Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(12), 2209-2216
Published Online December 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.1212238

Hans汉斯

分数次极大交换子在分层Lie群中的有界性

田晓娇

牡丹江师范学院数学系，黑龙江 牡丹江

收稿日期：2022年11月26日；录用日期：2022年12月22日；发布日期：2022年12月30日

摘　要

本文借助于广义Morrey空间的相关的理论与工具，在分层Lie群 $\mathbb{G}$ 中考虑了由Lipschitz函数和分数次极大算子 M_α 生成的交换子 $M_{\alpha,b}$、$[b,M_\alpha]$ 在广义Morrey空间中的有界性。

关键词

分数次极大算子，交换子，广义Morrey空间，Lipschitz空间，分层Lie群

Boundedness of Fractional Maximal Commutator in Stratified Lie Groups

Xiaojiao Tian

Department of Mathematics, Mudanjiang Normal University, Mudanjiang Heilongjiang

Received: Nov. 26th, 2022; accepted: Dec. 22nd, 2022; published: Dec. 30th, 2022

Abstract

In this paper, the main aim is to consider the boundedness of commutator $M_{\alpha,b}$ and $[b,M_\alpha]$ generated by Lipschitz function b and the fractional maximal operator M_α on stratified Lie group $\mathbb{G}$ with the help of relevant theories and tools of Generalized Morrey space.

Keywords

Fractional Maximal Operator, Commutator, Generalized Morrey Space, Lipschitz Space, Stratified Lie Group

文章引用: 田晓娇. 分数次极大交换子在分层 Lie 群中的有界性[J]. 理论数学, 2022, 12(12): 2209-2216.
DOI: 10.12677/pm.2022.1212238

1. 引言

众所周知，算子在函数空间上的有界性一直以来都是分析理论中备受关注的问题之一，由算子和合适的函数生成的交换子的有界性也成为重要的研究对象，见[1] [2] [3] [4]。1938 年，美国数学家 Morrey 为了研究二阶椭圆偏微分方程的局部正则性，在文献[5]中首次引入了经典的 Morrey 空间，是 Lebesgue 空间的一种自然的推广。1991 年，Mizuharaz 在文献[6]中引进了广义 Morrey 空间。

设T是经典的奇异积分算子，b 是一合适的函数，由 T,b 生成的交换子$[b,T]$的定义为

$$[b,T](f)(x)=b(x)T(f)(x)-T(bf)(x). \tag{1.1}$$

1976 年，Coifman，Rochberg 和 Weiss [7]证明了当$b\in BMO(\mathbb{R}^n)$时，$[b,T]$在$L^p(\mathbb{R}^n)$上有界，其中$1<p<\infty$中，并给出了 BMO 空间的一种等价刻画。1978 年，Janson [8]通过交换子$[b,T]$对 Lipschitz 空间$\dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)$进行了一些刻画，并证明了当$b\in\dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)(0<\beta<1)$时，$[b,T]$从$L^p(\mathbb{R}^n)$到$L^q(\mathbb{R}^n)$有界，其中$1<p<\frac{n}{\beta}$，$\frac{1}{p}-\frac{1}{q}=\frac{\beta}{n}$ (同见[9])。

设 $f\in L^1_{\mathrm{loc}}$， $0\le\alpha<n$，定义分数次极大算子 M_α

$$M_\alpha(f)(x)=\sup_{B\ni x}\frac{1}{|B|^{1-\frac{\alpha}{Q}}}\int_B|f(y)|\mathrm{d}y,$$

由局部可积函数b和分数次极大算子 M_α 生成的交换子 $M_{\alpha,b}$ 定义为

$$M_{\alpha,b}(f)(x)=\sup_{B\ni x}\frac{1}{|B|^{1-\frac{\alpha}{Q}}}\int_B|b(x)-b(y)||f(y)|\mathrm{d}y,$$

