

具有流结构的合作博弈及其应用

葛静沂, 张 广*

上海理工大学管理学院, 上海

收稿日期: 2022年11月24日; 录用日期: 2022年12月22日; 发布日期: 2022年12月29日

摘 要

本文讨论了一类具有联盟受限的合作博弈问题,在经典可转移效用合作博弈的基础上引入有向网络结构,提出了具有流限制的合作博弈模型,简称流博弈。随后,基于Shapley值和有向图限制结构定义了流博弈的一个解,并对其性质进行了分析。通过对有效性以及公平性等性质的扩展,给出了流博弈分配规则的一个公理刻画。最后,将流博弈及其分配规则应用在跨国公益物资运输问题中,构建了成本运输分摊博弈模型,并通过算例分析了流博弈及其分配规则的合理性。

关键词

流结构, 分配规则, 合作博弈, 跨国运输

Cooperative Games with Network Flow Structure and Its Application

Jingyi Ge, Guang Zhang*

Business School, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Nov. 24th, 2022; accepted: Dec. 22nd, 2022; published: Dec. 29th, 2022

Abstract

This paper introduces flow structure constraints and puts forward a cooperative game with flow structure (flow games for short). And then, the Shapley value is used to define a solution concept, called flow value, for the class of flow games, and the axiomatization of the new value is proposed by efficiency and flow fairness. Finally, flow games and the flow value are applied to the transnational public welfare supplies problem, and the rationality of the game model and allocation rule is ana-

*通讯作者。

lyzed as an aspect of applications.

Keywords

Flow Structure, Allocation Rule, Cooperative Game, Cross-Border Transportation

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在经典的合作博弈中, 每个局中人都可以自由地与其他局中人合作, 形成合作联盟, 并获得相应的联盟收益。但在现实生活中, 受到社会地位、文化背景、地理或物理等因素的影响, 并非所有的联盟都可以形成。因此, 联盟结构受到限制的合作博弈问题便得到了学者们的关注。Myerson [1]首先提出了图限制博弈(简称图博弈)的概念: 基于给定的图结构, 每个节点均代表一个局中人, 两个节点间的边则表示局中人间存在对等的双边关系。这种双边关系可以表示为局中人间的人际关系、制定的对等协议以及信息交流渠道等。在图博弈中, 通常假定只有相互连通的局中人之间才能合作。借助 Shapley 值[2], Myerson 定义了图博弈的公平分配规则, 并证明其是满足有效性和公平性的唯一解。这个解后来被称为 Myerson 值。众所周知, Shapley 值是一个重要的合作博弈解概念, 在自然科学和社会科学的众多领域均有其应用场景, 例如以 Shapley 值作为清理河流污染或易腐品联合运输费用的成本分摊规则[3] [4], 以及以 Shapley 值作为产业集群企业的利益分配规则[5]等。Myerson 值作为 Shapley 值的推广, 其同样具有广泛的应用领域, 例如网络微电网利润分配[6]、碳减排责任分配[7]、目标车头时距控制与双向自均衡车头时距控制[8]等。

自 Myerson 提出图博弈后, 合作联盟受结构限制的合作博弈便得到了广泛的关注。Khmelnitskaya [9]以及 Khmelnitskaya 等[10]研究了有具有向图结构的合作博弈, Myerson [11]以及 van den Nouweland 等[12]将图博弈推广到了超图博弈, van den Brink 等[13] [14]则对具有准许结构的合作博弈进行了研究。其中, 准许结构可以用来描述上下级之间的控制关系, 因此可以用有向图来进行表示。相对于无向图中的边, 有向图中的有向边(弧)具有更加丰富的意义。除了控制关系外, 有向边还可以描述先后关系以及路径关系等[15] [16], Kalai 和 Zemel 基于此提出网络流博弈[17]。此模型目前被广泛应用于运输、通信、配送等领域的系统分析中。

上述的有向图博弈、准许博弈和网络流博弈均是基于不同的现实背景提出的博弈类型。受此启发, 本文基于信息传递或物资运输的特性, 提出了具有流结构的合作博弈(流博弈)。在流结构中, 信息或物资只有从始发点发出并顺利抵达接收点, 才能产生合作效益。因此, 本文中假定, 在有向图结构中, 只有同时包含有效源点和有效汇点并且连通的联盟才是可行联盟, 才能获得相应的联盟收益。基于这一假设, 本文定义了流限制博弈, 其赋予任意联盟其自主部分的收益, 其中联盟的自主部分由联盟包含的所有可行联盟构成。借助 Shapley 值, 本文定义了流博弈的一个分配规则——流值, 并基于流博弈的有效性和流公平性完成了流值的公理刻画。与以往的研究相比, 本文对网络流结构定义了相应的分配规则和公平性质等内容, 论证了分配规则的合理性。同时本文的研究也填补了合作博弈在具有流结构限制上的研究空白。

本文的结构安排如下: 第 2 节介绍了具有可转移效用的合作博弈(TU 博弈)和有向图的相关概念。第 3 节定义了具有流结构的合作博弈及流值。第 4 节介绍了流博弈和流值在跨国公益物资运输问题中的应

用, 借助最小费用流构建了跨国物资运输博弈模型, 并通过一个算例说明流值在公益物资运输费用的成本分中具有合理性。在第 5 节提供了结语。

2. TU 博弈与有向图

一个具有可转移效用的合作博弈(TU 博弈)通常用一个二元组 (N, v) 来表述, 其中 $N = \{1, \dots, n\}, n \geq 2$ 是局中人集合, $v: 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ 是定义在局中人集合 N 上的特征函数且有 $v(\emptyset) = 0$ 。任意的子集 $E \subseteq N$ 称为一个联盟, $v(E)$ 为联盟 E 能够获得的价值。为简便起见, 用特征函数 v 代替 (N, v) 表示一个 TU 博弈。记 \mathcal{G}^N 为所有局中人集合为 N 的博弈集合。

在合作博弈的众多分配规则中, Shapley 值、等比例分配规则和按比例分配规则均是经典的解的概念。

定义 2.1 对于任意联盟 $E \subseteq N$, 称 u_E 为 $(2^N - 1)$ 维实向量空间 \mathcal{G}^N 上的 **无异议基(无异议博弈)** [18], 如果对任意的联盟 $E \subseteq F$ 有 $u_E(F) = 1$; 以及对联盟 $E \not\subseteq F$ 有 $u_E(F) = 0$ 。

根据无异议基, 任意的博弈 $v \in \mathcal{G}^N$ 可以表示为 $v = \sum_{\substack{E \subseteq N \\ E \neq \emptyset}} \Delta_v(E) u_E$ 。其中 $\Delta_v(E) = \sum_{F \subseteq E} (-1)^{|E|-|F|} v(F)$ 为联盟 $E \subseteq N$ 在 $v \in \mathcal{G}^N$ 中的 **红利**[18]。

