Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(1), 24-31
Published Online January 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.131003

Hans汉斯

三维可压缩磁流体力学方程组大解时间导数的衰减率

孙彤彤，陈　菲*

青岛大学数学与统计学院，山东 青岛

收稿日期：2022年12月5日；录用日期：2023年1月6日；发布日期：2023年1月13日

摘　要

本文主要研究三维等熵可压缩磁流体力学方程组大解(σ,u,B)的时间导数的大时间渐近行为。在大解本身及其一阶和二阶导数在L^2中的衰减率分别为$(1+t)^{-\frac{3}{4}}$，$(1+t)^{-\frac{5}{4}}$，$(1+t)^{-\frac{7}{4}}$的基础上，本文证明了大解(σ,u,B)的时间导数的衰减率分别为$(1+t)^{-\frac{5}{4}}$，$(1+t)^{-\frac{5}{4}}$，$(1+t)^{-\frac{7}{4}}$。

关键词

可压缩磁流体力学方程组，大初值，衰减率

Decay Rates of Time Derivatives of Large Solutions of 3D Compressible Magnetohydrodynamics Equations

Tongtong Sun, Fei Chen*

School of Mathematics and Statistics, Qingdao University, Qingdao Shandong

Received: Dec. 5th, 2022; accepted: Jan. 6th, 2023; published: Jan. 13th, 2023

Abstract

In this paper, we study the large time asymptotic behavior of the time derivatives of the large solutions (σ,u,B) for the 3D isentropic compressible magnetohydrodynamic system. On the basis of the decay rates of the large solutions and also their first order and second order spatial deriva-

*通讯作者。

文章引用: 孙彤彤, 陈菲. 三维可压缩磁流体力学方程组大解时间导数的衰减率[J]. 理论数学, 2023, 13(1): 24-31.
DOI: 10.12677/pm.2023.131003

tives in L^2 are respectively $(1+t)^{-\frac{3}{4}}$, $(1+t)^{-\frac{5}{4}}$, $(1+t)^{-\frac{7}{4}}$, we prove that the decay rates of the time derivatives of the large solutions (σ,u,B) are $(1+t)^{-\frac{5}{4}}$, $(1+t)^{-\frac{5}{4}}$, $(1+t)^{-\frac{7}{4}}$ respectively.

Keywords

Compressible Magnetohydrodynamics Equations, Large Initial Data, Decay Rate

1. 引言

本文，我们关注以下可压缩磁流体力学(MHD)方程组的大解的时间导数的衰减率：

$$\begin{cases} \sigma_t + \operatorname{div}(\sigma \boldsymbol{u}) = 0, \\ (\sigma \boldsymbol{u})_t + \operatorname{div}(\sigma \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) - \theta \Delta \boldsymbol{u} - (\theta+\eta)\nabla \operatorname{div} \boldsymbol{u} + \nabla P = (\nabla \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{B}, \\ \boldsymbol{B}_t - \nabla \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}) = -\nabla \times (\nu \nabla \times \boldsymbol{B}), \quad \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0, \\ \lim\limits_{|x|\to\infty} (\sigma, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{B})(0,x) = \lim\limits_{|x|\to\infty} (\sigma_0, \boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{B}_0)(x) = (1, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}), \quad (t,x) \in R^+ \times R^3. \end{cases} \tag{1.1}$$

其中，未知函数 $\sigma=\sigma(t,x)\in R^+$， $\boldsymbol{u}=(u^1,u^2,u^3)(t,x)\in R^3$， $\boldsymbol{B}=(B^1,B^2,B^3)(t,x)\in R^3$ 以及 $P=P(\sigma)=\sigma^\gamma\ (\gamma\ge 1)$ 分别表示密度、速度、磁场和压强。压强 $P(\sigma)$ 是一个光滑函数满足 $P'(1)=1$。θ,η 是粘性系数满足 $\theta>0$ 和 $2\theta+3\eta\ge 0$。