其中上确界取遍 $\mathbb{G}$ 里所有包含 x 的球体 B。从另一方面来说，类似(1.1)，由分数次极大算子 M_α 和局部可积函数 b 生成的交换子被定义为

$$[b,M_\alpha](f)(x)=b(x)M_\alpha(f)(x)+M_\alpha(bf)(x).$$

许多学者已对交换子 $M_{\alpha,b}$ 和$[b,M_\alpha]$进行深入的研究，例如见[10] [11] [12]等。2013 年 Guliyev [13]等人在分层 Lie 群中讨论了当$b\in BMO(\mathbb{G})$时，交换子 $M_{\alpha,b}$ 在广义 Morrey 空间中的有界性。2017 年张[10]通过 Hardy-Littlewood 极大交换子 M_b 在 Lebesgue 空间和 Morrey 空间中的有界性刻画了 Lipschitz 函数空间；同时借助极大算子的交换子$[b,M]$在 Lebesgue 空间和 Morrey 空间中的有界性，刻画了当$b\ge0$时的 Lipschitz 空间。

2017 年张在文献[10]中证明了当$b\in\dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)(0<\beta<1)$时，交换子$[b,M]$与$M_b$从$L^p(\mathbb{R}^n)$到$L^q(\mathbb{R}^n)$有界，其中$1<p<\frac{n}{\beta}$，$\frac{1}{p}-\frac{1}{q}=\frac{\beta}{n}$。因此受到启发，本文主要研究了在分层 Lie 群中的交换子 $M_{\alpha,b}$ 和$[b,M_\alpha]$在广义 Morrey 空间中的一些类似的结果，证明了当$b\in\dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{G})$时，交换子 $M_{\alpha,b}$ 和$[b,M_\alpha]$的有界性。

本文各章节的安排如下：第一部分主要介绍了研究的背景，研究的内容；第二部分介绍了在分层 Lie 群中的一些基本的符号和概念，然后介绍了建立在分层 Lie 群中的一些函数空间的概念；第三部分主要给出了当$b\in\dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{G})(0<\beta<1)$时，交换子$[b,M_\alpha]$与 $M_{\alpha,b}$ 在广义 Morrey 空间中有界性的相关证明。

DOI: 10.12677/pm.2022.1212238

在本文中，对任意的 $x\in\mathbb{G}$，和所有的 $r>0$，令 $B(x,r)$ 是以 x 中心，以 r 为半径的球，记 $B=B(x,r)$，$\lambda B=B(x,\lambda r)$。字母 C 表示一个与主要参数无关的正常数，但在不同的位置可以不同。用 $A\lesssim B$ 表示 $A\le CB$。若 $A\lesssim B$ 且 $B\lesssim A$，则记为 $A\approx B$，表示 A 与 B 等价。

2. 预备知识与引理

下面主要介绍有关分层 Lie 群的记号和概念，更详细的信息参见[14] [15]。

设 $\mathbb{G}$ 是一个有限维，连通且单连通的 Lie 群，$\mathcal{G}$ 是它的李代数。如果对任意的 $X,Y\in\mathcal{G}$，若满足李括号积 $[X,Y]=XY-YX\in\mathcal{G}$ 的定义，则被称为一阶换位运算。若 $\mathcal{G}$ 是有限维分层零幂 Lie 代数，则存在向量空间分解的直和

$$\mathcal{G}=V_1\oplus\cdots\oplus V_m, \tag{2.1}$$

其中 $V_j\,(2\le j\le m)$ 中的每个元素都是 V_1 元素的 $(j-1)$ 阶 Lie 积。同样的(2.1)式是一个分层，当 $i+j\le m$ 时，$[V_i,V_j]=V_{i+j}$；否则，$[V_i,V_j]=0$。另外，设 $X=\{X_1,\cdots,X_n\}$ 是 V_1 的基，V_j 中的 X_{ij} 是由长度为 j 的换位运算组成的，$1\le i\le k_j$。令 $X_{i1}=X_i, i=1,\cdots,n$ 且 $k_1=n$，则称 X_{i1} 是长度为 1 的 Lie 积。如果 $X_1,\cdots,X_n$ 是 V_1 的，那么假设 $\|X_j\|=1, j=1,\cdots,n$。