定义 2.2 在博弈 $v \in 2^N$ 中, 局中人 $i \in N$ 的 **Shapley 值**[2] 为 $Sh_i(v) = \sum_{E \subseteq N, E \ni i} \frac{\Delta_v(E)}{|E|}$ 。

定义 2.3 对任意 TU 博弈 $(N, v) \in \mathcal{G}^N$, **等比例分配规则** 分配给中局中人 $i \in N$ 的支付为 $\mathcal{E}_i(v, D) = \frac{v(N)}{|N|}$ 。

按比例分配以局中人在联盟中的权重为比例分配给他们相应的收益。

定义 2.4 对任意 TU 博弈 $(N, v) \in \mathcal{G}^N$, 给定权重 $w \in \mathbb{R}_+^N$, **按比例分配规则** 分配给中局中人 $i \in N$ 的支付为 $\mathcal{P}_i(v, D) = \frac{w_i}{\sum_{j \in E} w_j} \frac{v(N)}{|N|}$ 。

本文将用一个具有源点和汇点的有向图来表示一个流结构。令二元组 (N, D) 表示一个有向图, 其中 N 是节点集合, 每个节点对应合作博弈的一个局中人, $D = \{(i, j) : i, j \in N; i \neq j\}$ 是流结构的弧集, 其元素 $(i, j) \in D$ 是由 i 指向 j 的一条弧, 表示信息(或货物)可行的流动方向。为简便起见, 我们用符号 D 替代 (N, D) 表示一个有向图。符号 $D(i) = \{j \in N : (i, j) \in D\}$ 记为局中人 $i \in N$ 直接后继的集合; 符号 $D^{-1}(i) = \{j \in N : (j, i) \in D\}$ 为局中人 i 直接前驱的集合。此外, 用 $\hat{D}(i)$ 表示 $i \in N$ 在有向图 D 上的所有下级(或后继)的集合, 即 $j \in \hat{D}(i)$ 当且仅当存在有限序列 (h_1, \dots, h_t) 使得 $h_1 = i, h_t = j$ 并且有 $h_{k+1} \in D(h_k), k = 1, \dots, t-1$, 成立。相应地, $\hat{D}^{-1}(i) = \{j \in N : i \in \hat{D}(j)\}$ 记为局中人 $i \in N$ 在有向图 D 中所有上级(或前驱)的集合。此外, 对任意 $i \in N$, 令 $\bar{D}(i) = \{i\} \cup \hat{D}(i), \hat{D}^{-1}(i) = \{i\} \cup \hat{D}^{-1}(i)$ 。在有向图 D 中, 记 $S_D = \{i \in N : D^{-1}(i) = \emptyset\}$ 为 D 中源点的集合, $T_D = \{i \in N : D(i) = \emptyset\}$ 为 D 中汇点的集合。记 $S_0 \subseteq S_D$ 和 $T_0 \subseteq T_D$ 分别为有效源点和有效汇点的集合。本文中, 有效源点和有效汇点分别为信息或货物的实际发出地和目的地。若不存在 $i \in N$ 使得 $i \in \hat{D}(i)$ 或 $i \in \hat{D}^{-1}(i)$, 则称有向图 D 为无圈有向图。

3. 具有流结构的合作博弈

3.1. 流博弈和流值

我们称有向图 D 以及固定源点 S_0 和固定汇点 T_0 的结构是一个 **流结构**, 若 D 是一个无圈有向图且 S_0 和 T_0 均为非空。此外, 我们称序列 (h_1, \dots, h_t) 为一条流, 如果 $h_1 \in S_0, h_t \in T_0$ 且有 $h_{k+1} \in D(h_k), k = 1, \dots, t-1$ 成立。

五元组 (N, v, D, S_0, T_0) 是一个具有流结构的 TU 博弈(简称流博弈), 其中 (N, v) 是一个合作博弈,

$\tilde{D} = (D, S_0, T_0)$ 是一个流结构。我们用符号 $\mathcal{G}_N^{\tilde{D}}$ 记作所有具有流博弈的集合。为简便起见, 我们用符号 (v, D, S_0, T_0) 代替 (N, v, D, S_0, T_0) 表示一个流博弈。在流博弈中, 只有包含完整流结构的合作联盟才是可行联盟。其经济意义为: 信息或货物只有从发源地到达目的地才能产生经济效益。

为了更好地理解流博弈的合作特性, 我们对可行联盟做进一步探索。

定义 3.1 在流博弈 $(v, D, S_0, T_0) \in \mathcal{G}_N^{\tilde{D}}$ 中, 子集 $E \subseteq N$ 称为流结构 (D, S_0, T_0) 中的**自主联盟**, 若对任意的 $i \in E \setminus S_0$ 均有 $D^{-1}(i) \cap E \neq \emptyset$, 以及对于任意的 $i \in E \setminus T_0$ 均有 $D(i) \cap E \neq \emptyset$ 同时成立。

实际上, 流博弈的自主联盟就是可行联盟。令 $\Psi_{\tilde{D}}$ 为给定流结构 (D, S_0, T_0) 的所有自主联盟的集合, 则由定义 2.1 可知

$$\Psi_{\tilde{D}} = \{E \subseteq N : \exists (j_1, \dots, j_t) \subseteq E, \text{ s.t. } j_1 \in S_0, j_t \in T_0, j_{k+1} \in D(j_k), k=1, \dots, t-1\}.$$

显然, 自主联盟集是给定流博弈 $(v, D, S_0, T_0) \in \mathcal{G}_N^{\tilde{D}}$ 的所有可行联盟的集合。

针对自主联盟集我们还有如下结论: 任意两个自主联盟的并集仍然是自主联盟。

注 3.1 本文仅考虑连通图。

定理 3.1 设 $(v, D, S_0, T_0) \in \mathcal{G}_N^{\tilde{D}}$ 是一个流博弈, 则 $N \in \Psi_{\tilde{D}}$, 且对任意的 $E, F \in \Psi_{\tilde{D}}$, 均有 $E \cup F \in \Psi_{\tilde{D}}$ 成立。

证明: 由流结构的定义显然有 $N \in \Psi_{\tilde{D}}$ 成立。令 $i \in E \setminus S_0$, 则 $i \in (E \cup F) \setminus S_0$, 且由定义 3.1 可知 $D^{-1}(i) \cap E \neq \emptyset$ 且 $D(i) \cap E \neq \emptyset$, 则 $D^{-1}(i) \cap (E \cup F) \neq \emptyset$ 且 $D(i) \cap (E \cup F) \neq \emptyset$, 故有 $E \cup F \in \Psi_{\tilde{D}}$ 。

