Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(12), 2114-2123
Published Online December 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.1212227

Hans汉斯

具有特殊结构的可度量化空间的性质研究

罗嘉铭

喀什大学数学与统计学院和现代数学及其应用研究中心，新疆 喀什

收稿日期：2022年11月17日；录用日期：2022年12月20日；发布日期：2022年12月27日

摘 要

可度量化空间是分析学、一般拓扑学等研究的重要对象，在众多可施加在拓扑空间上的分离公理中，Hausdorff空间蕴涵了序列、网和滤子的极限的唯一性，是最常使用和讨论的。本文通过运用两个基本的度量化定理得到度量化的Hausdorff空间，在此基础上研究构造几种常见的可分空间的拓扑结构，通过论证得到，经构造的可分度量空间满足群、环、PID的相关条件。

关键词

拓扑空间，度量空间，子覆盖

Properties Study on the Properties of Metrizable Spaces with Special Structure

Jiaming Luo

School of Mathematics and Statistics, Research Center of Modern Mathematics and Its Application, Kashgar University, Kashgar Xinjiang

Received: Nov. 17th, 2022; accepted: Dec. 20th, 2022; published: Dec. 27th, 2022

Abstract

The metrizable spaces are important objects of analysis, general topology and other studies. Among many separation axioms that can be imposed on topological spaces, Hausdorff spaces contain the uniqueness of the limits of sequences, nets and filters, which are most often used and discussed. In this paper, two basic metrization theorems are used to obtain the metrized Hausdorff space. On this basis, several common topological structures of separable spaces are studied and constructed. Through demonstration, the constructed separable metric space meets the relevant conditions of group, ring and PID.

文章引用: 罗嘉铭. 具有特殊结构的可度量化空间的性质研究[J]. 理论数学, 2022, 12(12): 2114-2123.
DOI: 10.12677/pm.2022.1212227

Keywords

Topological Space, Metric Space, Sub-Covering

1. 引言

众所周知，可度量化空间在分析学、一般拓扑学等相关的数学学科领域的研究中有着十分重要的意义，自 1906 年由 Maurice Fréchet 引入以来，随着研究和应用的深入，除了定义极限的概念，近年来国内学者在研究对可度量空间中各类型不动点问题([1] [2] [3] [4])、穿孔度量空间 Gromov 双曲性的几何特征([5])、加倍度量空间和 Lipschitz 逼近与扩张([6])等相关问题上进行了深入研究，取得了一定的成果。由于可度量空间也是拓扑空间具有拓扑性质，因而导致了对再度抽象的拓扑空间的研究，也就是对可度量空间的拓扑结构进行构造。本文的研究是建立在对现有理论的推导和探索上的，构造具有特殊拓扑结构的度量空间，使其能够满足群、环、PID 的重要条件。并在构造的可度量空间的过程中提出一种重要的构造法，以此满足未来进一步的工作，能够为研究与可度量空间相关的不动点、逼近扩张等问题提供新的思路。

2. Hausdorff 空间的度量化及特殊拓扑结构的构造问题

首先考虑 Hausdorff 空间的情形，需要考虑一般 Hausdorff 空间的度量化问题。利用一般拓扑学中关于拓扑空间度量化的原理，采用两种方式进行：① Urysohn 度量化定理；② Nagata-Smirnov 度量化定理。且两个度量化定理之间具有一定的内在逻辑联系。这里我们引入重要的定义、定理为接下来的论述做准备。

定理 2.1 ([7] [8]) (Urysohn 度量化定理)设 X 为第二可数空间，则 X 是可度量化空间当且仅当 X 是正规空间。

定理 2.2 ([7] [8]) (Nagata-Smirnov 度量化定理)拓扑空间 X 可度量化，当且仅当 X 是正则的且具有 σ 局部有限基。

定义 2.3 ([8] [9])若拓扑空间 X 存在一个可数基，则称 X 具有第二可数性。

定义 2.4 ([10])若集合 $G \neq \varnothing$，在 G 上的二元运算(该运算称为群的乘法，注意它未必是通常意义下数的乘法，其结果称为积) $\cdot : G \times G \to G$ 构成的代数结构 $(G,\cdot)$，满足：

1、结合律：$\forall a,b,c \in G$ 有 $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$ 成立；

2、封闭性：即 G 的任意两个元素在此运算下结果都是该集合的一个元素。$(\forall a,b \in G, a\cdot b \in G)$；

3、单位元(幺元)：G 中存在元素 e，使 G 中任意元素 a 与之相乘(包括左乘和右乘)的结果都等于 a 本身。($\exists e \in G$，使 $\forall a \in G$，有 $e\cdot a = a\cdot e = a$；)

4、逆元：$\forall a \in G, \exists b \in G$ 使得 $a\cdot b = b\cdot a = e$，b 称为 a 的逆元，记为 a^{-1}；

则 $(G,\cdot)$ 称为一个群，或乘法群，简记作 G。同样地，可以有加法群。

定义 2.5 ([10]) 设 R 为一个非零集合，在 R 上定义了两种代数运算，分别称为加法和乘法，记作+和 •，且加法和乘法满足：

1、$(R,+)$ 是一个交换群；

2、乘法满足结合律，即 $\forall a,b,c \in R$，有 $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$；