若 $\mathbb{G}$ 是与 $\mathcal{G}$ 相关的单连通 Lie 群，则指数映射是一个从 $\mathcal{G}$ 到 $\mathbb{G}$ 的整体微分同胚。因此对于每个 $g\in\mathbb{G}$，有 $x=(x_{ij})\in\mathbb{R}^N$，$1\le i\le k_j, 1\le j\le m, N=\sum_{j=1}^{m}k_j$，使得 $g=\exp\left(\sum x_{ij}X_{ij}\right)$。在 $\mathbb{G}$ 上的齐次范数函数 $|\cdot|$ 是由 $|g|=\left(\sum|x_{ij}|^{2\cdot m!/j}\right)^{1/(2\cdot m!)}$ 定义的，且 $Q=\sum_{j=1}^{m}jk_j$ 是 $\mathbb{G}$ 上的齐次维数，因此 $\mathrm{d}(\delta_r x)=r^Q\mathrm{d}x,\ r>0$。$\delta_r$ 在 $\mathbb{G}$ 上的扩张被定义为

$$\delta_r(g)=\exp\left(\sum r^j x_{ij}X_{ij}\right),\ g=\exp\left(\sum x_{ij}X_{ij}\right).$$

由于 $\mathbb{G}$ 是零幂的，指数映射是从 $\mathbb{G}$ 到 $\mathbb{G}$ 的微分同构，它将 $\mathbb{G}$ 上的 Lebesgue 测度取为 $\mathbb{G}$ 上的双不变 Haar 测度 dx。将群 $\mathbb{G}$ 的恒等式称为原点，用e表示。

群 $\mathbb{G}$ 上的齐次范数是一个从 $\mathbb{G}$ 到 $[0,\infty)$ 的连续函数 $x\to\rho(x)$，它在 $\mathbb{G}\backslash\{0\}$ 上是 C^∞ 的，满足

$$\begin{cases}\rho(x^{-1})=\rho(x)\\ \rho(\delta_t x)=t\rho(x) \quad \forall x\in\mathbb{G},t>0\\ \rho(e)=0\end{cases}$$

在[16]中表明，$\mathbb{G}$ 上至少存在一个齐次范数，$\mathbb{G}$ 上的任意两个齐次范数是等价的。由此确定了 $\mathbb{G}$ 上存在一个齐次范数，它满足三角不等式：即存在一个常数 $C_0\ge1$，对任意的 $\forall x,y\in\mathbb{G}$，使得 $\rho(xy)\le C_0(\rho(x)+\rho(y))$ (见[17])。

用 $B(x,r)=\{y\in\mathbb{G}:\rho(y^{-1}x)<r\}$ 表示以 x 为中心，r 为半径的开球，用 $B(x,r)=\{y\in\mathbb{G}:\rho(y^{-1}x)<r\}$ 表示以 $\mathbb{G}$ 的恒等元素 e 为中心，r 为半径的开球，用 ${}^{\complement}B(x,r)=\mathbb{G}\backslash B(x,r)$ 表示球 $B(x,r)$ 的补。易知存在 $C_1=C_1(\mathbb{G})$，使得

$$|B(x,r)|=C_1r^Q,\ |B(x,r)|=C_1r^Q\ x\in\mathbb{G},r>0,$$

因此 $\mathbb{G}$ 体积加倍条件，即存在一个常数 C，对任意的 $x\in\mathbb{G}$ 和 $r>0$，有

$$|B(x,2r)|\le C|B(x,r)|.$$

分层 Lie 群中最基本的偏微分算子是与 X 相关的拉普拉斯算子 $\mathcal{L}=\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 给出的 $\mathbb{G}$ 上的二阶偏微分算子。

下面介绍 $\mathbb{G}$ 上的 Lipschitz 空间的定义和性质。

定义 2.1 [18]设 $0<\beta<1$，对任意的 $x,y\in\mathbb{G}$，若存在一个常数 $C>0$，满足不等式

$$\left|b(x)-b(y)\right|\le C\rho(x,y)^{\beta},$$

则称 b 属于 $\dot{\Lambda}_{\beta}(\mathbb{G})$ 空间，用 $b\in\dot{\Lambda}_{\beta}(\mathbb{G})$ 表示。满足上述条件的最小的常数 C 称为 b 的 $\dot{\Lambda}_{\beta}$ 范数，用 $\|b\|_{\dot{\Lambda}_{\beta}}$ 表示。

本文主要是在广义 Morrey 空间上考虑问题，下面介绍一下相关的概念和性质。在本文中提到的函数 $\varphi(x,r)$，$\varphi_1(x,r)$ 和 $\varphi_2(x,r)$ 都是定义在 $\mathbb{G}\times(0,\infty)$ 上的非负测度函数。

