变换，定义为[3] $\tilde{T}=|T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}}$，$U$ 为部分等距算子，$T=U|T|$ 是算子 T 的极分解，在文[7]和文献[14]中，研究了 $\omega(\tilde{T})$ 的界，得到一些很好的不等式。近期，Sababheh 等证明了[10]，对任意算子 $A,B,X\in B(H)$，如果有 $A,B\ge 0$，那么对任意算子 X，有

$$\omega^r(A^\alpha XB^\alpha)\le\|X\|^r\left\|\frac{1}{p}A^{pr}+\frac{1}{q}B^{pr}\right\|^\alpha \tag{1.5}$$

其中 $0\le\alpha\le 1,\ r>0,\ p,q>1$，并且实数篇，$p,q$ 满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$。

Mirmostaeface 证明了[7]，如果对任意的算子 T_j 有 Cartesian 分解 $T_j=A_j+iB_j,\ j=1,2,\cdots,n$，当 $n\ge 1$ 时，有

$$\omega^r\left(\sum_{j=1}^n T_j\right)\le\left(\sqrt{2}\right)^{r-1}\sum_{j=1}^n\left\||A_j|^{2r}+|B_j|^{2r}\right\|^{\frac{1}{2}} \tag{1.6}$$

和

$$\omega^r(T) \le \left(\sqrt{2}\right)^r \left\| \left|A_j + B_j\right|^{2r} + \left|A_j - B_j\right|^{2r} \right\|^{\frac{1}{2}} \tag{1.7}$$

成立。

本文利用 Bohr 不等式和 Young 不等式得到给出了一些新的算子数值域半径界的不等式，同时和文献中的已知结果做了一些对比，这在研究算子数值域半径上界的不等式有一定的理论和实际意义，本文主要得到以下一些结果。

定理 1.1 设 $T_j \in B(H)$ 有 Cartesian 分解 $T_j = A_j + iB_j,\ j = 1,2,\cdots,n,\ r \ge 1,\ p_j > 0$，则有

$$\omega^r\left(\sum_{j=1}^n T_j\right) \le \left(\sqrt{2}n^2\right)^{r-1} \sum_{j=1}^n \left\| \left|A_j\right|^{2r} + \left|B_j\right|^{2r} \right\|^{\frac{1}{2}} \tag{1.8}$$

定理 1.2 设 $A_j, B_j, T \in B(H)$，并且 $A_j, B_j > 0,\ r > 1,\ 0 \le \alpha \le 1,\ p,q > 1$ 满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，$pr \ge 2$，那么有

$$\omega^r\left(\sum_{j=1}^n A_j^\alpha T B_j^\alpha\right) \le n^{r-1} \|T\|^r \sum_{j=1}^n \left\| \frac{1}{p} A_j^{pr} + \frac{1}{q} B_j^{qr} \right\|^\alpha \tag{1.9}$$

定理 1.3 设 $T \in B(H)$，函数 f 和 g 是定义在 $[0,+\infty)$ 上非负连续函数，并且满足 $f(t)g(t) = t,(t \ge 0)$，那么

$$\omega^{2r}(T) \le \frac{1}{2}\left(\|T\|^{2r} + \left\| \frac{p}{p+q} f^{\frac{r(p+q)}{q}}\left(\left|T^2\right|\right) + \frac{q}{p+q} g^{\frac{r(p+q)}{p}}\left(\left|\left(T^*\right)^2\right|\right) \right\| \right) \tag{1.10}$$

其中，$r > 1$，$p \ge q > 1$，$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，$pr \ge 2$。

定理 1.4 设 $T_j \in B(H)$，$r_j \ge 1,\ j = 1,\cdots,n$，$0 \le \alpha \le 1,\ x \in H, \|x\| = 1$，那么

$$\prod_{j=1}^n \left|\left\langle T_j x, x\right\rangle\right|^{r_j} \le \frac{n}{8} \left\| \sum_{j=1}^n r_j^2 \left(\left|T_j\right|^{4\alpha} + \left|T_j^*\right|^{4(1-\alpha)} \right) \right\| \tag{1.11}$$

定理 1.5 对任意算子 $T \in B(H)$，存在酉算子 U 和实数 θ 对任意 $x \in H$，使得 $y_1 = \left(\mathrm{e}^{i\theta} - U^*\right)x$，$y_1 = \left(\mathrm{e}^{i\theta} + U^*\right)x$，那么

$$\omega(T) \le \frac{M}{2}\left(2\|T\| + \left\|\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{i\theta}\bar{T}\right)\right\| - \left\langle |T|^{\frac{1}{2}} y_2, y_2 \right\rangle \right) \le \frac{M}{2}\left(2\|T\| + \omega\left(\bar{T}\right)\right) \tag{1.12}$$