3、分配律成立，即 $\forall a,b,c \in R$，有 $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$ （左分配律），$(b+c)\cdot a = b\cdot a + c\cdot a$ （右分配律)则 R 连同其上的代数运算+和 • 称为一个环，记作 $(R,+,\cdot)$。

定义 2.6 ([10])若一个环 R 的任意理想都是主理想，则称 R 为主理想环，若 R 同时又为整环，则 R 称为主理想整环。

2.1. 利用 Urysohn 定理对 Hausdorff 空间进行度量化

现假设 X 是一个 Hausdorff 空间，考虑 Hausdorff 空间 X 中的一组有限序列点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，若每个点形成的邻域能够称为 X 的一个有限开覆盖，那么就有 $U(x_1), U(x_2), \cdots, U(x_n) \subset X$，其中令 $U(x_k) = U_k, k = 1,2,\cdots,n$，那么 $\bigcup_{\tau=1}^{n} U_\tau = X$。

现取序列点所构成的 n 个邻域中的任意一个 U_i，就有

$$U_i \cup \left(U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup \hat{U}_i \cup \cdots \cup U_n\right) = X.$$

令 $V = U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup \hat{U}_i \cup \cdots \cup U_n$，由于 Hausdorff 空间中的任意个点的邻域是无交的，所以有

$$U_i \cap V = \varnothing，且 U_i \cup V = X.$$

因此经过构造。就得到了正则化的 Hausdorff 空间，记为 X_R。

下面需要讨论构造的 V 的内部可数基的问题。现设某个拓扑空间 X_z 的可数基为 $\mathcal{B}$，其中任意的一个基元素有 $B \in \mathcal{B}$，并且 $B \subseteq V$。若 $x_m \in X_z$，x_m 的邻域 $U_m \in \mathcal{B}$，所以对于任意基元素 B 来说，B 可以是 $\mathcal{B}$ 中的任意元素与 U_m 的并，但是这两个对象的并必须包含在 $\mathcal{B}$ 之内，因此 $U_m \subseteq B$，所以就有 $x_m \in B$ 成立。

关于可数基原理的第二个条件，我们只需要考察一种特定情况就可以由此验证其成立。考虑取正则化 Hausdorff 空间的基元素的一点，即 $x_f \in B_3 \subset X_R$，存在 x_f 的邻域 U_f，由于上面讨论的结论可知，我们可以找到 X_R 中另一个点 x_g 的邻域 U_g 使得

$$B_3 = U_f \cup U_g.$$

同样地，我们仍然可以找到 X_R 中的一点 x_h 的邻域 U_h 使得 X_R 中的另一基元素 B_2 满足

$$B_2 = U_f \cup U_g \cup U_h = B_3 \cup U_h, \tag{1}$$

由(1)同理可得 $B_1 = B_2 \cup U_t$，这里需注意 $1 \le f,g,h,t \le n$，且 $\ne 1$。由于 $B_1, B_2, B_3 \in \mathcal{B}$，所以

$$B_1 \cap B_2 = B_2 = B_3 \cup U_h,$$

因为 $B_3 \subseteq B_2$，所以对于一个包含 x_f 点的 B_3 有 $B_3 \subset B_1 \cap B_2$ 就可以得到 X_R 中存在可数基 $\mathcal{B}$ 的条件成立，已知满足以上的讨论的条件后，根据定理 2.1 和定义 2.3 可知 X_R 是可度量化的 Hausdorff 空间。

2.2. 利用 Nagata-Smirnov 定理对 Hausdorff 空间进行度量化

选取任意的 Hausdorff 空间 X，设 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 是 X 的两个子集族，且 $\mathcal{A}$ 是局部有限族 $\mathcal{A}_a$ 的并，$\mathcal{B}$ 是局部有限族 $\mathcal{B}_b$ 的并，即

$$\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^{a} \mathcal{A}_i, \mathcal{A}_i = \bigcup_{\alpha=1}^{p} U_\alpha \Rightarrow \mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^{a}\bigcup_{\alpha=1}^{p} U_{i\alpha}, \tag{2}$$

由(2)同理可得 $\mathcal{B}_b = \bigcup_{j=1}^{b}\bigcup_{\beta=1}^{q} U_{j\beta}$，因为 Hausdorff 空间 X 内部是序列化分布，所以 $U_{i\alpha}, U_{j\beta} \subset X$，考虑

当 $i \geq j$，$\alpha \geq \beta$ 两个条件必须同时成立时，这样的话，$\mathcal{B}$ 中的任何一个元素都能在 $\mathcal{A}$ 中找到一个元素包含它，所以 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$ 的局部有限开加细，同时由于 Hausdorff 空间 X 中的子集都是点的邻域，当然是开集，因此子集族 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 可作为 Hausdorff 空间 X 的任意开覆盖，所以这里我们就得到了仿紧致的 Hausdorff 空间 X_p。考虑对于任意一点 $x \in X_p$，存在 x 的邻域 U，再选取 X 的子空间 E 满足 $U \cap E = \varnothing$，这样 U 和 E 构成了一个包含于 X_p 的正则空间。考虑子空间 E 的拓扑 $\mathcal{T}$，且

$$E,\varnothing \subset \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{n} E_k \subset \mathcal{T}, \bigcap_{l=1}^{n} E_l \subset \mathcal{T} \tag{3}$$