定义 2.2 [13]设 $1\le p<\infty$，对与任意的局部可积函数 $f\in L_{\mathrm{loc}}^{p}(\mathbb{G})$，广义 Morrey 空间的定义为

$$\mathcal{M}^{p,\varphi}(\mathbb{G})=\left\{f\in L_{\mathrm{loc}}^{p}(\mathbb{G}):=\|f\|_{\mathcal{M}^{p,\varphi}}=\sup_{x\in\mathbb{G},r>0}\varphi(x,r)^{-1}\left|B(x,r)\right|^{-\frac{1}{p}}\|f\|_{L^{p}(B(x,r))}<\infty\right\}.$$

再回顾一下经典 Morrey 空间的定义

设 $1\le p\le\infty$，$0\le\lambda\le Q$，对于所有的局部可积函数 $f\in L_{\mathrm{loc}}^{p}(\mathbb{G})$，Morrey 空间 $L^{p,\lambda}(\mathbb{G})$ 的定义为

$$L^{p,\lambda}(\mathbb{G})=\left\{f\in L_{\mathrm{loc}}^{p}(\mathbb{G}):\|f\|_{L^{p,\lambda}}<\infty\right\},$$

其中

$$\|f\|_{L^{p,\lambda}}:=\sup_{x\in\mathbb{G},r>0}\left(\frac{1}{|B|^{\frac{\lambda}{Q}}}\int_{B}\left|f(x)\right|^{p}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$

当 $1\le p\le\infty$，有 $L^{p,0}(\mathbb{G})=L^{p}(\mathbb{G})$，$L^{p,Q}(\mathbb{G})=L^{\infty}(\mathbb{G})$ 成立。

通过上述的定义，当 $\varphi(x,r)=r^{\frac{\lambda-Q}{p}}$ 时，可以得到这样的一个关系

$$L^{p,\lambda}=\mathcal{M}^{p,\varphi}(\mathbb{G})\Big|_{\varphi(x,r)=r^{\frac{\lambda-Q}{p}}}$$

在[19]中，对于极大算子 M 和奇异积分算子 T，得到了从 $\mathcal{M}_{p,\varphi}(\mathbb{G})$ 到 $\mathcal{M}_{q,\varphi}(\mathbb{G})$ 的有界性的充分条件。对 $\varphi(x,r)$ 施加了以下条件

$$c^{-1}\varphi(x,r)\le\varphi(x,\tau)\le c\varphi(x,r),$$

当 $r\le\tau\le 2r$ 时，其中 $C(\ge 1)$ 不依赖于 t,r 和 $x\in\mathbb{G}$，结合极大或奇异算子及其条件，得到关于 $\varphi(x,r)$ 的性质为

$$\int_{r}^{\infty}\varphi(x,\tau)^{p}\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau}\le C\varphi(x,\tau)^{p},$$

关于势算子和分数阶极大算子的性质可以得到

$$\int_{r}^{\infty}\tau^{\alpha p}\varphi(x,\tau)^{p}\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau}\le Cr^{\alpha p}\varphi(x,\tau)^{p}.$$

其中的 $C(>0)$ 不依赖于 r 和 $x\in\mathbb{G}$。

引理 2.1 [18]令 b 是一个局部可积函数，$0<\beta<1$，$0<\alpha<Q$，$0<\alpha+\beta<Q$。则以下的叙述是等价的

(1) $b\in\dot{\Lambda}_{\beta}(\mathbb{G})$，

(2) 对于任意的 p,q，$1<p<\dfrac{Q}{\alpha+\beta}$，$\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{p}-\dfrac{\alpha+\beta}{Q}$。$M_{\alpha,b}$ 是从 $L^{p}(\mathbb{G})$ 到 $L^{q}(\mathbb{G})$ 有界的。

引理 2.2 [18]令 $0\le\alpha<Q$，$f:\mathbb{G}\to\mathbb{R}$ 是一个非负局部可积函数。如果 b 是一个局部可积函数且 $b\in\mathbb{G}$，