其中 $M = \max\left\{ \left\langle |T| y_1, y_1 \right\rangle^{\frac{1}{2}}, \left\langle |T| y_2, y_2 \right\rangle^{\frac{1}{2}} \right\}$。

本文结构安排如下，第一部分引言和主要结果，第二部分引理，第三部分定理的证明和注。第四部分为小结。为了给出定理的证明，需要以下的几个引理。

2. 几个引理

引理 2.1 [3] [8] [10] 设 $a,b \ge 0,\ 0 \le \alpha \le 1,\ p,q > 1,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，那么

1) $a^{\alpha}b^{1-\alpha} \le \alpha a + (1-\alpha)b \le \left(\alpha a^{r} + (1-\alpha)b^{r}\right)^{\frac{1}{r}}, r \ge 1$

2) $ab \le \dfrac{\alpha^{p}}{p} + \dfrac{b^{q}}{q} \le \left(\dfrac{a^{rp}}{p} + \dfrac{b^{rq}}{q}\right)^{\frac{1}{r}}, r \ge 1$

注意到引理 2.1 (1)第一个不等式是权重为α 的 Young 不等式[3] [8] [10]，权重为(p,q)的不等式可以写为

$$a^{p}b^{q} \le \frac{p}{p+q}a^{p+q} + \frac{q}{p+q}b^{p+q} \tag{2.1}$$

其中 $a,b,p,q>0$，该式在不等式的研究中具有广泛的应用[7] [8] [9]。

引理 2.2 [11] [12] 设 $z_j,\ j=1,2,\cdots,n$ 表示复数，满足 $p_j>0, r\ge 1$，那么有 $\left|\sum_{j=1}^{n} z_j\right|^{r} \le \left(\sum_{j=1}^{n} p_j^{1/1-r}\right)^{r-1}\sum_{j=1}^{n} p_j\left|z_j\right|^{r}$，特别的，当 $p_j=1$时，得到经典的 Borh 不等式

$$\left|\sum_{j=1}^{n} z_j\right|^{r} \le n^{r-1}\sum_{j=1}^{n}\left|z_j\right|^{r}$$

引理 2.3 [7] [8] [13] (Cauchy-Schwarz) 设算子$T\in B(H)$，对任意向量$x,y\in H, 0\le\alpha\le 1$，那么

1) $\left|\langle Tx,y\rangle\right|^{2} \le \left\langle |T|^{2\alpha}x,x\right\rangle\left\langle \left|T^{*}\right|^{2(1-\alpha)}y,y\right\rangle$；

2) 函数f和g是定义在$[0,+\infty)$上非负连续函数，并且满足 $f(t)g(t)=t,(t\ge 0)$，那么有

$$\left|\langle Tx,x\rangle\right| \le \left\|f(|T|)x\right\|\left\|g\left(\left|T^{*}\right|y\right)\right\|。$$

引理 2.4 [1] [8] (Mc-Carty) $T\in B(H), T\ge 0$，那么

1) $\left|\langle Tx,x\rangle\right|^{r} \le \left\langle T^{r}x,x\right\rangle, r\ge 1$；

2) $\left|\langle Tx,x\rangle\right|^{r} \le \left\langle Tx,x\right\rangle^{r}, 0<r\le 1$。