这里利用 2.1 中的方法和(3)可知，仿紧致的 Hausdorff 空间 X_p 的每一点的邻域在子空间 E 的拓扑 $\mathcal{T}$ 下是可度量化的，所以 X_p 是局部可度量化的，根据定理 2.2 可知，所选取并通过构造的 Hausdorff 空间是可度量化的。

2.3. 可度量化的 Hausdorff 空间的完备化问题

现设 H_{met} 是一个可度量化的 Hausdorff 空间，d 为诱导 H_{met} 度量的诱导度量，因此我们就有度量空间 (H_{met}, d)。选取任意的 H_{met} 中的一组点列 $\{x_n\}$ 和任意的关于序列点的邻域 U_m, U_n，其中 $m, n \geq N$，如此就构成了两个不相交区域的几何结构。假设两个区域都有边界极限点 x'_n, x'_m，因此就有

$$d(x_n, x'_n) = |x_n - x'_n| < r_n \text{ 和 } d(x_m, x'_m) = |x_m - x'_m| < r_m, \tag{4}$$

所以由(4)可得 $d(x_n, x'_n) + d(x_m, x'_m) < d(x_n, x_m)$，且 $r_m + r_n < d(x_n, x_m)$。这里需要通过考虑这样一种几何结构来配置满足要求的完备条件，即

$$r_n + r_m < d(x_n, x_m) < c(r_n + r_m)\text{，其中 } c > 1. \tag{5}$$

根据(5)，令 $r_n + r_m = \dfrac{\varepsilon}{c}$，因为 r_n, r_m 都是距离，所以必有 $\varepsilon > 0$ 使得 $d(x_n, x_m) < \varepsilon$。

配置完备条件的几何意义在于：两个区域的间隙最大距离不能超过两区域内部各自的极限距离之和。因此，所取的任意的点列 $\{x_n\}$ 是一组 Cauchy 序列。另外，在满足完备条件 $d(x_n, x_m) < c(r_n + r_m)$ 的情况下，度量空间 (H_{met}, d) 是完备的，所以 Hausdorff 空间 H_{met} 的任意序列都收敛。

2.4. 可度量化的 Hausdorff 空间内部区域的几何结构与群的条件

考虑可度量化的 Hausdorff 空间 H_{met} 内的一组序列 $\{\alpha_n\}$，由于 2.3 中已经证明所构造的空间 H_{met} 是完备的，根据度量空间完备性定理，该序列 $\{\alpha_n\}$ 必然收敛到点 α_L，因此对于序列中的任何两点 $\alpha_i, \alpha_j \in \{\alpha_n\}$，有 $d(\alpha_i, \alpha_j) \leq d(\alpha_L, \alpha_n) < \varepsilon$，令 $M = d(\alpha_L, \alpha_n), n = 1, 2, \cdots$，所以 $d(\alpha_i, \alpha_j) \leq M$。由此可知，由任意点 $\alpha_i, \alpha_j \in \{\alpha_n\}$ 的邻域 U_i, U_j 合成的区域 $U_{ij} = U_i \cup U_j$ 是有界的，可以由此得到任意两个区域合成的区域直径，即

$$diamU_{ij} = \sup\left\{ d(\alpha_i, \alpha_j) \middle| \alpha_i, \alpha_j \in U_{ij} \right\}.$$

构造几何结构

$$d(\alpha_i, \alpha_j) = |\alpha_i - \alpha_j| = diamU_{ij} - r_i - r_j, \tag{6}$$

令 $R_{ij} = r_i + r_j$，这里 r_i, r_j 分别是点 α_i, α_j 的邻域内部点到边界的极限距离。这样就得到了完备的度量化 Hausdorff 空间 H_{met} 关于任意点间的一般距离关系。由此，接下来利用(6)研究 H_{met} 是否满足群定义中的条件就较为容易了。现忽视 H_{met} 内的所有点，将看作 H_{met} 由内部所有序列点之间的距离线构成，那么空

间 H_{met} 就成了包换序列点之间距离的空间，将其记为 H_L。

选取 H_L 中任意元素三个元素 $d(\alpha_a,\alpha_b),d(\alpha_m,\alpha_n),d(\alpha_p,\alpha_q)$，验证是否满足乘法群的条件。首先，封闭性是显然的。然后，

$$\begin{aligned}
&d(\alpha_a,\alpha_b)\cdot\left(d(\alpha_m,\alpha_n)\cdot d(\alpha_p,\alpha_q)\right)\\
&=(diamU_{ab}-R_{ab})(diamU_{mn}diamU_{pq}-R_{pq}diamU_{mn}-R_{mn}diamU_{pq}+R_{mn}R_{pq})\\
&=diamU_{ab}diamU_{mn}diamU_{pq}-R_{pq}diamU_{ab}diamU_{mn}-R_{mn}diamU_{ab}diamU_{pq}+R_{mn}R_{pq}diamU_{ab}\\
&\quad-R_{ab}diamU_{mn}diamU_{pq}+R_{ab}R_{pq}diamU_{mn}+R_{ab}R_{mn}diamU_{pq}-R_{ab}R_{mn}R_{pq}\\
&=\left(d(\alpha_a,\alpha_b)\cdot d(\alpha_m,\alpha_n)\right)\cdot d(\alpha_p,\alpha_q)
\end{aligned}$$