则有

$$\left|[b,M_\alpha](f)(x)\right|\le M_{\alpha,b}(f)(x).$$

3. 主要的定理及证明

下面叙述本文的主要定理。

定理 3.1 令 $0\le\alpha<Q$，$0<\beta<1$，$1<p<\dfrac{Q}{\alpha+\beta}$，$\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{p}-\dfrac{\alpha+\beta}{Q}$ 且 $b\in\dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{G})$。函数 (φ_1,φ_2) 满足条件

$$\sup_{r>0} r^{-\frac{Q}{q}}\operatorname*{ess\,inf}_{t>r}\varphi_1(x,t)t^{\frac{Q}{p}}\le C\varphi_2(x,r) \tag{3.1}$$

则交换子 $M_{\alpha,b}$ 是从 $\mathcal{M}^{p,\varphi_1}(\mathbb{G})$ 到 $\mathcal{M}^{q,\varphi_2}(\mathbb{G})$ 有界。

证明 由引理 2.1 可得

$$\|M_{\alpha,b}\|_{L^q(B(x,r))}\le C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\beta}\|f\|_{L^p(B(x,r))}. \tag{3.2}$$

则由条件(3.1)和(3.2)可得

$$\begin{aligned}\|M_{\alpha,b}\|_{\mathcal{M}^{q,\varphi_2}(\mathbb{G})} &= \sup_{x\in\mathbb{G},r>0}\varphi_2(x,r)^{-1}|B(x,r)|^{-\frac{1}{q}}\|M_{\alpha,b}\|_{L^q(B(x,r))}\\ &\le C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\beta}\sup_{x\in\mathbb{G},r>0}\varphi_2(x,r)^{-1}|B(x,r)|^{-\frac{1}{q}}\|f\|_{L^p(B(x,r))}\\ &\le C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\beta}\sup_{x\in\mathbb{G},r>0}\varphi_1(x,r)^{-1}|B(x,r)|^{-\frac{1}{p}}\|f\|_{L^p(B(x,r))}\\ &= C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\beta}\|f\|_{\mathcal{M}^{p,\varphi_1}(\mathbb{G})},\end{aligned}$$

至此，定理得证。

当 $\alpha=0$ 时，可以得到以下推论：

推论 令 $0<\beta<1$，$1<p<\dfrac{Q}{\beta}$，$\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{p}-\dfrac{\beta}{Q}$ 且 $\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{p}-\dfrac{\beta}{Q}$。函数 (φ_1,φ_2) 满足条件

$$\sup_{r>0} r^{-\frac{Q}{q}}\operatorname*{ess\,inf}_{t>r}\varphi_1(x,t)t^{\frac{Q}{p}}\le C\varphi_2(x,r) \tag{3.3}$$

则交换子 M_b 是从 $\mathcal{M}^{p,\varphi_1}(\mathbb{G})$ 到 $\mathcal{M}^{q,\varphi_2}(\mathbb{G})$ 有界。

定理 3.2 令 $0\le\alpha<Q$，$0<\beta<1$，$1<p<\dfrac{Q}{\alpha+\beta}$，且 $b\in\dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{G})$。函数 (φ_1,φ_2) 满足条件

$$\sup_{r>0} r^{-\frac{Q}{q}}\operatorname*{ess\,inf}_{t>r}\varphi_1(x,t)t^{\frac{Q}{p}}\le C\varphi_2(x,r)$$

则交换子 $[b,M_\alpha]$ 是从 $\mathcal{M}^{p,\varphi_1}(\mathbb{G})$ 到 $\mathcal{M}^{q,\varphi_2}(\mathbb{G})$ 有界。

证明 由引理 2.2 得

$$\left|[b,M_\alpha](f)(x)\right|\le M_{\alpha,b}(f)(x),$$

通过交换子 $M_{\alpha,b}$ 的有界性，可以得出交换子 $[b,M_\alpha]$ 是从 $\mathcal{M}^{p,\varphi_1}(\mathbb{G})$ 到 $\mathcal{M}^{q,\varphi_2}(\mathbb{G})$ 有界。