3. 定理的证明和注

定理 1.1 的证明 对任意向量 $x\in H$，设 $T_j=A_j+iB_j,\ j=1,2,\cdots,n$ 那么当 $r\ge 1$时，有

$$\begin{aligned}
\left|\left\langle\left(\sum_{j=1}^{n}T_j\right)x,x\right\rangle\right|^{r} &= \left|\left\langle\left(\sum_{j=1}^{n}A_j\right)x,x\right\rangle + i\left\langle\left(\sum_{j=1}^{n}B_j\right)x,x\right\rangle\right|^{r}\\
&= \left(\left\langle\left(\sum_{j=1}^{n}A_j\right)x,x\right\rangle^{2} + \left\langle\left(\sum_{j=1}^{n}B_j\right)x,x\right\rangle^{2}\right)^{\frac{r}{2}}\\
&\le \left(\sum_{j=1}^{n}\left(\left\langle\left|A_j\right|^{2}x,x\right\rangle + \right)\left\langle\left|B_j\right|^{2}x,x\right\rangle^{1/2}\right)^{r} \quad (\text{引理 2.3(1)},\ \alpha=1)\\
&\le \left(\sum_{j=1}^{n}p_j^{1/1-r}\right)^{r-1}\left(\sum_{j=1}^{n}p_j\left(\left\langle A_jx,x\right\rangle^{2} + \left\langle B_jx,x\right\rangle^{2}\right)\right)^{r/2} \quad (\text{引理 2.2})\\
&\le \left(\sqrt{2}n\right)^{r-1}\left(\sum_{j=1}^{n}p_j^{1/1-r}\right)^{r-1}\sum_{j=1}^{n}p_j\left(\left\langle\left|A_j\right|^{2r}x,x\right\rangle + \left\langle\left|B_j\right|^{2r}x,x\right\rangle\right)^{1/2} \quad (\text{引理 2.4})\\
&\le \left(\sqrt{2}n^{2}\right)^{r-1}\sum_{j=1}^{n}p_j\left(\left\langle\left|A_j\right|^{2r}x,x\right\rangle + \left\langle\left|B_j\right|^{2r}x,x\right\rangle\right)^{1/2} \quad (\text{引理 2.4 (1, 2)})
\end{aligned}$$

应为 $x\in H, \|x\|=1$，对上述不等式两边取上确界和利用定义，定理得证。

定理 1.2 的证明 设 $A_j, B_j, T \in B(H)$，并且 $A_j, B_j > 0, r > 1, 0 \le \alpha \le 1, p, q > 1$ 满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$， $pr \ge 2$，那么有

$$\omega^r\left(\sum_{j=1}^n A_j^\alpha T B_j^\alpha\right) \le n^{r-1}\sum_{j=1}^n \left|\left\langle A_j^\alpha T B_j^\alpha x, x\right\rangle\right|^r \quad (\text{引理 } 2.2)$$

$$\le n^{r-1}\sum_{j=1}^n \left\|TB_j^\alpha x\right\|^r \left\|A_j^\alpha x\right\|^r \quad (\text{引理 } 2.3)$$

$$\le n^{r-1}\|T\|^r \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{p}\left\langle A_j^{2\alpha} x, x\right\rangle^{\frac{pr}{2}} + \frac{1}{q}\left\langle B_j^{2\alpha} x, x\right\rangle^{\frac{qr}{2}}\right) \quad (\text{引理 } 2.3\ (1)\text{引理 } 2.1\ (2))$$

$$\le n^{r-1}\|T\|^r \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{p}\left\langle A_j^{pr} x, x\right\rangle^{\alpha} + \frac{1}{q}\left\langle B_j^{qr} x, x\right\rangle^{\alpha}\right) \quad (\text{引理 } 2.4)$$

$$\le n^{r-1}\|T\|^r \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{p}\left\langle A_j^{pr} x, x\right\rangle + \frac{1}{q}\left\langle B_j^{qr} x, x\right\rangle\right)^{\alpha}$$

$$= n^{r-1}\|T\|^r \sum_{j=1}^n \left\langle\left(\frac{1}{p}A_j^{pr} + \frac{1}{q}B_j^{qr}\right)x, x\right\rangle$$

最后一个不等式是因为当 $0 \le \alpha \le 1$ 时，函数 t^α 是凹函数，定理得证。

定理 1.3 的证明 设 $x \in H, \|x\| = 1$，那么

$$\left|\left\langle T^2 x, x\right\rangle\right|^r \le \left\|f\left(\left|T^2\right|\right)x\right\|^r \left\|g\left(\left|\left(T^*\right)^2\right|\right)x\right\|^r$$

$$= \left(\left\langle f^2\left(\left|T\right|^2\right)x, x\right\rangle^p\right)^{\frac{r}{2p}} \left(\left\langle g^2\left(\left|\left(T^*\right)\right|^2\right)x, x\right\rangle^q\right)^{\frac{r}{2q}}$$

$$\le \frac{q}{p+q}\left[\left\langle f^2\left(\left|T^2\right|\right)x, x\right\rangle\right]^{\frac{r(p+q)}{2q}} + \frac{p}{p+q}\left[\left\langle g^2\left(\left|\left(T^*\right)^2\right|\right)x, x\right\rangle\right]^{\frac{r(p+q)}{2p}} \quad (\text{不等式 } 2.1)$$

$$\le \left\langle\left(\frac{q}{p+q} f^{\frac{r(p+q)}{q}}\left(\left|T^2\right|\right) + \frac{p}{p+q} g^{\frac{r(p+q)}{p}}\left(\left|\left(T^*\right)^2\right|\right)\right)x, x\right\rangle$$