结合律成立。因为 H_L 由距离构成的，可断言存在距离为 1 的距离，并且存在对应的逆元。设 H_L 中任意序列点之间的距离元素为 $d(x_i,x_j)$，对于单位距离则有

$$1\cdot d(x_i,x_j)=1\cdot(diamU_{ij}-R_{ij})=diamU_{ij}-R_{ij}=d(x_i,x_j)=(diamU_{ij}-R_{ij})\cdot 1=d(x_i,x_j)\cdot 1$$

成立。若 $d(x_i,x_j)$ 的逆 $1/d(x_i,x_j)$ 存在，则必有某一元素 $d(x_s,x_t)$ 使得 $d(x_s,x_t)=1/d(x_i,x_j)$。这里只需要

$$(r_s+r_t)(r_i+r_j)=\frac{1}{c},c>1 \text{ 和 } (diamU_{st}-R_{st})(diamU_{ij}-R_{ij})=1$$

成立。由此推出，需要

$$diamU_{st}\cdot diamU_{ij}-R_{ij}diamU_{st}-R_{st}diamU_{ij}=R_{st}R_{ij}=1-\frac{1}{c},c>1$$

成立，而此式的成立是显然的，因此前面的论断成立。

现考虑在 H_L 是否存在交换律条件，仍然取任意的三个元素 $d(\alpha_m,\alpha_n),d(\alpha_p,\alpha_q)$，于是就有

$$\begin{aligned}
d(\alpha_m,\alpha_n)\cdot d(\alpha_p,\alpha_q)&=(diamU_{mn}-R_{mn})(diamU_{pq}-R_{pq})\\
&=diamU_{mn}diamU_{pq}-R_{pq}diamU_{mn}-R_{mn}diamU_{pq}+R_{mn}R_{pq}\\
&=(diamU_{pq}-R_{pq})(diamU_{mn}-R_{mn})\\
&=d(\alpha_p,\alpha_q)\cdot d(\alpha_m,\alpha_n)
\end{aligned}$$

成立。由上述讨论，根据定义 2.4 可知，H_L 满足 Abel 群的条件。

另外考虑 Lindelöf 空间，此空间是每一个开覆盖都包含可数个子覆盖的拓扑空间，所有也需要通过分离性公理来构造实现度量化，其经过构造后满足群条件的论证过程与 Hausdorff 空间相同，因此不再进行详细论述。

3. 构造典型的度量空间结构满足群的条件

Euclid 空间是一种最基本的度量空间，我们从 Euclid 空间的定义出发，考虑由 n 维实线性空间 R^n 和度量 ρ 构造的 n 维 Euclid 空间 E。这里选取任意的三个元素

$$(x_1,x_2,\cdots,x_n),(y_1,y_2,\cdots,y_n),(z_1,z_2,\cdots,z_n)\in R^n.$$

由于实线性空间的元素满足交换律和结合律，因此有 $g\left((x_1x_2,\cdots,x_n),(y_1y_2,\cdots,y_n)\right)=x_1y_1+\cdots+x_ny_n=y_1x_1+\cdots+y_1x_1=g\left((y_1y_2,\cdots,y_n),(x_1x_2,\cdots,x_n)\right)$ 成立。令 $\{1_E\}$ 是空间的单位元集合使得

$$g\left(\left(x_1x_2,\cdots,x_n\right),1_E\right)=\left(x_1x_2,\cdots,x_n\right)=g\left(1_E,\left(x_1x_2,\cdots,x_n\right)\right),$$

由此可得逆元为$\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)^{-1}=1_E/\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\in\left\{1_E/R^n\right\}$，根据定义 2.4 就有

$$\begin{aligned}E_g&=\left(R^n\cup\left\{1_E\right\}\cup\left\{1_E/R^n\right\}-\left\{\vec{0}\right\},\rho\right)\\&=\left\{\vec{x}\middle|\vec{y},\vec{z}\in R^n\cup\left\{1_E\right\}\cup\left\{1_E/R^n\right\}-\left\{\vec{0}\right\},\rho\left(\vec{x},\vec{y}\right)=0\text{当且仅当}\vec{x}=\vec{y},\right.,\\&\qquad\left.\rho\left(\vec{x},\vec{y}\right)=\rho\left(\vec{y},\vec{x}\right),\rho\left(\vec{x},\vec{z}\right)\le\rho\left(\vec{x},\vec{y}\right)+\rho\left(\vec{y},\vec{z}\right)\right\}\end{aligned}$$