至此，定理得证。

定理 3.3 令 $0<\alpha<Q$，$0<\beta<1$，$1<p<\dfrac{Q}{\alpha+\beta}$，$\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{p}-\dfrac{\alpha+\beta}{Q}$ 且 $b\in\dot{\Lambda}_{\beta}(\mathbb{G})$。函数 $\varphi(x,r)$ 满足条件

$$\sup_{r>0} r^{-\frac{Q}{q}} \operatorname*{ess\,inf}_{t>r} \varphi(x,t) t^{\frac{Q}{p}} \le C\varphi(x,r) \tag{3.4}$$

且

$$\sup_{r>0} r^{\alpha+\beta}\varphi(x,t)^{\frac{1}{p}} \le Cr^{-\frac{\alpha p}{q-p}} \tag{3.5}$$

则交换子 $M_{\alpha,b}$ 是从 $\mathcal{M}^{p,\varphi^{\frac{1}{p}}}(\mathbb{G})$ 到 $\mathcal{M}^{q,\varphi^{\frac{1}{q}}}(\mathbb{G})$ 有界。

证明 令 $1\le p<\infty$，$f\in L_{\mathrm{loc}}^{p}$，把 f 分为两部分 $f=f_1+f_2$，其中 $f_1=f\chi_{2B}(y)$，$f_2=f\chi_{C_{(2B)}}(y)$，球用 $B=B(x,r)$ 表示。则

$$M_{\alpha,b}f(y)\le M_{\alpha,b}f_1(y)+M_{\alpha,b}f_2(y).$$

对于 $M_{\alpha,b}f_1(y)$，根据 Hedberg 的技巧([15])，对所有的 $y\in\mathbb{G}$，可以得到 $M_{\alpha,b}f_1(y)\le C_1 r^{\alpha}M_b f(x)$。

对于 $M_{\alpha,b}f_2(y)$，讨论如下：令 y 是球 B 内的任意一点。如果 $B(y,t)\cap^{C} B(x,2r)\ne\phi$，则 $t>r$。如果 $Z\in B(y,t)\cap^{C}(B(x,2r))$，可以得到

$$t>\left|y^{-1}z\right|\ge\left|x^{-1}z\right|+\left|x^{-1}y\right|>2r-r=r.$$

另一方面，$B(y,t)\cap^{C}(B(x,2r))\subset B(x,2t)$。如果 $z\in B(y,t)\cap^{C}(B(x,2r))$，可以得到 $\left|x^{-1}z\right|\le\left|y^{-1}z\right|+\left|x^{-1}y\right|<t+r<2t$。

$$\begin{aligned}
M_{\alpha,b}f_2(y)&=\sup_{t>0}\left|B(y,t)\right|^{-1+\frac{\alpha}{Q}}\int_{B(y,t)}\left|b(y)-b(z)\right|\left|f_2(z)\right|\mathrm{d}z\\
&\le C\sup_{t>r}\left|B(x,2t)\right|^{-1+\frac{\alpha}{Q}}\int_{B(x,2t)}\left|b(y)-b(z)\right|\left|f(z)\right|\mathrm{d}z\\
&\le C\sup_{t>2r}\left|B(x,t)\right|^{-1+\frac{\alpha}{Q}}\int_{B(x,t)}\left|b(y)-b(z)\right|\left|f(z)\right|\mathrm{d}z\\
&\le C\sup_{t>r}t^{\alpha-Q}\left\|b\right\|_{\dot{\Lambda}_{\beta}}\int_{B(x,t)}\left|y-z\right|^{\beta}\left|f(z)\right|\mathrm{d}z\\
&\le C\left\|b\right\|_{\dot{\Lambda}_{\beta}}\sup_{t>r}t^{\alpha+\beta-Q}\int_{B(x,t)}\left|f(z)\right|\mathrm{d}z\\
&\le C\left\|b\right\|_{\dot{\Lambda}_{\beta}}\sup_{t>r}t^{\alpha+\beta-\frac{Q}{p}}\left\|f\right\|_{L^{p}(B(x,t))},
\end{aligned}$$