对任意联盟, 其包含的局中人并非都能产生经济效益。因此, 我们还需进一步对联盟中能够产生经济效益的局中人进行定义, 以便确定联盟可以产生的价值。

定义 3.2 在流博弈 $(v, D, S_0, T_0) \in \mathcal{G}_N^{\tilde{D}}$ 中, 联盟 $E \subseteq N$ 的**自主部分**为 $\sigma(E) = \cup \{F \in \Psi_{\tilde{D}} : F \subseteq E\}$ 。

由联盟自主部分的定义可知, 任一联盟的所有自主子联盟构成了该联盟的自主部分, 这部分的局中人正是该联盟能够产生经济效益的局中人的集合, 即联盟的自主部分使得信息或货物能够从源点到达汇点, 并在其中发挥了作用。

对于非自主联盟, 其可以通过说服其他局中人的加入而形成自主联盟。对于非自主联盟成为自主联盟的过程, 我们有如下可行流联盟的定义。

定义 3.3 设 $E \subseteq N$ 是一个联盟, $F \subseteq N$ 是流结构 $\tilde{D} = (D, S_0, T_0)$ 中 E 的**可行流联盟**, 如果其满足:

- i) $F \in \Psi_{\tilde{D}}$ 且 $E \subseteq F$;
- ii) 不存在 $G \in \Psi_{\tilde{D}}$, 使得 $E \subset G \subseteq F$ 。

记 $\mathfrak{A}_{\tilde{D}}(E) \subseteq \Psi_{\tilde{D}}$ 为联盟 E 在无圈流结构 $\tilde{D} = (D, S_0, T_0)$ 中所有可行流联盟集的集合。显然 $E \in \Psi_{\tilde{D}}$ 当且仅当每一个 $i \in E$ 都存在可行流联盟集 $E_i \subseteq \mathfrak{A}_{\tilde{D}}(\{i\})$ 且 $E_i \subseteq E$ 。使用可行流联盟的特征改写自主联盟集, 即 $\Psi_{\tilde{D}} = \{E \subseteq N : \{E\} = \mathfrak{A}_{\tilde{D}}(E)\}$ 或 $\Psi_{\tilde{D}} = \bigcup_{E \subseteq N} \mathfrak{A}_{\tilde{D}}(E)$ 。注意到对于任意非空联盟 $\emptyset \neq E \subseteq N$ 都有 $\mathfrak{A}_{\tilde{D}}(E) \neq \emptyset$ 。

为了给出流博弈的一个解, 我们首先基于流结构定义一个受限博弈。

定义 3.4 设 $(v, D, S_0, T_0) \in \mathcal{G}_N^{\tilde{D}}$ 是一个流博弈, 其**流限制博弈** $v^{\tilde{D}}$ 定义为:

$$v^{\tilde{D}}(E) = v(\sigma(E)), \forall E \subseteq N.$$

定义 3.4 指出, 在流限制博弈中, 联盟仅能获得其自主部分相对应的收益。基于此受限博弈, 可进一步给出该类博弈的一个解概念:

定义 3.5 映射 $\psi : \mathcal{G}_N^{\tilde{D}} \rightarrow \mathbb{R}^n$ 称为**流值**, 其分配给任意的流博弈 $(v, D, S_0, T_0) \in \mathcal{G}_N^{\tilde{D}}$ 一个支付向量为: $\psi(v, D, S_0, T_0) = Sh(v^{\tilde{D}})$ 。

定义 3.5 说明, 在流博弈中, 流值分配给该博弈局中人其对应的流限制博弈的 Shapley 支付。

注意, 在流博弈中, 使用等比例分配的结果分别为: $\mathcal{E}(v, D, S_0, T_0) = \mathcal{E}(v^{\tilde{D}})$ 。

使用等比例分配的结果分别为: $\mathcal{P}(v, D, S_0, T_0) = \mathcal{P}(v^{\tilde{D}})$ 。

接下来我们通过一个例子来说明流博弈以及流值。

例 3.1 令 $(v, D, S_0, T_0) \in \mathcal{G}_N^{\tilde{D}}$ 是一个 4 人流博弈, 特征函数 $v = u_{\{4\}}$, 流结构为 $\tilde{D} = \{(1,2), (1,3), (2,3), (2,4), (3,4)\}$, $S_0 = \{1\}$, $T_0 = \{4\}$ 。如图所示:

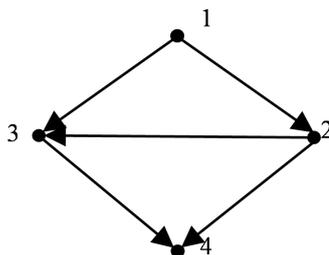


Figure 1. Flow structure

图 1. 流结构

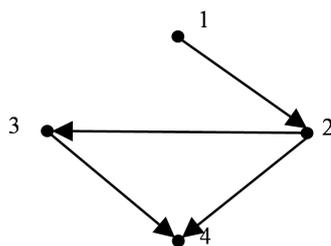


Figure 2. Flow structure

图 2. 流结构

由定义 3.1 可知, 该博弈的自主联盟集合为:

$$\Psi_{\tilde{D}} = \{\{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, N\}.$$

由定义 3.4 可得流限制博弈为:

$$v^{\tilde{D}}(E) = \begin{cases} 1 & E \subseteq \Psi_{\tilde{D}} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

结合定义 3.5 可计算流值为 $\psi(v, D, S_0, T_0) = \left(\frac{5}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{5}{12}\right)$ 。若有向图结构由图 1 所示的流结构 \tilde{D} 变为图 2 所示的流结构 \tilde{D}' 且 S_0 和 T_0 保持不变, 其中 $\tilde{D}' = \{(1,2), (2,3), (2,4), (3,4)\}$, 则新流博弈的自主联盟集合、流限制博弈以及流值分别为:

$$\Psi_{\tilde{D}'} = \{\{1, 2, 4\}, N\}, v^{\tilde{D}'}(E) = \begin{cases} 1 & E \subseteq \Psi_{\tilde{D}'} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$\text{以及 } \psi(v, \tilde{D}', S_0, T_0) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}\right).$$

由例 3.1 可知, 在给定合作博弈特征函数的情况下, 当流结构出现变化时, 流博弈的支付结果也会相应地出现变动。下一节我们将流结构变化对流值的影响做进一步研究, 并完成流值的公理刻画。

