Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(11), 1934-1940
Published Online November 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.1211208

Hans汉斯

点态化完备代数正规类中的绝对半素代数类与绝对素代数类

杨宗文，娄本功

云南大学数学系，云南 昆明

收稿日期：2022年10月12日；录用日期：2022年11月11日；发布日期：2022年11月21日

摘 要

环及其它代数系统的根理论有了丰富的研究，Puczylowski建立了一般代数正规类的根理论。本文研究点态化完备代数正规类中的绝对半素代数类 τ_s 与绝对素代数类 τ 及其确定的上根性质 $\mathrm{U}\tau_s$， $\mathrm{U}\tau$，证明了 $\mathrm{U}\tau_s$ 是超幂零根， $\mathrm{U}\tau$ 是特殊根， τ_s 是遗传根。

关键词

点态化完备代数正规类，绝对半素代数，绝对素代数，上根，超幂零根，特殊根

The Absolutely Semiprime Algebras Class and the Absolutely Prime Algebras Class in Normal Classes of Complete Pointwise Algebras

Zongwen Yang, Bengong Lou

Department of Mathematics, Yunnan University, Kunming Yunnan

Received: Oct. 12th, 2022; accepted: Nov. 11th, 2022; published: Nov. 21st, 2022

Abstract

The radicals of rings and other various algebraic structures have been researched very much. Puczylowski established the general theory of radicals of the objects called algebras. In this paper, we study the absolutely semiprime algebras class τ_s and the absolutely semiprime algebras class

文章引用: 杨宗文, 娄本功. 点态化完备代数正规类中的绝对半素代数类与绝对素代数类[J]. 理论数学, 2022, 12(11): 1934-1940. DOI: 10.12677/pm.2022.1211208

τ in the normal classes of pointwise complete algebras and the properties of the upper radical $U\tau_s$, $U\tau$ determined by τ_s and τ, it is proved that $U\tau_s$ is a supernilpotent radical, $U\tau$ is a special radical and τ_s is a hereditary radical.

Keywords

Normal Classes of Complete Pointwise Algebras, Absolutely Semiprime Algebras, Absolutely Prime Algebras, Upper Radical, Supernilpotent Radical, Special Radical

1. 引言

环及其它代数系统根理论的统一研究促使一般代数正规类根理论的建立[1]-[15]，为了进一步统一地研究一般代数正规类中根性质，文献[16]-[23]分别引入了可积代数正规类、完备代数正规类，对特殊根等进行了研究，并对一类特殊的半环——大半环(可做单侧减法的半环)建立了相应的根理论；文献[24] [25] [26] [27]对完备代数正规类进行了点态化，研究了点态化完备代数正规类中的亚直既约代数类确定的上根——反单根、遗传幂等根、补根、对偶根、子幂等根、诣零根、λ-根、正则根、κ-根和 β-根的结构性质，文献[28]使用预根概念给出了根类的一个映射刻画，文献[29]定义了点态化完备代数正规类中的低幂等根，证明了 Boolean 根 β、正则根 ν、遗传幂等根 χ、λ-根 λ、幂等代数根 ι 都是低幂等根，并且这 5 个低幂等根满足 $\beta \le \nu \le \chi \le \lambda \le \iota$，文献[30]定义了点态化完备代数正规类中的小理想及小理想遗传根，讨论了小理想及根 R 和 R-半单类 S_R 与小理想相关的 2 个条件(*)与(**)的一些性质，进一步讨论了根 R 是一个小理想遗传根的 2 个条件，文献[31]定义了完备代数正规类中代数类 X 确定的基根类 $L_b(X)$，讨论了基根类 $L_b(X)$ 与代数类 X，下根 $L(X)$ 之间的关系，文献[32]定义了几乎幂零代数、几乎幂零代数类 α 及无非 0 几乎幂零理想代数类 T，讨论了几乎幂零代数类 α 确定的下根及无非 0 几乎幂零理想代数类 T 确定的上根性质。