则构造的 E_g 也满足 Abel 群的条件。考虑将空间经过一定的构造后满足群的条件，但原本的空间性质仍然存在，因此若两个空间之间原本存在一定的逻辑关系，经过构造后，这种关系是不变的。

所以根据上述讨论和对于 Euclid 空间的构造过程，就能得到类似的构造 Hilbert 空间满足群条件的方法。因为 Hilbert 空间是无限维完备可分的 Euclid 空间(这里讨论可分的 Hilbert 空间)，所以将上述构造的 E_g 和 Euclid 空间与 Hilbert 空间的关系，可以类似构造满足群条件的 Hilbert 空间。对于完备的 Euclid 空间 E_p，可知 E_p 满足条件：

① 原 Euclid 空间 E 是 E_p 的子空间；

② E 在 E_p 中处处稠密，即$[E]=E_p$。

由于这里的完备性并不改变空间内部点的性质及其相互关系，所以构造 E_p 与构造 E_g 的方法类似。取任意的点$\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\in E_p$，因为$E_p=\left(R_0^n\cup\left\{1_E\right\}\left\{1_E/R_0^n\right\}-\left\{\vec{0}\right\},\rho\right)$，其中 R^n 是 R_0^n 的线性子空间，又因为 E_p 中没有零元素，所以不可能存在$\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\right)\in E_p$ 使得$\sum_{i=1}^{n}\alpha_ix_i=0$，因此 E_p 是无限维的。接下来需要证明下面一个重要的命题。

命题 3.1 在构造的可分完备的 Euclid 空间 E_p 中，任何完备标准正交系是封闭的。

证明：已知 E_p 是完备度量空间，实际上只需证明 E_p 是可分的。假设 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$ 是 E_p 中的一组封闭的标准正交系，则对于任意的 $\vec{f}\in E_p$，它的 Fourier 级数的部分和收敛于 $\vec{f}$，而且有 Bessel 不等式

$$\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2\le\left\|\vec{f}\right\|^2\text{，其中 }c_k=\left(x,\varphi_k\right),x=\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k\text{ ，}\tag{7}$$

这里(7)意味着元素系$\left\{\varphi_n\right\}$的线性组合在 E_p 中处处稠密，即系$\left\{\varphi_n\right\}$是完备的。

反之，若设系$\left\{\varphi_n\right\}$是完备的，即任意元素 $\vec{f}\in E_p$ 都可以用元素系$\left\{\varphi_n\right\}$的线性组合$\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k$ 给出同样准确的逼近，从而级数$\sum_{k=1}^{\infty}c_k\varphi_k$ 收敛于 $\vec{f}$，并且 Parseval 等式$\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2=\left\|\vec{f}\right\|^2$ 成立。证毕。

通过前面的论述和命题 3.1 的证明就得到了完备可分的 Euclid 空间 E_p，再由 E_p 是无限维的，就容易构造满足群条件的 Hilbert 空间，即

$$\begin{aligned}H_i&=\left(R_0^n\cup\left\{1_E\right\}\cup\left\{1_E/R_0^n\right\}-\left\{\vec{0}\right\},\rho\right)\\&=\left\{\vec{x}\middle|\vec{y},\vec{z}\in R_0^n\cup\left\{1_E\right\}\cup\left\{1_E/R_0^n\right\}-\left\{\vec{0}\right\},\rho\left(\vec{x},\vec{y}\right)=0\text{当且仅当}\vec{x}=\vec{y},\right.,\\&\qquad\left.\rho\left(\vec{x},\vec{y}\right)=\rho\left(\vec{y},\vec{x}\right),\rho\left(\vec{x},\vec{z}\right)\le\rho\left(\vec{x},\vec{y}\right)+\rho\left(\vec{y},\vec{z}\right)\right\}\end{aligned}$$

由此构造的空间 $H_i,i=1,2,\cdots,n$ 能够满足群的条件。因此，前面讨论构造的几种度量空间都能够在保持自身空间基本性质不变的情况下满足群的条件，不妨将这种经构造的度量空间称为结合空间。同理，不同的结合空间之间的一一对应关系也变成了同时满足同构和同胚条件的对应关系，本质上是一种二元

映射。考虑空间与子空间的结构同一性，所以结合空间与其子结合空间也存在类似的关系。

4. 结合流形的基本问题

现已知度量空间经过构造能够形成结合空间，那么与度量空间关系密切的流形是否可经过类似的构造得到满足群条件的结合流形，将在此进行论述。这里通过一般的结合拓扑流形得到结合 Smooth 流形。关于前面得到的结合 Euclid 空间 E_g，这里考虑为是有限的 m 维的。由于之前构造的结合 Hausdorff 空间 H_a 的元素的对应关系必须具有二元性，因此可以考虑取 H_a 任意的序列子集 $U_\alpha \cup U_\beta, U_\rho \cup U_\sigma \subset H_a$，令二元映射 $\Phi = (\varphi, \tau)$，满足：