3.2. 公理刻画

令 f 是定义在 $\mathcal{G}_N^{\bar{D}}$ 上的一个分配规则, 其分配给任意的流博弈 $(v, D, S_0, T_0) \in \mathcal{G}_N^{\bar{D}}$ 一个支付向量 $f(v, D, S_0, T_0) \in \mathbb{R}^n$ 。

公理 3.1 (有效性) 对所有 $(v, D, S_0, T_0) \in \mathcal{G}_N^{\bar{D}}$, 分配规则 f 满足有效性, 如果有

$$\sum_{i \in N} f_i(v, D, S_0, T_0) = v(N)。$$

有效性是指, 大联盟中所有成员的支付之和等于大联盟的收益。换句话说, 大联盟获得的收益将全部分配给其成员, 不能多分也不能少分。

下面我们将证明流值满足有效性。

定理 3.2 流值 ψ 满足有效性。

证明: 由 Shapley 值的有效性可知 $\sum_{i \in N} Sh_i(v) = v(N)$, 又由定理 3.1 可知 $\sigma(N) = N$ 。

因此 $\sum_{i \in N} \psi_i(v, D, S_0, T_0) = \sum_{i \in N} Sh_i(v^{\bar{D}}) = v^{\bar{D}}(N) = v(\sigma(N)) = v(N)$ 。

公理 3.2 (流公平性) 分配规则 f 是公平的, 若对所有 $(v, D, S_0, T_0) \in \mathcal{G}_N^{\bar{D}}$ 以及 $(h, j) \in D$ 有:

$$f_i(v, D, S_0, T_0) - f_i(v, D_{-(h,j)}, S_0, T_0) = c。$$

其中 $i \in \bigcup_{E \in \mathfrak{A}_{\bar{D}}(\{h,j\})} E, c \in \mathbb{R}$ 是常数以及 $D_{-(h,j)} = D \setminus (h, j)$ 。

流公平性表明如果在同时包含 h 和 j 的自主联盟中删除局中人 h 与其直接后继 j 之间的关系, 将会导致可行流联盟内局中人的流值增加或减少相同的数量。

在证明流值具有流公平性之前, 我们先论证删除流结构的一条弧后对流结构带来的影响。

引理 3.1 对所有 $(v, D, S_0, T_0) \in \mathcal{G}_N^{\bar{D}}$ 和 $(h, j) \in D$ 则有 $\Psi_{\bar{D}_{-(h,j)}} \subseteq \Psi_{\bar{D}}$, 其中 $\Psi_{\bar{D}_{-(h,j)}}$ 是流结构 $(D_{-(h,j)}, S_0, T_0)$ 所有自主联盟的集合。

证明: 令 $(v, D, S_0, T_0) \in \mathcal{G}_N^{\bar{D}}$ 和 $(h, j) \in D$ 。

假设 $E \in \Psi_{\bar{D}_{-(h,j)}}$, 因为 $D_{-(h,j)}(i) \subseteq D(i), i \in N$, 且

$$\Psi_{\bar{D}} = \{E \subseteq N \mid \forall (h_1, \dots, h_t), \text{ s.t. } h_1 \in S_0, h_{k+1} \in D(h_k) (1 \leq k \leq t-1), h_t \in T_0\},$$
 因此 $E \in \Psi_{\bar{D}}$ 。

由上述引理可知, 删除流结构中的弧会导致自主联盟变少。接下来我们用一个引理来说明, 流结构的变化对某些自主联盟不会产生影响。

引理 3.2 对所有 $(v, D, S_0, T_0) \in \mathcal{G}_N^{\bar{D}}$ 和 $(h, j) \in D$, 如果 $E \in \Psi_{\bar{D}}$ 且 $\{h, j\} \not\subseteq E$, 则 $E \in \Psi_{\bar{D}_{-(h,j)}}$ 。

证明: 令 $(v, D, S_0, T_0) \in \mathcal{G}_N^{\bar{D}}$ 和 $(h, j) \in D$ 。令 $E \in \Psi_{\bar{D}}, \{h, j\} \not\subseteq E$ 。如果对任意的 $k \in \{h, j\}$ 均有 $k \notin E$, 则由 $\Psi_{\bar{D}}$ 的定义, $E \in \Psi_{\bar{D}}$ 以及 $D_{-(h,j)}^{-1}(i) = D^{-1}(i), i \in N \setminus \{j\}$ 且 $D_{-(h,j)}(i) = D(i), i \in N \setminus \{h\}$ 可知 $E \in \Psi_{\bar{D}_{-(h,j)}}$ 。

如果 $j \in E$, 由假设 $\{h, j\} \not\subseteq E$ 可知 $h \notin E$ 。

由 $E \in \Psi_{\bar{D}}$, 可知 $(D^{-1}(j) \setminus \{h\}) \cap E \neq \emptyset$ 且 $D_{-(h,j)}^{-1}(j) \cap E \neq \emptyset$ 。又由于 $D_{-(h,j)}^{-1}(i) = D^{-1}(i), i \in N \setminus \{j\}$; $D_{-(h,j)}(i) = D(i), i \in N \setminus \{h\}$ 以及 $\Psi_{\bar{D}}$ 的定义, 可知 $E \in \Psi_{\bar{D}_{-(h,j)}}$ 。

对于 $h \in E$ 但 $j \notin E$ 的情况, 可类似证明。

下面我们将证明流值满足流公平性。

定理 3.3 流值 ψ 满足流公平性。

证明: 令博弈 $w_T = c_T u_T$, 其中 u_T 是联盟 $T \subseteq N$ 的无异议博弈, $c_T \in \mathbb{R}$ 是一常数, 则

$$w_T(E) = \begin{cases} c_T, T \subseteq E \\ 0, \text{ 其他} \end{cases}.$$

令 $(w_T, D, S_0, T_0) \in \mathcal{G}_N^{\bar{D}}$ 且 $(h, j) \in D$. 对任意的 $E \in 2^N \setminus \Psi_{\bar{D}}$, 由定义 3.4 可知, $w_T^{\bar{D}}(\sigma(E)) = w_T^{\bar{D}}(\emptyset) = 0$, 进而可知 $\Delta_{w_T^{\bar{D}}}(E) = 0$. 因此, 我们仅考虑 $E \in \Psi_{\bar{D}}$ 的情况.