再利用不等式[10]，$\left|\left\langle Tx, x\right\rangle\right|^r \le \frac{1}{2}\left(\|Tx\|^r \left\|T^* x\right\|^r + \left|\left\langle T^2 x, x\right\rangle\right|^r\right)$，所以

$$\left|\left\langle Tx, x\right\rangle\right|^{2r} \le \frac{1}{2}\left(\|Tx\|^r \left\|T^* x\right\|^r + \left\langle\left(\frac{p}{p+q} f^{\frac{r(p+q)}{q}}\left(\left|T^2\right|\right) + \frac{q}{p+q} g^{\frac{r(p+q)}{p}}\left(\left|\left(T^*\right)^2\right|\right)\right)x, x\right\rangle\right)$$

对上述不等式两边取上确界和利用定义，定理得证。

注 2.1 在不等式(1.10)中，令 $f(t) = g(t) = \sqrt{t}, (t \ge 0), p = q = 2, r \ge 1$，那么有 $\omega^{2r}(T) \le \frac{1}{2}\left(\|T\|^{2r} + \left\|\frac{1}{2}\left|T^2\right|^r + \frac{1}{2}\left|\left(T^*\right)^2\right|^r\right\|\right) = |T|^{2r}$，显然，该式蕴含 $\omega(T) \le \|T\|$，所以不等式(1.10)是(1.1)的推广。

定理 1.4 的证明 设 $T_j \in B(H)$， $r_j \ge 1, j = 1, \cdots, n$， $0 \le \alpha \le 1, x \in H, \|x\| = 1$，那么

$$\prod_{j=1}^{n}\left|\left\langle T_j x,x\right\rangle\right|^{r_j}\le\prod_{j=1}^{n}\left(\left\langle\left|T_j\right|^{2\alpha}x,x\right\rangle\left\langle\left|T_j^*\right|^{2(1-\alpha)}x,x\right\rangle\right)^{\frac{r_j}{2}}\quad(\text{引理 }2.3(1))$$
$$=\left(\left\langle\left|T_1\right|^{2\alpha}x,x\right\rangle^{\frac{r_1}{2}}\cdots\left\langle\left|T_n\right|^{2\alpha}x,x\right\rangle^{\frac{r_n}{2}}\right)\left(\left\langle\left|T_1^*\right|^{2(1-\alpha)}x,x\right\rangle^{\frac{r_1}{2}}\cdots\left\langle\left|T_n^*\right|^{2(1-\alpha)}x,x\right\rangle^{\frac{r_n}{2}}\right)$$
$$\le\left(\frac{r_1}{2}\left\langle\left|T_1\right|^{2\alpha}x,x\right\rangle+\cdots+\frac{r_n}{2}\left\langle\left|T_n\right|^{2\alpha}x,x\right\rangle\right)\left(\frac{r_1}{2}\left\langle\left|T_1^*\right|^{2(1-\alpha)}x,x\right\rangle+\cdots+\frac{r_n}{2}\left\langle\left|T_n^*\right|^{2(1-\alpha)}x,x\right\rangle\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left(\sum_{j=1}^{n}r_j\left\langle\left|T_j\right|^{2\alpha}x,x\right\rangle\right)\left(\sum_{j=1}^{n}r_j\left\langle\left|T_j^*\right|^{2(1-\alpha)}x,x\right\rangle\right)$$
$$\le\frac{1}{8}\left(\left(\sum_{j=1}^{n}r_j\left\langle\left|T_j\right|^{2\alpha}x,x\right\rangle\right)^2+\left(\sum_{j=1}^{n}r_j\left\langle\left|T_j^*\right|^{2(1-\alpha)}x,x\right\rangle\right)^2\right)$$

第二个不等号是因为当$\sum_{j=1}^{n}q_j=1$时，有$\prod_{j=1}^{n}a_j^{q_j}\le\sum_{j=1}^{n}a_jq_j$，所以定理得证。

注 2.2 在不等式(1.12)中取$n=2,r_1=r_2=1,\alpha=\dfrac{1}{2},T=T_1=T_2$，那么可得

$$\left|\left\langle Tx,x\right\rangle\right|^2\le\frac{1}{4}\left\|2\left|T^2\right|^2+2\left|\left(T^*\right)^2\right|^2\right\|,$$