① φ 使得 $U_\alpha \cup U_\beta, U_\rho \cup U_\sigma$ 与结合 Euclid 空间 E_g 上的开集对应；

② τ 使得结合 Hausdorff 空间中的的元素 $|U_\alpha \cup U_\beta|, |U_\rho \cup U_\sigma|$ 与结合 Euclid 空间 E_g 上的元素对应。

那么对于条件①：利用结合 Hausdorff 空间中的度量关系，即

$$\begin{aligned} d\left(U_\alpha \cup U_\beta, U_\rho \cup U_\sigma\right) &= \left|U_\alpha \cup U_\beta - U_\rho \cup U_\sigma\right| \le \left|U_\alpha \cup U_\beta\right| + \left|U_\rho \cup U_\sigma\right| \\ &= \left|U_{\alpha\beta}\right| + \left|U_{\rho\sigma}\right| = diamU_{\alpha\beta} + diamU_{\rho\sigma} \\ &= d\left(a_\alpha, a_\beta\right) + R_{\alpha\beta} + d\left(a_\rho, a_\sigma\right) + R_{\rho\sigma} < 2\varepsilon + R_{\alpha\beta} + R_{\rho\sigma} \end{aligned} , \tag{8}$$

因为 $d\left(a_\alpha, a_\beta\right) < \varepsilon, d\left(a_\rho, a_\sigma\right) < \varepsilon$， $\varepsilon, R_{\alpha\beta}, R_{\rho\sigma} > 0$，所以由(8)就有

$$d\left(U_\alpha \cup U_\beta, U_\rho \cup U_\sigma\right) < \varepsilon$$

成立。由于 E_g 是有限 m 维结合 Hausdorff 空间，所以存在 $\delta > 0$ 使得

$$d\left(\varphi\left(U_\alpha \cup U_\beta\right), \varphi\left(U_\rho \cup U_\sigma\right)\right) < \delta,$$

因此 φ 的一致连续性成立。反之，同理逆映射 φ^{-1} 的一致连续性也成立，则 φ 是同胚。

再考虑条件②：根据已定义的 τ 有

$$\tau : \left(\left|U_\alpha \cup U_\beta\right|, +\right) \to \left(\vec{f}, g\right), \left(\left|U_\rho \cup U_\sigma\right|, +\right) \to \left(\vec{h}, g\right),$$

其中 $\vec{f}, \vec{h}$ 是 E_g 中的点，因此有

$$\tau\left(\left|U_\alpha \cup U_\beta\right| + \left|U_\rho \cup U_\sigma\right|\right) = g\left(\vec{f}, \vec{h}\right) = \tau\left(\left|U_\alpha \cup U_\beta\right|\right)\tau\left(\left|U_\rho \cup U_\sigma\right|\right)$$

成立，即 τ 是同态映射。同理考察

$$\tau^{-1}\left(g\left(\vec{f}, \vec{h}\right)\right) = \tau^{-1}\left(\tau\left(\left|U_\alpha \cup U_\beta\right|\right)\tau\left(\left|U_\rho \cup U_\sigma\right|\right)\right),$$

因为已知式子

$$\tau^{-1}\left(\vec{f}\right) = \left|U_\alpha \cup U_\beta\right|, \quad \tau^{-1}\left(\vec{h}\right) = \left|U_\rho \cup U_\sigma\right|, \quad \tau\left(\left|U_\alpha \cup U_\beta\right|\right)\tau\left(\left|U_\rho \cup U_\sigma\right|\right) = \tau\left(\left|U_\alpha \cup U_\beta\right| + \left|U_\rho \cup U_\sigma\right|\right),$$

所以

$$\tau^{-1}\left(g\left(\vec{f}, \vec{h}\right)\right) = \tau^{-1}\left(\tau\left(\left|U_\alpha \cup U_\beta\right| + \left|U_\rho \cup U_\sigma\right|\right)\right) = \left|U_\alpha \cup U_\beta\right| + \left|U_\rho \cup U_\sigma\right| = \tau^{-1}\left(\vec{f}\right) + \tau^{-1}\left(\vec{h}\right),$$

即 τ^{-1} 也成立，因此 τ 是同构映射。所以二元映射 $\Phi = (\varphi, \tau)$ 是结合流形的之间的一一对应关系。由此，我们就得到构造的结合流形 M_a 的图 $\left(U_\lambda \cup U_\mu, \Phi\right)$，其中 $U_\lambda \cup U_\mu$ 是 H_a 中任意开子集序列。

4.1. 结合 Smooth 流形的构造问题

通过前面讨论得到的关于结合流形的基本理论，在此基础上我们可以继续探究结合 Smooth 流形的构

造问题，但具体过程稍有不同。取结合 Hausdorff 空间 H_a 的子结合空间 H_a^*，并且子结合空间 H_a^* 必须满足内部只有一组序列化结构，将构造的 H_a^* 代入前面的论述可知 H_a^* 自身仍然是一个结合流形，现要以 H_a^* 为基础来进一步构造 Smooth 流形。