对于 $i \in \bigcup_{E \in \mathfrak{A}_{\bar{D}}(\{h, j\})} E$, 有

$$\psi_i(w_T, D, S_0, T_0) = Sh_i(w_T^{\bar{D}}) = \sum_{\substack{E \in \Psi_{\bar{D}} \\ i \in E}} \frac{\Delta_{w_T^{\bar{D}}}(E)}{|E|} = \sum_{\substack{E \in \Psi_{\bar{D}-(h, j)} \\ i \in E}} \frac{\Delta_{w_T^{\bar{D}}}(E)}{|E|} + \sum_{\substack{E \in \Psi_{\bar{D}} \setminus \Psi_{\bar{D}-(h, j)} \\ i \in E}} \frac{\Delta_{w_T^{\bar{D}}}(E)}{|E|}.$$

接下来证实以下事实:

i) 如果 $\{h, j\} \not\subseteq E$, 且 $F \subseteq E$, 则显然 $\{h, j\} \not\subseteq F$. 故 $F \subseteq E$ 在流结构 \bar{D} 中的自主部分与 F 在 $\bar{D}_{-(h, j)}$ 中的自主部分相同.

因此 $w_T^{\bar{D}}(F) = w_T^{\bar{D}-(h, j)}(F), F \subseteq E$.

红利 $\Delta_{w_T^{\bar{D}}}(F) = \Delta_{w_T^{\bar{D}-(h, j)}}(F), F \subseteq E$.

ii) 引理 3.2 等价于若 $E \in \Psi_{\bar{D}} \setminus \Psi_{\bar{D}-(h, j)}$, 则 $\{h, j\} \subseteq E$. 因此

$$\sum_{\substack{E \in \Psi_{\bar{D}} \setminus \Psi_{\bar{D}-(h, j)} \\ h \in E}} \frac{\Delta_{w_T^{\bar{D}}}(E)}{|E|} = \sum_{\substack{E \in \Psi_{\bar{D}} \setminus \Psi_{\bar{D}-(h, j)} \\ j \in E}} \frac{\Delta_{w_T^{\bar{D}}}(E)}{|E|}$$

可以推导出

$$\begin{aligned} \psi_h(w_T, D, S_0, T_0) - \psi_j(w_T, D, S_0, T_0) &= \sum_{\substack{E \in \Psi_{\bar{D}} \\ h \in E}} \frac{\Delta_{w_T^{\bar{D}}}(E)}{|E|} - \sum_{\substack{E \in \Psi_{\bar{D}} \\ j \in E}} \frac{\Delta_{w_T^{\bar{D}}}(E)}{|E|} \\ &= \left(\sum_{\substack{E \in \Psi_{\bar{D}-(h, j)} \\ h \in E}} \frac{\Delta_{w_T^{\bar{D}}}(E)}{|E|} + \sum_{\substack{E \in \Psi_{\bar{D}} \setminus \Psi_{\bar{D}-(h, j)} \\ h \in E}} \frac{\Delta_{w_T^{\bar{D}}}(E)}{|E|} \right) - \left(\sum_{\substack{E \in \Psi_{\bar{D}-(h, j)} \\ j \in E}} \frac{\Delta_{w_T^{\bar{D}}}(E)}{|E|} + \sum_{\substack{E \in \Psi_{\bar{D}} \setminus \Psi_{\bar{D}-(h, j)} \\ j \in E}} \frac{\Delta_{w_T^{\bar{D}}}(E)}{|E|} \right) \\ &= \sum_{\substack{E \in \Psi_{\bar{D}-(h, j)} \\ h \in E}} \frac{\Delta_{w_T^{\bar{D}}}(E)}{|E|} - \sum_{\substack{E \in \Psi_{\bar{D}-(h, j)} \\ j \in E}} \frac{\Delta_{w_T^{\bar{D}}}(E)}{|E|} = \sum_{\substack{E \in \Psi_{\bar{D}-(h, j)} \\ h \in E}} \frac{\Delta_{w_T^{\bar{D}-(h, j)}}(E)}{|E|} - \sum_{\substack{E \in \Psi_{\bar{D}-(h, j)} \\ j \in E}} \frac{\Delta_{w_T^{\bar{D}-(h, j)}}(E)}{|E|} \\ &= \psi_h(w_T, D_{-(h, j)}, S_0, T_0) - \psi_j(w_T, D_{-(h, j)}, S_0, T_0) \end{aligned}$$

故 $\psi_h(w_T, D, S_0, T_0) - \psi_h(w_T, D_{-(h, j)}, S_0, T_0) = \psi_j(w_T, D, S_0, T_0) - \psi_j(w_T, D_{-(h, j)}, S_0, T_0)$.

进而可以推导出以下事实:

iii) 由 $\Psi_{\bar{D}}$ 的定义可知, 对任意的 $k \in \{h, j\}$, 如果 $k \in E \in \Psi_{\bar{D}}$, 则 $\bar{D}^{-1}(k) \subseteq E, \bar{D}(k) \subseteq E$.

iv) 对任意的 $k \in \{h, j\}$, 如果 $k \notin E$, 则 $E \in \Psi_{\bar{D}}$ 当且仅当 $E \in \Psi_{\bar{D}-(h, j)}$.

v) 由事实(i)可知 $\Delta_{w_T^{\bar{D}}}(E) = \Delta_{w_T^{\bar{D}-(h, j)}}(E), k \notin E$ 且 $k \in \{h, j\}$.

因此对 $i \in \bigcup_{E \in \mathfrak{A}_{\bar{D}}(\{h, j\})} E$ 以及 $k \in \{h, j\}$ 有

$$\begin{aligned}
 \psi_i(w_T, D, S_0, T_0) - \psi_k(w_T, D, S_0, T_0) &= \sum_{\substack{E \in \Psi_{\bar{D}} \\ i \in E}} \frac{\Delta_{w_T^{\bar{D}}}(E)}{|E|} - \sum_{\substack{E \in \Psi_{\bar{D}} \\ k \in E}} \frac{\Delta_{w_T^{\bar{D}}}(E)}{|E|} \\
 &= \sum_{\substack{E \in \Psi_{\bar{D}} \\ i \in E, k \notin E}} \frac{\Delta_{w_T^{\bar{D}}}(E)}{|E|} + \sum_{\substack{E \in \Psi_{\bar{D}} \\ i \in E, k \in E}} \frac{\Delta_{w_T^{\bar{D}}}(E)}{|E|} - \sum_{\substack{E \in \Psi_{\bar{D}} \\ k \in E, i \notin E}} \frac{\Delta_{w_T^{\bar{D}}}(E)}{|E|} - \sum_{\substack{E \in \Psi_{\bar{D}} \\ k \in E, i \in E}} \frac{\Delta_{w_T^{\bar{D}}}(E)}{|E|} \\
 &= \sum_{\substack{E \in \Psi_{\bar{D}} \\ i \in E, k \notin E}} \frac{\Delta_{w_T^{\bar{D}}}(E)}{|E|} - \sum_{\substack{E \in \Psi_{\bar{D}} \\ k \in E, i \notin E}} \frac{\Delta_{w_T^{\bar{D}}}(E)}{|E|} \\
 &= \sum_{\substack{E \in \Psi_{\bar{D}_{-(h,j)}} \\ i \in E}} \frac{\Delta_{w_T^{\bar{D}_{-(h,j)}}}(E)}{|E|} - \sum_{\substack{E \in \Psi_{\bar{D}_{-(h,j)}} \\ k \in E}} \frac{\Delta_{w_T^{\bar{D}_{-(h,j)}}}(E)}{|E|} \\
 &= \psi_i(w_T, D_{-(h,j)}, S_0, T_0) - \psi_k(w_T, D_{-(h,j)}, S_0, T_0)
 \end{aligned}$$