由(3.4)和(3.5)，可以得到

$$\begin{aligned}
M_{\alpha,b}f(y)&\lesssim r^{\alpha}M_b f(z)+\left\|b\right\|_{\dot{\Lambda}_{\beta}}\sup_{t>r}t^{\alpha+\beta-\frac{Q}{p}}\left\|f\right\|_{L^{p}(B(x,t))}\\
&\lesssim r^{\alpha}M_b f(z)+\left\|b\right\|_{\dot{\Lambda}_{\beta}}\left\|f\right\|_{\mathcal{M}^{p,\varphi^{\frac{1}{p}}}}^{1-\frac{p}{q}}\sup_{t>r}t^{\alpha+\beta}\varphi(x,t)^{\frac{1}{p}}\\
&\lesssim r^{\alpha}M_b f(z)+\left\|b\right\|_{\dot{\Lambda}_{\beta}}\left\|f\right\|_{\mathcal{M}^{p,\varphi^{\frac{1}{p}}}}^{1-\frac{p}{q}}r^{-\frac{\alpha p}{q-p}},
\end{aligned}$$

令

$$r=\left(\frac{\|b\|_{\dot{\Lambda}_\beta}\|f\|^{1-\frac{p}{q}}_{\mathcal{M}^{p,\varphi^{\frac{1}{p}}}}}{M_bf(z)}\right)^{\frac{q-p}{\alpha q}},$$

可以得到

$$M_{\alpha,b}f(y)\lesssim C\|b\|^{1-\frac{p}{q}}_{\dot{\Lambda}_\beta}\|f\|^{1-\frac{p}{q}}_{\mathcal{M}^{p,\varphi^{\frac{1}{p}}}}\left(M_bf(z)\right)^{\frac{p}{q}}.$$

因此，利用推论 3.1 的结论，可以得到

$$\begin{aligned}\|M_{\alpha,b}f(y)\|_{\mathcal{M}^{q,\varphi^{\frac{1}{q}}}}&=\sup_{x\in\mathbb{G},r>0}\varphi(x,r)^{-\frac{1}{q}}r^{-\frac{Q}{q}}\|M_{b,\alpha}f(y)\|_{L^q(B(x,r))}\\&\lesssim\|b\|^{1-\frac{p}{q}}_{\dot{\Lambda}_\beta}\|f\|^{1-\frac{p}{q}}_{\mathcal{M}^{p,\varphi^{\frac{1}{p}}}}\sup_{x\in\mathbb{G},r>0}\varphi(x,r)^{-\frac{1}{q}}r^{-\frac{Q}{q}}\|M_{\alpha,b}f(y)\|^{\frac{p}{q}}_{L^p(B(x,r))}\\&\lesssim\|b\|^{1-\frac{p}{q}}_{\dot{\Lambda}_\beta}\|f\|^{1-\frac{p}{q}}_{\mathcal{M}^{p,\varphi^{\frac{1}{p}}}}\left(\sup_{x\in\mathbb{G},r>0}\varphi(x,r)^{-\frac{1}{p}}r^{-\frac{Q}{p}}\|M_{\alpha,b}f(y)\|_{L^p(B(x,r))}\right)^{\frac{p}{q}}\\&\lesssim\|b\|^{1-\frac{p}{q}}_{\dot{\Lambda}_\beta}\|f\|^{1-\frac{p}{q}}_{\mathcal{M}^{p,\varphi^{\frac{1}{p}}}}\|M_bf\|^{\frac{p}{q}}_{\mathcal{M}^{p,\varphi^{\frac{1}{p}}}}\\&\lesssim\|b\|_{\dot{\Lambda}_\beta}\|f\|^{1-\frac{p}{q}}_{\mathcal{M}^{p,\varphi^{\frac{1}{p}}}}\|f\|^{\frac{p}{q}}_{\mathcal{M}^{p,\varphi^{\frac{1}{p}}}}\\&=\|b\|_{\dot{\Lambda}_\beta}\|f\|_{\mathcal{M}^{p,\varphi^{\frac{1}{p}}}},\end{aligned}$$

至此，结论得证。

基金项目

黑龙江省属高校基本科研业务费备案项目(No. 2019-KYYWF-0909)；

黑龙江省省属本科高校中央支持地方高校改革发展资金任务书(优秀青年人才项目编号：2020YQ07)。

参考文献

[1] Lu, S., Wu, Q. and Yang, D. (2002) Boundedness of Commutators on Hardy Type Spaces. *Science in China Series A*: *Mathematics*, **45**, 984-997. https://doi.org/10.1007/BF02879981