设 H_a^* 内部唯一组序列为 $T_1,T_2,\cdots,T_\omega$，所以可选取一图集为 $\mathcal{A}=\left\{\left(T_\varepsilon\cup T_\xi,\Phi_i\right)\right\}$，其中 $i=1,2,\cdots,\omega$，$T_\varepsilon\cup T_\xi$ 是 H_a^* 中任意开子集序列，所以就有 $\sum_{n=1}^{\omega}T_n=H_a^*$，即形成 H_a^* 的开覆盖。取图集 $\mathcal{A}$ 中的任意图 $\left(T_\lambda\cup T_\mu,\Phi_1\right)$ 和 $\left(T_\rho\cup T_\sigma,\Phi_2\right)$，根据前面关于二元映射的理论，可知

$$\Phi_1\left(T_\lambda\cup T_\mu\right)=\left(E_1,\vec{u}\right),\Phi_2\left(T_\rho\cup T_\sigma\right)=\left(E_2,\vec{v}\right),$$

其中 $E_1,E_2\subset E_g$ 和 $\vec{u},\vec{v}\in E_g$，因此存在二元 Smooth 映射 $\Psi=\left(\psi_1,\psi_2\right)$，并且此映射是结合 Euclid 空间 E_g 的自映射，即

$$\Psi\left(E_1,\vec{u}\right)=\left(E_2,\vec{v}\right):\psi_1\left(E_1\right)=E_2,\psi_2\left(\vec{u}\right)=\vec{v}.$$

所以就有关系 $\Psi\left(\Phi_1^{-1}\left(T_\lambda\cup T_\mu\right)\right)=\Phi_2\left(T_\rho\cup T_\sigma\right)$ 成立。因此可知 H_a^* 是结合 Smooth 流形，并且图集 $\mathcal{A}=\left\{\left(T_\varepsilon\cup T_\xi,\Phi_i\right)\right\}$ 也是 Smooth 图集。

4.2. 构造 Banach 空间满足群、环条件的问题

现设 X 是一个线性空间，显然 X 必须满足定义线性空间的基本公理，也就是说 X 内的元素关系存在加法和数乘两种运算关系，若要使 X 满足代数条件就需要再在 X 中引入乘法运算并且满足赋范线性空间条件且存在单位元，即

① $(xy)z=x(yz)$；

② $x(y+z)=xy+xz,(y+z)x=yx+zx$；

③ $\alpha(xy)=(\alpha x)y=x(\alpha y)$；

④ 如果存在元素 $e\in X$，使得对一切 $x\in X$ 有 $ex=xe=x$；

⑤ 如果乘法运算使交换的，即乘法运算满足公理：$xy=yx$；

⑥ $\|e\|=1$；

⑦ $\|xy\|\le\|x\|\|y\|$。

同时还要满足对于空间中的任意序列 $\{\xi_n\}$ 有 $\lim_{n\to\infty}\xi_n=\xi$，所以空间具有完备性，那么通过此线性空间就得到了 Banach 空间 B.从空间的内部的元素关系可以看出多种运算法则，其乘法能够满足乘法群的条件，而利用加法和乘法两种运算可以使 Banach 空间([11])通过构造满足环的条件。

考虑构造这样一种结构 $B_a=(B,\partial)$，因此对与其中的任意元素 $\|x\|\in B_a$ 满足如下条件：

① $\|x\|\ge 0$ 当且仅当 $x=0$ 时 $\|x\|=0$；

② 若有另一 $\|y\|\in B_a$，则 $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$；

③ 对于一切常数 α 有 $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$ 成立。

因此容易知道前面的条件①至⑦在此结构中也成立，所以任取 $\|x\|,\|y\|,\|z\|\in B_a$，根据已知条件就有加法交换律、结合律成立；又因为取 $\|0\|=0$ 所以有

$$\|x\|+\|0\|=\|x\|+0=\|x\|=0+\|x\|=\|0\|+\|x\|;$$

令 $-\|x\|=\|0\|-\|x\|$，所以

$$\|x\|+\left(-\|x\|\right)=0=\|0\|=-\|x\|+\|x\|.$$

因此 $B_a=\left(B\bigcup\{\|0\|\}\bigcup\{-B_a\},\partial\right)$ 满足 Abel 群的条件。

进一步讨论满足环条件的情况，根据前面的论述，可知 B_a 在加法下是满足 Abel 群条件的 $\|x\|,\|y\|,\|z\|\in B_a$，则因为 $\|x\|\|y\|=\|y\|\|x\|,\|x\|(\|y\|\|z\|)=(\|x\|\|y\|)\|z\|,\|x\|(\|y\|+\|z\|)=\|x\|\|y\|+\|x\|\|z\|$，所以交换、结合、分布律均成立；另外由于 $\|e\|\in B_a$，所以就有 $1\cdot\|x\|=\|x\|$，即幺元也存在。由定义 2.5，可知结合 Banach 空间 $B_a=\left(B\bigcup\{\|0\|\}\bigcup\{-B_a\},\partial\right)$ 满足交换环的条件。同样地，可进一步将构造的满足交换环条件的结合 Banach 空间 B_a 再进行构造，使其满足整环条件，得到满足整环条件的结合 Banach 空间 B_a^*。取任意 $\|a\|,\|b\|,\|c\|\in B_a$，若 $\|a\|\|b\|=\|a\|\|c\|$，令 $\|a\|^{-1}=\|e\|/\|a\|$ 代入，得到 $\|a\|^{-1}\|a\|\|b\|=\|a\|\|a\|^{-1}\|c\|$，就有

$$\|e\|\|b\|=\|b\|=\|e\|\|c\|=\|c\|,$$

并且 $\|e\|\neq\{0\}$，所以得到满足整环条件的结合 Banach 空间

$$B_a^*=\left(B\bigcup\{\|0\|\}\bigcup(-B_a)\bigcup\{\|e\|/B_a-\{\|0\|\}\},\partial\right).$$