因此 $\psi_i(w_T, D, S_0, T_0) - \psi_i(w_T, D_{-(h,j)}, S_0, T_0) = \psi_k(w_T, D, S_0, T_0) - \psi_k(w_T, D_{-(h,j)}, S_0, T_0)$ 。

综上, 对任意的 $i \in \bigcup_{E \in \mathfrak{A}_{\bar{D}}(\{h,j\})} E$, 均有

$$\psi_i(w_T, D, S_0, T_0) - \psi_i(w_T, D_{-(h,j)}, S_0, T_0) = c$$

最后, 基于 Shapley 值的可加性, 可知

$$\psi_i(v, D, S_0, T_0) - \psi_i(v, D_{-(h,j)}, S_0, T_0) = c$$

其中 $i \in \bigcup_{E \in \mathfrak{A}_{\bar{D}}(\{h,j\})} E, c \in \mathbb{R}$, 成立。

借助定理 3.2 和 3.3 我们有如下流值的刻画定理。

定理 3.4 流值是 $\mathcal{G}_N^{\bar{D}}$ 上满足流公平性和有效性的唯一解。

证明: 由定理 3.2 和定理 3.3 可知, 流值满足流公平性和有效性, 下面证明唯一性。

令 $(v, D, S_0, T_0) \in \mathcal{G}_N^{\bar{D}}$ 。假设 f^1 和 f^2 是 $\mathcal{G}_N^{\bar{D}}$ 上的两个公平分配规则。

通过递归 $|\Psi_{\bar{D}}|$ 证明出 $f^1(v, D, S_0, T_0) = f^2(v, D, S_0, T_0)$ 。

如果 $|\Psi_{\bar{D}}| = 0$, 根据 f 的有效性可知 $\sum_{i \in N} f_i(v, D, S_0, T_0) = v(N) = v(\sigma(N)) = v(\emptyset) = 0$, 因此 $f_i^1(v, D, S_0, T_0) = f_i^2(v, D, S_0, T_0) = 0, i \in N$ 。

假设对所有 $|\Psi_{\bar{D}}| \leq k-1, k \geq 1$, 有 $f^1(v, D, S_0, T_0) = f^2(v, D, S_0, T_0)$ 成立。

现在考虑 $|\Psi_{\bar{D}}| = k$ 。由流公平性可知 $\begin{cases} f_i^1(v, D, S_0, T_0) - f_i^1(v, D_{-(h,j)}, S_0, T_0) = c \\ f_i^2(v, D, S_0, T_0) - f_i^2(v, D_{-(h,j)}, S_0, T_0) = d \end{cases}$

其中 $(h, j) \in D$ 且 $i \in \bigcup_{E \in \mathfrak{A}_{\bar{D}}(\{h,j\})} E, c, d \in \mathbb{R}$ 。

由于 $|\Psi_{\bar{D}_{-(h,j)}}| \leq k-1$, 故

$$f^1(v, D_{-(h,j)}, S_0, T_0) = f^2(v, D_{-(h,j)}, S_0, T_0)。$$

因此 $f_i^1(v, D, S_0, T_0) - f_i^2(v, D, S_0, T_0) = c - d$ 。

又因为 $N \in \mathfrak{A}_{\bar{D}}(\{h, j\})$, 因此有

$$\sum_{i \in N} (f_i^1(v, D, S_0, T_0) - f_i^2(v, D, S_0, T_0)) = |N|(c - d)。$$

又因为 f^1 和 f^2 均满足有效性, 因此可知 $\sum_{i \in N} (f_i^1(v, D, S_0, T_0) - f_i^2(v, D, S_0, T_0)) = 0$, 故 $c - d = 0$ 。

所以 $f_i^1(v, D, S_0, T_0) = f_i^2(v, D, S_0, T_0), i \in \bigcup_{E \in \mathfrak{A}_{\tilde{D}}(\{h, j\})} E, (h, j) \in D, h, j \in N$ 。

因此 $f^1(v, D, S_0, T_0) = f^2(v, D, S_0, T_0)$ 。

4. 应用：跨国公益物资运输问题

4.1. 模型建立

随着全球经济与科学技术的快速发展, 贸易全球化已是大势所趋。全球疫情来临时, 跨国公益物资运输是国际之间齐心协力合作抗击疫情的重要环节, 充分彰显了人类命运共同体的现实意义与世界意义。本节以跨国公益物资运输问题为例, 构建基于流结构的合作博弈模型, 并针对跨国公益物资运输成本分摊的现实问题, 介绍流值在公益物资运输中的应用。

首先, 构建跨国公益物资运输合作博弈模型 (N, v, D, S_0, T_0) 。其中 N 为隶属于跨国公益物资运输涉及到的国家 C_i 的城市集合, 城市之间的物资流通网络为 $D = \{(i, j) : i, j \in N, i \neq j\}$, S_0 为隶属于物资供应国的城市集合, T_0 为隶属于物资需求国的城市集合。流通网络 $\tilde{D} = (D, S_0, T_0)$ 上的两个城市 $i, j \in N$ 之间若存在物资流通关系 $a_{ij} = (i, j) \in D$, 则其流通量记为 f_{ij} , 最大流通量(容量)记为 c_{ij} , 单位流量运价为 w_{ij} 。

为确保将捐助的公益物资足量高效地送达物资需求国, 假设当一条流路径无法满足运输需求时, 则可以选择若干条由源点至汇点的流路径共同运输货物。

根据突发公共卫生事件的特征, 在运输效率层面上, 考虑流量最大化; 在经济调度层面上, 考虑运输费用最小化。基于以上两个因素, 以文献[19]构建的最小费用流模型作为路径选择、路径流量分配以及运输费用产生的重要依据, 该模型构建如下:

$$\begin{aligned} \max R_E &= r(f) \\ \min f_E &= \sum_{a_{ij} \in D(E)} w_{ij} f_{ij} \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} f_{ij} \leq c_{ij} \\ \sum_{j \in D(E)^{-1}(i)} f_{ij} - \sum_{h \in D(E)(i)} f_{hi} = \begin{cases} r(f), i \in E \cap S_0 \\ 0, i \notin E \cap S_0, E \cap T_0 \\ r(f), i \in E \cap T_0 \end{cases} \\ f_{ij} \geq 0, r(f) \geq 0, s \in E \cap S_0 \end{cases} \end{aligned}$$