本文在文献[24]-[32]建立的点态化完备代数正规类基础上，定义了绝对半素代数、绝对半素代数类 τ_s、绝对素代数、绝对素代数类 τ，证明了 τ_s 是弱特殊类，τ 是特殊类，从而上根 $U\tau_s$ 是超幂零根，$U\tau$ 是特殊根。论文第 2 节给出了点态化完备代数正规类相关的概念及基本引理；论文第 3 节定义点态化完备代数正规类中的绝对半素代数类 τ_s 与绝对素代数类 τ 及其确定的上根性质 $U\tau_s$，$U\tau$，证明了 $U\tau_s$ 是超幂零根，$U\tau$ 是超幂零根，τ_s 是遗传根。

2. 预备知识及基本引理

首先引入点态化完备代数正规类的相关概念及性质[24]-[32]，为了建立每个代数的子代数乘积与 S_a 中点乘积之间的联系，本文使用文献[26] [27]中强化了的点乘积公理。

$\mathscr{A}$ 是一个完备代数正规类，$\forall a \in \mathscr{A}$，存在一个非空集 S_a 和一个单射 $\phi_a : L_a^s \to P(S_a)$（$P(S_a)$ 是 S_a 的幂集，且 $\phi_a(0) = S_0$ 是单点集，也记为 0)，并且满足：

1) $\phi_a(a) = S_a$；

2) $\forall i, j \in L_a^s, i \le j$，有 $\phi_a(i) \subseteq \phi_a(j)$；

3) $\forall i_\alpha \le a, \alpha \in \Gamma$，

$\phi_a(\wedge i_\alpha) = \bigcap \phi_a(i_\alpha)$，$\phi_a(\vee i_\alpha) = \bigcup \{\phi_a(i_1 \vee i_2 \vee \cdots \vee i_k) \mid i_1, i_2, \cdots, i_k \in \Gamma, k \ge 1\}$；

4) $\forall i \lhd a$，存在一个满射 $\gamma_i : S_\alpha \to S_{\alpha/i}$，使得 $\forall \varnothing \ne A \subseteq S_a, \varnothing \ne U \subseteq V \subseteq S_a$，有 $\langle \gamma_i(A) \rangle = (\langle A \rangle \vee i)/i$，$\langle \gamma_i(A)) = (\langle A) \vee i)/i$，$(\gamma_i(A)\rangle = ((A\rangle \vee i)/i$，$(\gamma_i(A)) = ((A) \vee i)/i$，且 $\gamma_i(U) \subseteq \gamma_i(V)$。

$\forall t \in S_a$，显然有

$$\langle t\rangle \le \langle t) = \langle t\rangle \vee \langle t\rangle a \le (t) = \langle t\rangle \vee \langle t\rangle a \vee a\langle t\rangle \vee a\langle t\rangle a,$$

$$\langle t\rangle \le (t\rangle = \langle t\rangle \vee a\langle t\rangle \le (t) = \langle t\rangle \vee \langle t\rangle a \vee a\langle t\rangle \vee a\langle t\rangle a。$$

对正整数 n，$\forall x \in S_a$，存在一个 $y_s \subseteq \langle x\rangle^n$，$y_r, y_l, y \in S_a$，使得 $\langle x\rangle^{n+1} = \langle x\rangle\langle y_s\rangle = \langle y_s\rangle\langle x\rangle$，$\langle x)^n = \langle y_r)$，$(x\rangle^n = (y_l\rangle$，$(x)^n = (y)$；对正整数 n，S_a 的非空有限子集或可数子集 A，存在有限子集 $A'_s \subseteq \langle A\rangle^n$，$A'_r, A'_l, A' \subseteq S_a$，使得 $\langle A\rangle^{n+1} = \langle A\rangle\langle A'_s\rangle = \langle A'_s\rangle\langle A\rangle$，$\langle A)^n = \langle A'_r)$，$(A\rangle^n = (A'_l\rangle$，$(A)^n = (A')$。则称 $\mathscr{A}$ 是一个点态化完备代数正规类。$\forall x \in S_a$，称 x 是 a 的一个点。

$\forall S_a$，S_a 上有点乘积定义为 S_a 上一个满足以下条件的二元运算'$\cdot$'：

1) $\forall x, y \in S_a$，都有 $x \cdot y \in S_a$（$x \cdot y$ 记为 xy）;