ν 是磁扩散系数满足 $\nu>0$。

在(1.1)中磁场 $\boldsymbol{B}=0$ 时，可压缩 MHD 方程组转变为可压缩 Navier-Stokes (N-S)方程组。最近，He，Huang 和 Wang [1]证明了可压缩 N-S 方程组大解的全局稳定性。同时，如果初值 $(\sigma_0-1,\boldsymbol{u}_0)\in L^p(R^3)\cap H^2(R^3)$，其中， $p\in[1,2)$，他们建立了解的衰减率：

$$\|(\sigma-1,\boldsymbol{u})(t)\|_{H^1} \le C(1+t)^{-\frac{3}{4}\left(\frac{2}{p}-1\right)}. \tag{1.2}$$

随后，在[1]工作的基础上，Gao，Wei 和 Yao [2]建立了以下的衰减率， $\forall t\ge T^*$，

$$\|\nabla(\sigma-1,\boldsymbol{u})(t)\|_{H^1} + \|\partial_t(\sigma-1,\boldsymbol{u})(t)\|_{L^2} \le C(1+t)^{-\frac{3}{4}\left(\frac{2}{p}-1\right)-\frac{1}{2}},\ p\in[1,2) \tag{1.3}$$

对三维可压缩 MHD 方程组，如果 $\|(\sigma_0-1,\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{B}_0)(t)\|_{H^3}$ 充分小，Chen 和 Tan [3]证明了光滑解的全局存在性。进一步，如果 $\|(\sigma_0-1,\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{B}_0)\|_{L^p}<\infty,\ p\in\left[1,\frac{6}{5}\right)$，他们还得到了解的空间导数的衰减率：

$$\begin{aligned} &\|(\sigma-1,\boldsymbol{u},\boldsymbol{B})(t)\|_{L^q} \le C(1+t)^{-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}, \quad \forall q\in[2,6], \\ &\|\nabla^k(\sigma-1,\boldsymbol{u},\boldsymbol{B})(t)\|_{L^2} \le C(1+t)^{-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}}, \quad k=1,2,3. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Li 和 Yu [4]证明了 $p=1$ 的情况。此外，Zhang 和 Zhao [5]估计了解的时间导数的衰减率，

$$\|\partial_t(\sigma-1,\boldsymbol{u},\boldsymbol{B})(t)\|_{H^1} \le C(1+t)^{-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}}, \quad p\in\left[1,\frac{6}{5}\right). \tag{1.5}$$

随后，Gao，Chen 和 Yao [6]改进了 Chen 和 Tan [3]，Li 和 Yu [4]的工作，建立了解的高阶空间导数和混合时空导数的衰减率：

$$\begin{aligned}&\left\|\nabla^2(\sigma-1,\boldsymbol{u})(t)\right\|_{H^1}\le C(1+t)^{-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)-1},\quad \left\|\nabla^s\boldsymbol{B}(t)\right\|_{H^{3-s}}\le C(1+t)^{-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)-\frac{s}{2}},\\&\left\|\nabla^l(\sigma-1)_t(t)\right\|_{H^{2-l}}+\left\|\nabla^l\boldsymbol{u}_t(t)\right\|_{L^2}\le C(1+t)^{-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)-\frac{l+1}{2}},\quad \left\|\nabla^l\boldsymbol{B}_t(t)\right\|_{L^2}\le C(1+t)^{-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)-\frac{l+2}{2}}.\end{aligned}\tag{1.6}$$

其中 $s=2,3,\ l=0,1,\ p\in\left[1,\frac{6}{5}\right)$。如果初值 $(\sigma_0-1,\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{B}_0)\in H^N\cap\dot{H}^{-k}\left(k\in\left[0,\frac{3}{2}\right)\right)$，受 Guo 和 Wang [7]的启发，Tan 和 Wang [8]得到了解的空间导数的衰减率，

$$\left\|\nabla^r(\sigma-1,u,B)(t)\right\|_{H^{N-r}}\le C(1+t)^{-\frac{r+k}{2}},\quad 0\le r\le N-1.\tag{1.7}$$