所以不等式(1.12)变为[7]重要不等式$\omega\left(T^2\right)\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left\|\left|T^2\right|^2+\left|\left(T^*\right)^2\right|^2\right\|^{1/2}$。

定理 1.5 的证明 注意到引理 2.4，有$\omega(T)=\sup_{\theta\in R}\left\|\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)\right\|$，由文献[8]有

$\left|\left\langle Tx,x\right\rangle\right|=\sup_{\theta\in R}\left\{\mathrm{e}^{i\theta}\left\langle Tx,x\right\rangle\right\}$，那么$\sup_{\theta\in R}\left\|\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{i\theta}T\right)\right\|=\sup_{\theta\in R}\omega\left(\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{i\theta}T\right)\right)=\omega(T)$，

简单计算，有

$$\left\langle\mathrm{e}^{i\theta}Tx,x\right\rangle=\left\langle\mathrm{e}^{i\theta}\left|T\right|x,U^*x\right\rangle$$
$$=\frac{1}{4}\left(\left\langle\left|T\right|\left(\mathrm{e}^{i\theta}+U^*\right)x,\left(\mathrm{e}^{i\theta}+U^*\right)x\right\rangle-\left\langle\left|T\right|\left(\mathrm{e}^{i\theta}-U^*\right)x,\left(\mathrm{e}^{i\theta}-U^*\right)x\right\rangle\right)$$
$$+\frac{1}{4}i\left(\left\langle\left|T\right|\left(\mathrm{e}^{i\theta}+iU^*\right)x,\left(\mathrm{e}^{i\theta}+iU^*\right)x\right\rangle-\left\langle\left|T\right|\left(\mathrm{e}^{i\theta}-iU^*\right)x,\left(\mathrm{e}^{i\theta}-iU^*\right)x\right\rangle\right)$$

利用推广的极化恒等式

$$\left\langle Tx,x\right\rangle=\frac{1}{4}\left(\left\langle T(x+y),x+y\right\rangle-\left\langle T(x-y),x-y\right\rangle\right)+\frac{1}{4i}\left(\left\langle T(x+iy),x+iy\right\rangle-\left\langle T(x-iy),x-iy\right\rangle\right)$$

设$M=\max\left\{\left\langle\left|T\right|y_1,y_1\right\rangle^{\frac{1}{2}},\left\langle\left|T\right|y_2,y_2\right\rangle^{\frac{1}{2}}\right\}$。$y_1=\left(\mathrm{e}^{i\theta}-U^*\right)x$，$y_1=\left(\mathrm{e}^{i\theta}+U^*\right)x$，那么

$$\mathrm{Re}\left\langle\mathrm{e}^{i\theta}Tx,x\right\rangle=\frac{1}{4}\left(\left\langle\left|T\right|\left(\mathrm{e}^{i\theta}+U^*\right)x,\left(\mathrm{e}^{i\theta}+U^*\right)x\right\rangle-\left\langle\left|T\right|\left(\mathrm{e}^{i\theta}-U^*\right)x,\left(\mathrm{e}^{i\theta}-U^*\right)x\right\rangle\right)$$
$$\le\frac{1}{4}\left(\left\langle\left|T\right|\left(\mathrm{e}^{i\theta}+U^*\right)x,\left(\mathrm{e}^{i\theta}+U^*\right)x\right\rangle^{\frac{1}{2}}-\left\langle\left|T\right|\left(\mathrm{e}^{i\theta}-U^*\right)x,\left(\mathrm{e}^{i\theta}-U^*\right)x\right\rangle^{\frac{1}{2}}\right)$$
$$\times2\max\left(\left\langle\left|T\right|\left(\mathrm{e}^{i\theta}+U^*\right)x,\left(\mathrm{e}^{i\theta}+U^*\right)x\right\rangle^{\frac{1}{2}},\left\langle\left|T\right|\left(\mathrm{e}^{i\theta}-U^*\right)x,\left(\mathrm{e}^{i\theta}-U^*\right)x\right\rangle^{\frac{1}{2}}\right)$$
$$\le\frac{M}{2}\left(\left\langle\left(\mathrm{e}^{i\theta}+U^*\right)\left|T\right|\left(\mathrm{e}^{i\theta}+U^*\right)x,x\right\rangle^{\frac{1}{2}}-\left\langle\left(\mathrm{e}^{i\theta}-U^*\right)\left|T\right|\left(\mathrm{e}^{i\theta}-U^*\right)x,x\right\rangle^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&\le \frac{M}{2}\left\{\left\||T|^{\frac{1}{2}}\left(\mathrm{e}^{i\theta}+U^{*}\right)\left(\mathrm{e}^{-i\theta}+U\right)|T|^{\frac{1}{2}}\right\|-\left\langle |T|^{\frac{1}{2}}\left(\mathrm{e}^{i\theta}-U^{*}\right)x,\left(\mathrm{e}^{i\theta}-U^{*}\right)x\right\rangle\right\} \\
&\le \frac{M}{2}\left(2\|T\|+\left\|\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{i\theta}\tilde{T}\right)\right\|-\left\langle |T|^{\frac{1}{2}}y_2,y_2\right\rangle\right) \\
&\le \frac{M}{2}\left(2\|T\|+\omega\left(\tilde{T}\right)\right)
\end{aligned}
$$