2) $\forall x, y, z \in S_a$，有 $(xy)z = x(yz)$（记为 xyz）;

3) 存在唯一的单点 $0' \in S_a$（$0'$也记为 0)，满足：$\forall x \in S_a$，有 $0x = x0 = 0$。

结合环类 $\mathscr{R}$ 和大半环类 S_B 都是点态化完备代数正规类。

引理 2.1 [16]：设 $a \in \mathscr{A}$，$x, y \in S_a$。

1) $xy \in \phi_a(\langle x\rangle\langle y\rangle)$；

2) n 是正整数，则 $x^n \in \phi_a(\langle x\rangle^n)$，$\langle x\rangle^n = \langle x^n\rangle$。

引理 2.2 [15]：$\mathscr{A}$ 是一个完备代数正规类，$\forall a \in \mathscr{A}$，$i \lhd a$，$k \lhd i$，$\bar{k}$ 是 a 的包含 k 的最小理想。则 $\bar{k} = k \vee ak \vee ka \vee aka$，且 $\bar{k}^3 \le k$。

定义 2.3 [21]：$\forall \mathrm{K} \subseteq \mathscr{A}$，称 K 是一个弱特殊类，如果 K 满足以下 3 条：

1) $\forall a \in \mathrm{K}$，a 中无非 0 幂零理想;

2) $\forall a \in \mathrm{K}$，$i \lhd a$，则 $i \in \mathrm{K}$；

3) $\forall a \in \mathscr{A}$，$i \lhd a$，$i \in \mathrm{K}$，$i^* = 0$，则 $a \in \mathrm{K}$。

定义 2.4 [21]：$\forall \mathrm{K} \subseteq \mathscr{A}$，称 K 是一个特殊类，如果 K 满足以下 3 条：

1) $\forall a \in \mathrm{K}$，a 是一个素代数;

2) $\forall a \in \mathrm{K}$，$i \lhd a$，则 $i \in \mathrm{K}$；

3) $\forall a \in \mathscr{A}$，$i \lhd a$，$i \in \mathrm{K}$，则 $a/i^* \in \mathrm{K}$，其中 i^*是 a 的使得 $ki = ik = 0$ 的最大理想(称 i 的 0 化子)。

定义 2.5 [21]：设 S 为 $\mathscr{A}$ 中的一个根类。如果 S 满足以下 2 条，则称根类 S 是一个超幂零根：

1) S 是遗传根;

2) $\forall a \in \mathscr{A}$，如果 a 是幂零代数，则 $a \in \mathrm{S}$。

引理 2.6 [21]：设 S 为 $\mathscr{A}$ 中的一个根类。S 是一个超幂零根 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{S} = \mathrm{UK}$，K 是一个弱特殊类。

引理 2.7 [32]：$\mathrm{K} \subseteq \mathscr{A}$ 是一个半素代数类，则以下 3 条等价：

1) $\forall i \lhd a$，$i \in \mathrm{K}$，$i^* = 0$，则 $a \in \mathrm{K}$；

2) $\forall i \lhd \cdot a$，$i \in \mathrm{K}$ 且 $a/i \in \mathrm{K}$，则 $a \in \mathrm{K}$（即 K 本质扩张闭);

3) $\forall i \lhd a$，$i \in \mathrm{K}$，则 $a/i^* \in \mathrm{K}$。

引理 2.8 [32]：$\forall \mathrm{K} \subseteq \mathscr{A}$，K 是一个弱特殊类 $\Leftrightarrow$ K 满足以下 3 条：

1) $\forall a \in \mathrm{K}$，a 是半素代数;

2) $\forall a \in \mathrm{K}$，$i \lhd a$，则 $i \in \mathrm{K}$；

3) $\forall i \lhd \cdot a$，$i \in \mathrm{K}$ 且 $a/i \in \mathrm{K}$，则 $a \in \mathrm{K}$ (即 K 本质扩张闭)。