4.3. 构造 Banach 空间满足 PID 条件的问题

选取实数群 R，显然 R 可以构成一个交换环，这里令 $RB_{PID}=\{B_a,R\}$ 是复合交换环集合，对此进行构造，那么需要证明下面的命题成立。

命题 4.3.1 令 $\bigcup_{i=1}^{n}I_i\subset RB_{PID}$，其中任意的某个 $I_j=\left\{\|\alpha\|R\middle|\forall\|a\|\in B_a\right\}$，证明 $\{I_1,I_2,\cdots,I_n\}$ 是 RB_{PID} 中的理想。

证明：首先，因为 $0\in R$，所以对于任意的 $\|\alpha\|\in B_a$ 有 $0\in I_j$ 成立；然后，选取任意的实数 a,b，我们就有 $a\|\alpha\|,b\|\alpha\|\in I_j$，且 $a\|\alpha\|+b\|\alpha\|=(a+b)\|\alpha\|$，由于 $a+b\in R$，所以 $a\|\alpha\|+b\|\alpha\|\in I_j$；最后，如果 $a\|\alpha\|\in I_j$，任意的 b 或 $\|\beta\|\in RB_{PID}$，因为 $ab\in R$，所以 $a\|\alpha\|\in I_j\in\{I_1,I_2,\cdots,I_n\}$，又因为 $\|\alpha\|\|\beta\|\in B_a$，所以 $a\|\alpha\|\|\beta\|\in\{I_1,I_2,\cdots,I_n\}$。因此 $\{I_1,I_2,\cdots,I_n\}$ 是 RB_{PID} 中的理想。证毕。

另外，根据前面的构造可知，对任意理想有 $I_j=(\|\alpha\|)=\left\{a\|\alpha\|\,\forall a\in R\right\}$，所以 I_j 是由 $\|\alpha\|$ 生成的主理想，同理，对于 $\{I_1,I_2,\cdots,I_n\}$ 都是 RB_{PID} 中的主理想，因此我们由前面讨论所得的结论，就有 RB_{PID} 是满足交换环条件的结合 PID，这是对结合 Banach 空间做进一步构造得到的。

5. 结论

本文通过运用两个基本的度量化定理得到度量化的 Hausdorff 空间，在此基础上，本文研究讨论的重点是构造具有特殊拓扑结构的度量空间来满足群、环、PID 的重要条件，也就是对构造方法和构造过程论证的研究。由于，可度量化空间作为数学研究的重要理论和工具，在多个分支领域都有重要的应用，具有一定的研究意义，但是对文中所提出的构造法的研究还存在一定的局限性，主要是讨论的范围和条件的广泛性不够([4] [5] [6])，这些问题都是在接下来的研究中需要重点关注和解决的。

参考文献

[1] 王锦鑫, 杨理平. 直觉模糊度量空间中广义直觉模糊 F-压缩的不动点定理[J]. 仲恺农业工程学院学报, 2022(2): 35.

[2] 周青山, 李浏兰, 李希宁. 穿孔度量空间 Gromov 双曲性的几何特征[J]. 数学学报: 中文版, 2021, 64(5): 10.

[3] 蒋研. 加倍度量空间和 Lipschitz 逼近与扩张[D]: [博士学位论文]. 长沙: 湖南师范大学, 2018.

[4] 朴勇杰. 度量空间上 B^(*)-隐式收缩条件和唯一公共不动点[J]. 中山大学学报: 自然科学版(中英文), 2022, 61(5): 8.

[5] 王静. 矩形 b-度量空间上的不动点定理[D]: [硕士学位论文] . 青岛: 青岛大学, 2020.
[6] 彭荣. 半序偏 b-度量空间中压缩映像的不动点定理[J]. 太原师范学院学报: 自然科学版, 2022(1): 21.
[7] 陈娟, 高随祥. 拓扑空间可度量化的充要条件[J]. 数学杂志, 2015, 35(4): 952-956.
[8] James R. Munkres. 拓扑学[M]. 北京: 机械工业出版社, 2006: 30-390.
[9] 儿玉之宏, 永见启应. 拓扑空间论[M]. 北京: 科学出版社, 1984.
[10] Joseph J. Rotman. 高等近世代数[M]. 北京: 机械工业出版社, 2007: 120-730.
[11] A. H. 柯尔莫戈洛夫, C. B. 佛明. 函数论与泛函分析初步[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006: 85-240.