其中, f 是网络 $D(E) = \{(i, j) \in \tilde{D} : i, j \in E\}$ 的流; $r(f)$ 是流 f 的流量; R_E 为联盟 E 在网络 $D(E) = \{(i, j) \in \tilde{D} : i, j \in E\}$ 的最大流; f_E 为联盟 E 在跨国物资运输网络 (D, S_0, T_0) 中的最小费用流。第一条约束为容量约束, 表示物资运输量不超过其通过道路的容量限制; 第二条约束为流量平衡约束, 表示物资的运输在由 S_0 至 T_0 的流路径上运行, 且由源点发出的流量与抵达汇点的流量相等; 第三条约束为流量和费用的非负约束, 表示公益物资的运输是有效运输。

因此, 任意联盟 $E \subseteq N$ 需联合支付的费用为: $v(E) = f_E \bar{u}_E$, 其中, $\bar{u}_E = \begin{cases} 1 & E \cap S_0, E \cap T_0 \neq \emptyset \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$ 为可

行联盟特征函数, 只有同时包含隶属于物资供应国的城市和物资需求国的城市的联盟才具有非零的效用。作为具有公益性的公益物资, 其运输费用由所有参与国共同分摊。

下面是跨国公益物资运输以流值作为成本分摊规则的一个具体案例。

4.2. 算例分析

$N = \{1, 2, 3, 4\}$ 为隶属于国家 C_i 的国际城市集合, 其中 $i \in N$ 。国家 C_1 和 C_2 、 C_1 和 C_3 、 C_2 和 C_3 、 C_2 和 C_4 以及 C_3 和 C_4 之间有公共国界, 国家 C_1 和 C_4 之间无公共国界。流结构为 $D = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$, 其图形如图 3 所示。某国际卫生事件突发, 此时城市 1 物资货源充足, 城市 4 物资处于紧缺状态, 急需城市 1 采用铁路运输的方式援助一批重要的公益物资运输至城市 4 以应对突发卫生事件, 其运输的流路径需要途径城市 2 和 3 中的至少一个城市。以城市 1 作为流的源点, 以城市 4 作为流的汇点, 即 $S_0 = \{1\}, T_0 = \{4\}$, 自主联盟集为 $\Psi_{\bar{D}} = \{\{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$ 。

假设各路段价格统一且 $w_{ij} = 1, (i, j) \in D$ 。单位流通量 $c_{12} = 3, c_{13} = 1, c_{23} = 1, c_{24} = 2, c_{34} = 2$ 。合作博弈特征函数为: 若 $E \cap S_0 \neq \emptyset$ 且 $E \cap T_0 \neq \emptyset$, 则 $v(E) = \min f_E$; 否则, $v(E) = 0$ 。

由 4.1 节的最小费用流模型可知当 $E = \{1, 2, 4\}$ 时, $\max R_E = 2, \min f_E = 4$; 当 $E = \{1, 3, 4\}$ 时, $\max R_E = 1, \min f_E = 2$; 当 $E = \{1, 2, 3, 4\}$ 时, $\max R_E = 4, \min f_E = 9$ 。则联盟 $E \subseteq N$ 运输公益物资的费用为

$$v^{\bar{D}}(E) = v(\sigma(E)) = \begin{cases} \min f_E, & E \subseteq \Psi_{\bar{D}} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

即 $v^{\bar{D}}(\{1, 2, 4\}) = 4, v^{\bar{D}}(\{1, 3, 4\}) = 2, v^{\bar{D}}(N) = 9$, 以及其他情况 $v^{\bar{D}}(E) = 0$ 。

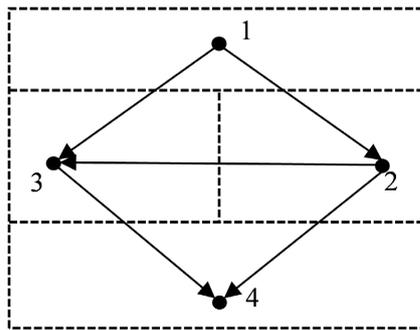


Figure 3. Transportation network diagram of transnational public welfare goods
图 3. 跨国公益物资运输网络图

本例中各城市成本分摊结果如表 1 和图 4 所示:

Table 1. Cost allocation: flow value
表 1. 成本分摊: 流值

$E \in \Psi_{\bar{D}}$	$\{1, 2, 4\}$	$\{1, 3, 4\}$	$\{1, 2, 3, 4\}$
$v^{\bar{D}}(E)$	4	2	9
$\Delta_{v^{\bar{D}}}(E)$	4	2	3
$\psi(v, D, S_0, T_0)$		$(\frac{11}{4}, \frac{25}{12}, \frac{17}{12}, \frac{11}{4})$	
$\mathcal{E}(v, D, S_0, T_0)$		$(\frac{9}{4}, \frac{9}{4}, \frac{9}{4}, \frac{9}{4})$	
$\mathcal{P}(v, D, S_0, T_0)$		$(\frac{9}{5}, \frac{27}{10}, \frac{27}{10}, \frac{9}{5})$	