由定义 2.3，引理 2.7 得：

引理 2.9： $\forall \mathrm{K} \subseteq \mathscr{A}$，称 K 是一个特殊类，如果 K 满足以下 3 条：

1) $\forall a \in \mathrm{K}$，a 是一个素代数；

2) $\forall a \in \mathrm{K}$，$i \lhd a$，则 $i \in \mathrm{K}$；

3) $\forall i \lhd \cdot a$，$i \in \mathrm{K}$ 且 $a/i \in \mathrm{K}$，则 $a \in \mathrm{K}$ (即 K 本质扩张闭)。

引理 2.10 [26]： $\mathscr{A}$ 是一个代数类，$\mathrm{R} \subseteq \mathscr{A}$，R 为 A 中的一个根类 $\Leftrightarrow$ R 满足以下 3 个条件：

a) $\forall a \in \mathscr{A}$，$i \lhd a$，如果 $a \in \mathrm{R}$，则 $a/i \in \mathrm{R}$ (即 R 商闭)；

$\bar{\mathrm{b}}$) $\forall a \in \mathscr{A}$，如果 $i_1 \lhd i_2 \lhd \cdots \lhd i_\mu \lhd \cdots$ 是 a 的 R-理想升链(即 $\forall \mu, i_\mu \in \mathrm{R}$)，则理想 $\vee_{\mu} i_\mu \in \mathrm{R}$ (称 R 有归纳性质)；

$\bar{\mathrm{c}}$) $\forall a \in \mathscr{A}$，$i \lhd a$，如果 $i, a/i \in \mathrm{R}$，则有 $a \in \mathrm{R}$ (称 R 扩张闭)。

3. 点态化完备代数正规类中的绝对半素代数类及绝对素代数类

本节讨论点态化完备代数正规类中的绝对半素代数类及绝对素代数类。

$\mathscr{A}$ 是一个点态化完备代数正规类。

定义 3.1 [21] [27]： 1) $\forall a \in \mathscr{A}$，$p \lhd a$，如果 $\forall i, j \lhd a$，$ij \le p$ 可推出 $i \le p$ 或者 $j \le p$，则称 p 是 a 的一个素理想；

2) $\forall a \in \mathscr{A}$，如果 0 是 a 的一个素理想，则称 a 是一个素代数；

3) $\forall a \in \mathscr{A}$，$p \lhd a$，如果 $\forall i \lhd a$，$i^2 \le p$ 可推出 $i \le p$，则称 p 是 a 的一个半素理想；

4) $\forall a \in \mathscr{A}$，如果 0 是 a 的一个半素理想，则称 a 是一个半素代数；

5) $x \in S_a$，如果有 $\langle x^2 \rangle = \langle x \rangle$，则称 x 是一个幂等元；

6) 如果 $\forall x \in S_a$，有 $\langle x^2 \rangle = \langle x \rangle$，则称 a 是 Boolean 代数。

记 **P** 是所有素代数类。

记所有 Boolean 代数的类为 β。Boolean 代数类 β 是遗传根类、左遗传根、右遗传根及强遗传根，但不是超幂零根。

定义 3.2： 1) $\forall a \in \mathscr{A}$，$0 \ne p \lhd a$，存在 $0 \ne x \in \phi_a(p)$，有 $\langle x^2 \rangle = \langle x \rangle$ (即 x 是一个非零幂等元)，则称 a 是一个绝对半素代数；

2) $\forall a \in \mathscr{A}$，$p \lhd a$，如果 p/a 是绝对半素代数，则称 p 是 a 的一个绝对半素理想；

3) $\forall a \in \mathscr{A}$，如果 a 是一个绝对半素代数又是一个素代数，则称 a 是一个绝对素代数。

4) $\forall a \in \mathscr{A}$，$p \lhd a$，如果 p/a 是绝对素代数，则称 p 是 a 的一个绝对素理想。

所有绝对半素代数及绝对素代数构成的代数类分别称绝对半素代数类及绝对素代数类，分别记为 τ_s，τ。

显然有：$\tau \subseteq \tau_s$，$\tau \subseteq \mathbf{P}$，$\beta \subseteq \tau_s$。