[2] Lu, S.Z. and Xu, L.F. (2006) Boundedness of Some Marcinkiewicz Integral Operators Related to Higher Order Commutators on Hardy Spaces. *Acta Mathematica Sinica*, **22**, 105-114. https://doi.org/10.1007/s10114-005-0545-1

[3] Liu, Y. and Hu, Z. (2007) Boundedness for Iterated Commutators on the Mixed Norm Spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **332**, 787-797. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2006.10.064

[4] Wu, J. (2009) Boundedness of Commutators on Homogeneous Morrey-Herz Spaces over Locally Compact Vilenkin Groups. *Analysis in Theory and Applications*, **25**, 283-296. https://doi.org/10.1007/s10496-009-0283-9

[5] Morrey, C.B. (1938) On the Solutions of Quasi-Linear Elliptic Partial Differential Equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, **43**, 126-166. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1938-1501936-8

[6] Mizuhara, T. (1991) Boundedness of Some Classical Operators on Generalized Morrey Spaces. In: *ICM*-90 *Satellite Conference Proceedings*, Springer, Tokyo, 183-189. https://doi.org/10.1007/978-4-431-68168-7_16

[7] Coifman, R.R., Rochberg, R. and Weiss, G. (1976) Factorization Theorems for Hardy Spaces in Several Variables.

Annals of Mathematics, **103**, 611-635. https://doi.org/10.2307/1970954

[8] Janson, S. (1978) Mean Oscillation and Commutators of Singular Integral Operators. *Arkiv for Matematik*, **16**, 263-270. https://doi.org/10.1007/BF02386000

[9] Paluszyński, M. (1995) Characterization of the Besov Spaces via the Commutator Operator of Coifman, Rochberg and Weiss. *Indiana University Mathematics Journal*, **44**, 1-17. https://www.jstor.org/stable/24898462 https://doi.org/10.1512/iumj.1995.44.1976

[10] Zhang, P. (2017) Characterization of Lipschitz Spaces via Commutators of the Hardy-Littlewood Maximal Function. *Comptes Rendus Mathematique*, **355**, 336-344. https://doi.org/10.1016/j.crma.2017.01.022

[11] Burenkov, V.I., Gogatishvili, A., Guliyev, V.S., *et al*. (2010) Boundedness of the Fractional Maximal Operator in Local Morrey-Type Spaces. *Complex Variables and Elliptic Equations*, **55**, 739-758. https://doi.org/10.1080/17476930903394697

[12] Guliyev, V., Ekincioglu, I., Kaya, E., *et al*. (2019) Characterizations for the Fractional Maximal Commutator Operator in Generalized Morrey Spaces on Carnot Group. *Integral Transforms and Special Functions*, **30**, 453-470. https://doi.org/10.1080/10652469.2019.1581777

[13] Guliyev, V., Akbulut, A. and Mammadov, Y. (2013) Boundedness of Fractional Maximal Operator and Their Higher Order Commutators in Generalized Morrey Spaces on Carnot Groups. *Acta Mathematica Scientia*, **33**, 1329-1346. https://doi.org/10.1016/S0252-9602(13)60085-5

[14] 常娇娇. 极大交换子在分层 Lie 群中的有界性[J]. 理论数学, 2022, 12(1): 80-87. https://doi.org/10.12677/PM.2022.121011

[15] Stein, E.M. and Murphy, T.S. (1993) Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals. Princeton University Press, Princeton. https://doi.org/10.1515/9781400883929

[16] Folland, G.B. and Stein, E.M. (2020) Hardy Spaces on Homogeneous Groups. (MN-28), Volume 28. Princeton University Press, Princeton. https://doi.org/10.2307/j.ctv17db3q0

[17] Hu, G. (2019) Littlewood-Paley Characterization of Hölder-Zygmund Spaces on Stratified Lie Groups. *Czechoslovak Mathematical Journal*, **69**, 131-159. https://doi.org/10.21136/CMJ.2018.0197-17

[18] Wu, J.L. (2022) Characterization of Lipschitz Functions via the Commutators of the Fractional Maximal Function on Stratified Lie Groups.

[19] Nakai, E. (2006) The Campanato, Morrey and Holder Spaces on Spaces of Homogeneous Type. *Studia Mathematica*, **1**, 1-19. https://doi.org/10.4064/sm176-1-1