其中以节点的度作为按比例分配规则的权重 $w = (2, 3, 3, 2)$ 。

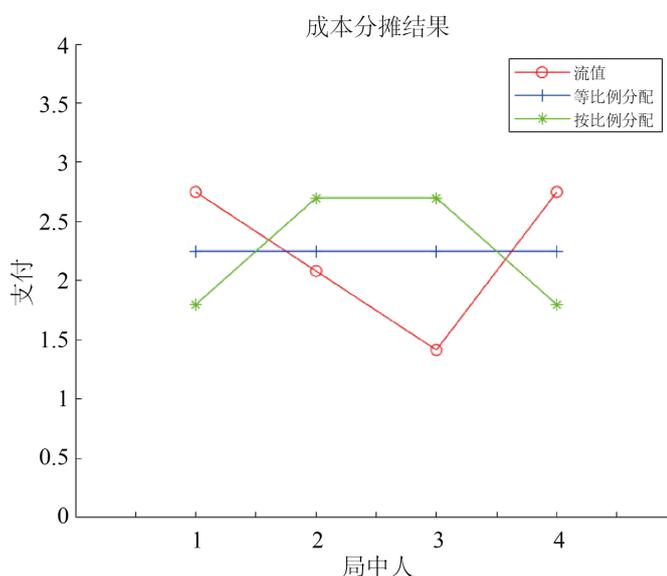


Figure 4. Cost allocation results

图 4. 成本分摊结果

可以看出, 在三种分配规则中, 流值将最多的成本分摊给局中人 1 和局中人 4, 等比例分配使所有局中人分摊的成本平等, 按比例分配将最多的成本分摊给局中人 2 和局中人 3, 局中人 1 和局中人 4 分摊同等的最小的成本。流值考虑到了流结构对成本分摊的影响。由于只有 1 和 4 同时加入联盟, 自主联盟才能形成, 所以 1 和 4 的流值大于 3 和 4 的流值, 这体现了 1 作为源点以及 4 作为汇点在流结构中不可或缺的重要地位。且物资供应国与物资需求国对公益的积极程度较高, 所以位于物资供应国与物资需求国的城市分摊的额度大于只是作为转运节点的城市。在联盟 $\{1, 2, 3, 4\}$ 中 2 对 3 具有转运作用, 且 2 在 $\{1, 2, 4\}$ 中的运输能力大于 3 在 $\{1, 3, 4\}$ 中的运输能力, 因此 2 的流值大于 3 的流值, 这体现了分配规则的公平。此外, 若将 w_{ij} 改为 2, 此时 $\psi(v, D, S_0, T_0) = \left(\frac{11}{2}, \frac{25}{6}, \frac{17}{6}, \frac{11}{2}\right)$, 流值分配比例不变。因此流值具有合理性。

5. 结语

本文通过对具有流结构合作博弈的研究, 利用 Shapley 值定义了流博弈的一个解——流值。随后, 本文对流值进行了公理刻画, 证明流值是满足有效性与流公平性的唯一解。最后, 将此模型用于跨国公益物资的运输问题中, 得到较为合理的成本分摊方案。

本文的研究表明, 流值在有效性、流公平性、稳定性方面有很好的性质。本文所提出的具有流结构合作博弈模型适用于运输、通讯、工程规划等诸多实际应用场景, 流值在其中的成本分摊与利润分配环节能够发挥作用。随着网络流与合作博弈理论和应用的不断发展, 本文所提出的理论概念将在未来得到更广泛的应用。

致 谢

对评审专家的仔细阅读和评审意见表示衷心感谢。

参考文献

- [1] Myerson, R.B. (1977) Graphs and Cooperation in Games. *Mathematics of Operations Research*, **2**, 225-229. <https://doi.org/10.1287/moor.2.3.225>
- [2] Shapley, L.S. (1953) A Value for n -Person Games. In: Tucker, A.W. and Kuhn, H.W., Eds., *Contributions to the Theory of Games*, Vol. 2, Princeton University Press, Princeton, 307-317. <https://doi.org/10.1515/9781400881970-018>
- [3] van den Brink, R., He, S. and Huang, J.P. (2018) Polluted River Problems and Games with a Permission Structure. *Games and Economic Behavior*, **108**, 182-205. <https://doi.org/10.1016/j.geb.2017.10.005>
- [4] 单而芳, 梁莉敏, 张广. 基于限制博弈的具有容量限制的易腐品联合运输费用分摊问题[J]. *中国管理科学*, 2018, 26(9): 97-105.
- [5] 王大澳, 菅利荣, 王慧, 刘思峰. 基于限制合作博弈的产业集群企业利益分配研究[J]. *中国管理科学*, 2019, 27(4): 171-178.
- [6] Suh, J. and Yoon, S.G. (2020) Profit-Sharing Rule for Networked Microgrids Based on Myerson Value in Cooperative Game. *IEEE Access*, **9**, 5585-5597. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.3048329>
- [7] Qin, Q., Liu, Y. and Huang, J.-P. (2020) A Cooperative Game Analysis for the Allocation of Carbon Emissions Reduction Responsibility in China's Power Industry. *Energy Economics*, **92**, Article ID: 104960. <https://doi.org/10.1016/j.eneco.2020.104960>
- [8] Dai, Z., Liu, X.C., Chen, Z., Guo, R. and Ma, X. (2019) A Predictive Headway-Based Bus-Holding Strategy with Dynamic Control Point Selection: A Cooperative Game Theory Approach. *Transportation Research Part B: Methodological*, **125**, 29-51. <https://doi.org/10.1016/j.trb.2019.05.001>
- [9] Khmelnitskaya, A.B. (2010) Values for Rooted-Tree and Sink-Tree Digraph Games and Sharing a River. *Theory and Decision*, **69**, 657-669. <https://doi.org/10.1007/s11238-009-9141-7>
- [10] Khmelnitskaya, A.B., Selçuk, Ö. and Talman, D. (2016) The Shapley Value for Directed Graph Games. *Operations Research Letters*, **44**, 143-147. <https://doi.org/10.1016/j.orl.2015.12.009>
- [11] Myerson, R.B. (1980) Conference Structures and Fair Allocation Rules. *International Journal of Game Theory*, **9**, 169-182. <https://doi.org/10.1007/BF01781371>
- [12] Nouweland, A., Borm, P. and Tijs, S. (1992) Allocationrules for Hypergraph Communication Situations. *International Journal of Game Theory*, **20**, 255-268. <https://doi.org/10.1007/BF01253780>
- [13] van den Brink, R. and Gilles, R.P. (1996) Axiomatizations of the Conjunctive Permission Value for Games with Permission Structures. *Games and Economic Behavior*, **12**, 113-126. <https://doi.org/10.1006/game.1996.0008>
- [14] van den Brink, R., Herings, P.J.-J., van der Laan, G. and Talman, A.J.J. (2015) The Average Tree Permission Value for Games with a Permission Tree. *Economic Theory*, **58**, 99-123. <https://doi.org/10.1007/s00199-013-0796-5>
- [15] Li, L. and Li, X. (2011) The Covering Values for Acyclic Digraph Games. *International Journal of Game Theory*, **40**, 697-718. <https://doi.org/10.1007/s00182-010-0264-4>
- [16] van den Brink, R. and Gilles, R.P. (2009) The Outflow Ranking Method for Weighted Directed Graphs. *European Journal of Operational Research*, **193**, 484-491. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2007.11.051>
- [17] Kalai, E. and Zemel, E. (1982) Generalized Network Problems Yielding Totally Balanced Games. *Operations Research*, **30**, 998-1008. <https://doi.org/10.1287/opre.30.5.998>
- [18] Branzei, R., Dimitrov, D. and Tijs, S. 合作博弈理论模型[M]. 刘小冬, 刘九强, 译. 北京: 科学出版社, 2011.
- [19] 胡运权. 运筹学教程[M]. 第5版. 北京: 清华大学出版社, 2018.