引理 3.3： 绝对半素代数是半素代数。

证明： 1) $\forall a \in \tau_s$，$p \lhd a$，$p^2 = 0$。如果 $p \ne 0$，则存在 $0 \ne x \in \phi_a(p)$，有 $\langle x^2 \rangle = \langle x \rangle$，从而 $0 \ne \langle x \rangle = \langle x^2 \rangle \le p^2$，与 $p^2 = 0$ 矛盾，所以 $p = 0$，即 a 是半素代数。证毕。

故绝对半素代数是半素代数，绝对素代数是素代数。但是，素代数不一定是绝对半素代数(从而半素代数不一定是绝对半素代数，素代数不一定是绝对素代数)，并且绝对半素代数不一定是素代数。

例 1： 取 $\mathscr{A}$ 是结合环类 $\mathscr{R}$，则整数环 **Z** 是素代数(从而是半素代数)，但 **Z** 不是绝对半素代数。

事实上，对 $p \lhd \mathbf{Z}$， $p \neq \mathbf{Z}$，则 $p = k\mathbf{Z}, k > 1$， $\forall 0 \neq x \in p$，有 $x = kn$， $\langle x^2 \rangle = \left\{ k^2 n^2 m \mid m \in \mathbf{Z} \right\}$， $\langle x \rangle = \left\{ knm \mid m \in \mathbf{Z} \right\}$，从而 $\langle x^2 \rangle \neq \langle x \rangle$，即 p 中无非零幂零元，$\mathbf{Z}$ 不是绝对半素代数。

例 2： 取 $\mathscr{A}$ 是结合环类 $\mathscr{R}$， F_1, F_2 是 2 个域， $A = F_1 \oplus F_2$，则 A 是是绝对半素代数，但 A 不是素代数。

事实上，对 $p \lhd \mathbf{Z}$， $p \neq \mathbf{Z}$，则 $p = k\mathbf{Z}, k > 1$， $\forall 0 \neq x \in p$，有 $x = kn$， $\langle x^2 \rangle = \left\{ k^2 n^2 m \mid m \in \mathbf{Z} \right\}$， $\langle x \rangle = \left\{ knm \mid m \in \mathbf{Z} \right\}$，从而 $\langle x^2 \rangle \neq \langle x \rangle$，即 p 中无非零幂零元，$\mathbf{Z}$ 不是绝对半素代数。

引理 3.4： 1) τ_s 是遗传类；

2) τ_s 是本质扩张闭类；

3) τ_s 是商闭类；

4) τ_s 有归纳性质；

5) τ_s 是扩张闭类。

证明： 1) $\forall a \in \tau_s$， $0 \neq i \lhd a$，设 $0 \neq j \lhd i \lhd a$， $\bar{j}$ 是 j 在 a 中生成的理想，则 $\bar{j}^3 \leq j$。如果 $\bar{j}^3 = 0$，因为 $0 \neq \bar{j} \lhd a$，取 $0 \neq x \in \phi_a(\bar{j})$，$a$ 是绝对半素代数，故有 $\langle x^2 \rangle = \langle x \rangle \neq 0$，从而 $0 \neq \langle x \rangle = \langle x^2 \rangle = \langle x^4 \rangle \leq \bar{j}^4 \leq \bar{j}^3 \leq j$，故 $0 \neq x \in \phi_a(j)$ 是 j 中幂等元，即 i 中非零理想都有非零幂等元，i 是绝对半素代数，所以 $i \in \tau_s$， τ_s 是遗传的。

2) 设 $a \in \mathscr{A}$， $b \lhd \cdot a$， $b \in \tau_s$， $0 \neq i \lhd a$，则 $0 \neq b \wedge i \lhd b$，故存在 $0 \neq x \in b \wedge i$ 是幂等元，从而 x 也是 i 中非零幂等元，从而 a 是绝对半素代数，即 τ_s 将本质扩张闭。