第一个不等号成立，是因为对任意正实数 a,b，有 $a^2-b^2\le 2mas\{a,b\}(a-b)$，第二个不等号成立，是利用引理 2.4 (2)，对上述不等式两边取上确界，定理得证。

4. 小结

算子数值域半径不等式在算子论的研究中有着很重要的作用，但是要精确计算出半径有时候相当困难，所以本文利用一些基本不等式和相关文献已有的结论，得到给出了一些新的算子数值域半径界的不等式，这在将来继续研究算子数值域半径上界的不等式有一定的好处。

参考文献

[1] Dragomir, S.S. (2008) Some Inequalities for the Norm and the Numerical Radius of Linear Operators in Hilbert Spaces. *Tamkang Journal of Mathematics*, **39**, 1-7. https://doi.org/10.5556/j.tkjm.39.2008.40

[2] Dragomir, S.S. (2009) Power Inequalities for the Numerical Radius of Two Operators in Hilbert Spaces. *Sarajevo Journals of Mathematics*, **5**, 269-278.

[3] Gustafson, K.E. and Rao, D.K.M. (1997) Numerical Range, Springer-Verlag, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4613-8498-4

[4] Jung, I.B., Ko, E. and Pearcy, C. (2000) Aluthge Transforms of Operators. *Integral Equations Operators Theory*, **37**, 437-448. https://doi.org/10.1007/BF01192831

[5] Kittaneh, F. (2003) A Numerical Radius Inequality and an Estimate for the Numerical Radius of the Frobenius Companion Matrix. *Studia Mathematica*, **158**, 11-17. https://doi.org/10.4064/sm158-1-2

[6] Kittaneh, F. (1988) Notes on Some Inequalities for Hilbert Space Operators. *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, **24**, 276-293. https://doi.org/10.2977/prims/1195175202

[7] Mirmostaeface, A.K., Rahpeyma, O.P. and Omidvar, M.E. (2014) Numerical Radius Inequalities for Finite Sums of Operators. *Demonstratio Mathematica*, **43**, 963-970. https://doi.org/10.2478/dema-2014-0076

[8] Sattari, M., Moslehian, M.S. and Yamazaki, T. (2015) Some Generalized Numerical Radius Inequalities for Hilbert Space Operators. *Linear Algebra and Its Applications*, **470**, 216-227. https://doi.org/10.1016/j.laa.2014.08.003

[9] Moslehian, M.S. and Rajić, R. (2010) Generalizations of Bohr's Inequality in Hilbert C^*-Modules. *Linear Multlinear Algebra*, **58**, 323-331. https://doi.org/10.1080/03081080802563740

[10] Sababheh, M. (2015) Interpolated Inequalities for Unitarily Invariant Norms. *Linear Algebra and Its Applications*, **475**, 240-250. https://doi.org/10.1016/j.laa.2015.02.026

[11] Omidvar, M.E., Moslehian, M.S. and Niknam, A. (2009) Some Numerical Radius Inequalities for Hilbert Space Operators. *Involve*: *A Journal of Mathematics*, **2**, 471-478. https://doi.org/10.2140/involve.2009.2.471

[12] C.M.P. and KevCkiC, D.J. (1971) Some Inequalities for Complex Numbers. *Mathematica Balkanica*, **1**, 282-286.

[13] Yamazaki, T. (2007) On Upper and Lower Bounds of the Numerical Radius and an Equality Condition. *Studia Mathematica*, **178**, 83-89. https://doi.org/10.4064/sm178-1-5

[14] Yamazaki, T. (2002) An Expression of Spectral Radius via Aluthge Transformation. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **130**, 1131-1137. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-01-06283-9