3) $\forall a \in \tau_s$，$i \lhd a$，$a/i \neq 0$，$0 \neq x \in S_{a/i}$。对满射 $\gamma_i : S_a \to S_{a/i}$，存在 $0 \neq y \in S_a$， $x = \gamma_i(y)$。由 $a \in \tau_s$，则 $\langle y^2 \rangle = \langle y \rangle$，所以 $\langle x^2 \rangle = \langle (\gamma_i(y))^2 \rangle = \langle \gamma_i(y^2) \rangle = \langle \gamma_i(y) \rangle = \langle x \rangle$，从而 $a/i \in \tau_s$，即 τ_s 是商闭类。

4) $\forall a \in \mathscr{A}$，如果 $i_1 \lhd i_2 \lhd \cdots \lhd i_\mu \lhd \cdots$ 是 a 的 τ_s 理想升链， $\forall 0 \neq x \in \phi_a(\vee i_u) = \cup \phi_a(i_u)$，故存在 μ，使得 $0 \neq x \in \phi_a(i_u)$，由 i_μ 是 a 的 τ_s 理想，因此有 $\langle x^2 \rangle = \langle x \rangle$，即 $\vee i_\mu \in \tau_s$，代数类 τ_s 有归纳性质。

5) $\forall a \in \mathscr{A}$， $i \lhd a$，如果 $i, a/i \in \tau_s$。 $0 \neq x \in S_a$， $y = \gamma_i(x) \in a/i$。如果 $y = \gamma_i(x) = 0$，则 $x \in S_i$，由 $i \in \tau_s$，故 $\langle x^2 \rangle = \langle x \rangle$。如果 $y = \gamma_i(x) \neq 0$，由 $a/i \in \tau_s$ 有 $\langle y^2 \rangle = \langle y \rangle$，即 $\langle y \rangle = (\langle x \rangle \vee i)/i = \langle y^2 \rangle = (\langle x^2 \rangle \vee i)/i$，故而 $\langle x \rangle \vee i = \langle x^2 \rangle \vee i$，因此 $\langle x \rangle \leq \langle x^2 \rangle \vee i$，所以有 $x_1 \in \langle x^2 \rangle, x_2 \in i$，使得 $\langle x \rangle \leq \langle x_1 \rangle \vee \langle x_2 \rangle$，$\langle x_2 \rangle \leq \langle x \rangle \vee \langle x_1 \rangle$。由于 $x_1 \in \langle x^2 \rangle \leq \langle x \rangle$，所以 $\langle x_1 \rangle \leq \langle x \rangle$，故 $\langle x_2 \rangle \leq \langle x \rangle \vee \langle x \rangle = \langle x \rangle$。又因为 $i \in \beta$， $x_2 \in \phi_a(i)$，所以 $\langle x_2^2 \rangle = \langle x_2 \rangle$，故 $\langle x^2 \rangle = \langle x \rangle^2 = \langle x_2 \rangle^2 = \langle x_2^2 \rangle = \langle x_2 \rangle = \langle x \rangle$，即 $a \in \tau_s$， τ_s 扩张闭。证毕。

定理 3.5： τ_s 是弱特殊类。

证明： 1) $\forall a \in \tau_s$， a 是绝对半素代数，从而 a 是半素代数。

2) 由引理 3.4 有 τ_s 是遗传的。

3) 由引理 3.4 有 τ_s 本质扩张闭。

由引理 2.8 知 τ_s 是弱特殊类。证毕。

由例 2 知 τ_s 不是特殊类。

引理 3.6： 1) τ 是遗传类；

2) τ 是本质扩张闭类。

证明： 1) $\forall a \in \tau$， a 是绝对素代数，从而 a 是素代数。

2) $\forall a \in \tau$， $0 \neq i \lhd a$， a 是绝对素代数，从而 a 是绝对半素代数及素代数。由引理 3.4 知 i 是绝对半素代数，由素代数的遗传性知 i 是绝对半素代数，所以 i 是绝对素代数，即 $i \in \tau$， τ 是遗传的。

3) 设 $a \in \mathscr{A}$， $b \lhd \cdot a$， $b \in \tau$， b 是绝对半素代数及素代数。由定理 3.3 知 a 是绝对半素代数，由素代数的本质扩张闭性知 a 是素代数，从而 a 是绝对素代数，即 $a \in \tau$，即 τ 本质扩张闭。证毕。

定理 3.7： τ 是特殊类。

证明： 1) $\forall a \in \tau$，a 是绝对素代数，从而 a 是素代数。

2) 由定理 3.6 知 τ 是遗传的。

3) 由定理 3.6 知 τ 本质扩张闭。

由引理 2.9 知 τ 是特殊类。证毕。

由 τ_s，τ 确定的上根 $\mathrm{U}\tau_s$，$\mathrm{U}\tau$ 分别称绝对半素根及绝对素根，由定理 3.5 知绝对半素根 $\mathrm{U}\tau_s$ 是超幂零根，但不是特殊根；由定理 3.7 知绝对素根 $\mathrm{U}\tau$ 是特殊根。

根据上根的性质有：

推论 3.8： $\forall a \in \mathscr{A}$，有：

1) $\mathrm{U}\tau_s(a) = \wedge\{i \lhd a \mid a/i \in \tau_s\} = \wedge\{i \lhd a \mid i\text{是绝对半素理想}\}$；

2) $\mathrm{U}\tau(a) = \wedge\{i \lhd a \mid a/i \in \tau\} = \wedge\{i \lhd a \mid i\text{是绝对素理想}\}$。

由引理 3.4 有 τ_s 是遗传类、商闭类、有归纳性质及是扩张闭类，从而由引理 2.10 得：

定理 3.9： τ_s 是遗传根。

$\mathbf{P}$ 是所有素代数类，Bear 根 $\mathrm{B} = \mathrm{U}\mathbf{P}$ [16]，由于 $\tau \subset \tau_s$，$\tau \subset \mathbf{P}$，故有

$\mathrm{B} \le \mathrm{U}\tau$，$\mathrm{U}\tau_s \le \mathrm{U}\tau$。

4. 小结

本文研究点态化完备代数正规类中的绝对半素代数、绝对半素代数 τ_s、绝对素代数、绝对素代数类 τ，证明了 τ_s 是弱特殊类，τ 是特殊类，从而上根 $\mathbf{U}\tau_s$ 是超幂零根，$\mathbf{U}\tau$ 是超幂零根，τ_s 是遗传根。

基金项目

国家自然科学基金(11261067)。

参考文献

[1] Száse, F.A. (1981) Radicals of Rings. John Wiley & Sons, New York.

[2] Gardner, B.J. and Wiegandt, R. (2004) Radical Theory of Rings. Marcel Dekker, Inc., New York and Basel. https://doi.org/10.1201/9780203913352

[3] McDougall, R. (1999) A Generalisation of the Lower Radical Class. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, **59**, 139-146. https://doi.org/10.1017/S000497270003269X

[4] Van Leeuwen, L.C.A. and Heyman, G.A.P. (1975) A Radical Determined by a Class of Almost Nilpotent Rings. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*, **26**, 259-262. https://doi.org/10.1007/BF01902329

[5] Heyman, G.A.P, Jenkins, T.L. and Roux, H.J. (1982) Variations on Almost Nilpotent Rings, Their Radicals and Partitions. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*, **39**, 11-15. https://doi.org/10.1007/BF01895208

[6] Sands, A.D. (1985) On Almost Nilpotent Rings. *Acta Mathematica Hungarica*, **45**, 41-43. https://doi.org/10.1007/BF01955021

[7] Puczyłowski, E.R. (1986) A Note on Almost Nilpotent Rings. *Acta Mathematica Hungarica*, **48**, 289-291. https://doi.org/10.1007/BF01951354

[8] 梁治安. 关于几乎幂零环的一些结果[J]. 内蒙古大学学报(自然科学版), 1989, 20(4): 435-437.

[9] Heyman, G.A.P. (1990) On Almost Nilpotent Rings and Ideals. *Acta Mathematica Hungarica*, **56**, 283-285. https://doi.org/10.1007/BF01903843

[10] 张宪君. 关于绝对半素环和绝对半素根[J]. 纯粹数学与应用数学, 1993, 9(2): 57-60.

[11] 张宪君, 于淑兰. 绝对素环与绝对素根[J]. 黑龙江大学自然科学学报, 1998, 15(3): 21-22.

[12] Puczylowski, E.R. (1993) On General Theory of Radicals. *Algebra Universalis*, **39**, 53-60. https://doi.org/10.1007/BF01196549

[13] Wang, Y. and Zhang, A.H. (2002) Radicals and Semisimple Classes of the Class of Algebras. *Journal of Anshan Nor-*

mal University, **4**, 5-10.

[14] 任艳丽, 王尧. 代数正规类中的遗传根与强半单根[J]. 数学研究与评论, 2004, 24(4): 597-602.

[15] Yang, Z.W. (2006) The Upper Radical Classes of the Class of Algebras. *Journal Yunnan University* (*Natural Sciences Edition*), **28**, 8-11.

[16] Yang, Z.W. and Pan, J.M. (2008) The Supernilpotent Radical, Special Radical and Bear Radical in Normal Classes of Product Algebras. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, **32**, 181-192.

[17] Yang, Z.W. and Pan, J.M. (2010) The Radicals and Likemodules in Normal Classes of Complete Alagebras. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, **34**, 377-386.

[18] 杨宗文, 杨柱元. 完备代数正规类的根与右理想[J]. 昆明理工大学学报(理工版), 2006, 31(3): 112-116, 120.

[19] 杨宗文, 杨柱元. 子环的和与积[J]. 云南大学学报(自然科学版), 2007, 29(4): 335-338.

[20] 杨宗文, 杨柱元, 李友宝. 大半环子半环的和与积[J]. 昆明理工大学学报(理工版), 2007, 32(6): 113-118.

[21] 杨宗文, 杨柱元, 李友宝. 可积代数正规类中半素代数类及半素一致代数类确定的上根[J]. 数学理论与应用, 2008, 28(4): 71-75.

[22] Yang, Z.W., Yang, Z.Y. and Li, Y.B. (2010) The General Radicals Theory of the Big Semirings. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, **34**, 1149-1167.

[23] Yang, Z.W. and Yang, Z.Y. (2011) The Semihereditary and Semisupernilpotent Radicals in Normal Classes of Product Algebras. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, **35**, 891-902.

[24] 杨宗文, 何青海. 点态化完备代数正规类中的亚直既约代数类[J]. 理论数学, 2018, 8(5): 546-554. https://doi.org/10.12677/PM.2018.85072

[25] 杨宗文，何青海. 点态化完备代数正规类中的遗传幂等根、补根、对偶根、子幂等根及诣零根[J]. 理论数学, 2018, 8(6): 712-722. https://doi.org/10.12677/pm.2018.86096

[26] 杨宗文, 何青海. 点态化完备代数正规类中的 λ-根和正则根[J]. 理论数学, 2019, 9(7): 836-842. https://doi.org/10.12677/pm.2019.97109

[27] 杨宗文, 何青海. 点态化完备代数正规类中的 Jacobson 代数和 Boolean 代数[J]. 理论数学, 2019, 9(9): 1009-1014. https://doi.org/10.12677/pm.2019.99127

[28] 杨宗文, 娄本功. 点态化完备代数正规类中 Amitsur-Kurosh 根的映射刻画[J]. 理论数学, 2020, 10(12): 1138-1144. https://doi.org/10.12677/pm.2020.1012135

[29] 杨宗文, 娄本功. 点态化完备代数正规类中的低幂等根[J]. 理论数学, 2021, 11(1): 1-6. https://doi.org/10.12677/pm.2021.111001

[30] 杨宗文, 娄本功. 点态化完备代数正规类中的小理想[J]. 理论数学, 2021, 11(10): 1691-1695. https://doi.org/10.12677/pm.2021.1110189

[31] 杨宗文, 娄本功. 完备代数正规类中的基根[J]. 理论数学, 2021, 11(12): 2012-2017. https://doi.org/10.12677/pm.2021.1112224

[32] 杨宗文, 娄本功. 点态化完备代数正规类中的几乎幂零代数类[J]. 理论数学, 2022, 12(9): 1527-1535. https://doi.org/10.12677/pm.2022.129166