对于完全可压缩 MHD 方程组，Pu 和 Guo [9]，Gao，Tao 和 Yao [10]分别证明了(1.4)和(1.6)。对可压缩 Hall-MHD 方程组，如果 $\left\|(\sigma_0-1,\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{B}_0)(t)\right\|_{H^2}$ 充分小，Gao 和 Yao [11]证明了解的全局存在性。进一步，如果 $\left\|(\sigma_0-1,\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{B}_0)\right\|_{L^1}<\infty$，他们建立了如下的衰减率：

$$\begin{aligned}&\left\|\nabla^m(\sigma-1,\boldsymbol{u})(t)\right\|_{H^{2-m}}\le C(1+t)^{-\frac{3+2m}{4}},\quad \left\|\nabla^l\boldsymbol{B}(t)\right\|_{H^{2-l}}\le C(1+t)^{-\frac{3+2l}{4}},\\&\left\|(\sigma-1)_t(t)\right\|_{H^1}+\left\|\boldsymbol{u}_t(t)\right\|_{L^2}\le C(1+t)^{-\frac{5}{4}},\quad \left\|\boldsymbol{B}_t(t)\right\|_{L^2}\le C(1+t)^{-\frac{7}{4}},\end{aligned}\tag{1.8}$$

其中，$m=0,1,\ l=0,1,2$。此外，他们还在 H^3 框架下得到了与可压缩 MHD 方程组相似的结论。

对于三维可压缩 MHD 方程组的大解，Chen，Huang 和 Xu [12]研究了解在整个空间中的全局时间稳定性。如果初值 $(\sigma_0-1,\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{B}_0)\in L^1\left(R^3\right)\cap H^2\left(R^3\right)$，他们证明了解的衰减率，

$$\left\|(\sigma-1,\boldsymbol{u},\boldsymbol{B})(t)\right\|_{H^1}\le C(1+t)^{-\frac{3}{4}}.\tag{1.9}$$

在[12]的基础上，Gao，Wei 和 Yao [13]证明了磁场 $\boldsymbol{B}$ 的空间和时间导数的衰减率，

$$\left\|\nabla\boldsymbol{B}(t)\right\|_{H^1}+\left\|\boldsymbol{B}_t(t)\right\|_{H^1}\le C(1+t)^{-\frac{5}{4}},\quad \forall t\ge T^{**}.\tag{1.10}$$

在[14]中，Wang，Chen 和 Wang 得到了大解的时间和空间导数的衰减率：

$$\left\|\partial_t(\sigma-1,\boldsymbol{u},\boldsymbol{B})(t)\right\|_{L^2}+\left\|\nabla(\sigma-1,\boldsymbol{u},\boldsymbol{B})\right\|_{H^1}\le C(1+t)^{-\frac{5}{4}},\quad \forall t\ge T_1.\tag{1.11}$$

然后，在没有给出大解时间导数衰减率的情况下，他们在[15]中进一步得到大解较高空间导数的衰减率：

$$\left\|\nabla^k(\sigma-1,\boldsymbol{u},\boldsymbol{B})(t)\right\|_{L^2}\le C(1+t)^{-\frac{3}{4}-\frac{k}{2}},\quad \forall t\ge T,\ k=0,1,2.\tag{1.12}$$

因此，本文致力于得到比(1.11)更好的大解的时间导数衰减率。在陈述本文定理之前，强调一些后面将用到的符号和定理。

定义：常数 C 是与时间 t 无关的正常数，在不同的位置可能代表不同的数值。$H^k\left(R^3\right)$ 和 $L^p\left(R^3\right)$ 分别表示带有范数 $\|\bullet\|_{H^k}$ 的 Sobolev 空间以及带有范数 $\|\bullet\|_{L^p}$ 的 Lebesgue 空间。为了简单起见，我们定义 $\|(A,B)\|_Y=\|A\|_Y+\|B\|_Y$。

本文的主要目的是得到大解的时间导数的衰减率，这取决于解和它们的空间导数。因此，首先引入如下定理。

定理 1.1 ([12])： 设 $\theta>\frac{1}{2}\eta$，$(\sigma,\boldsymbol{u},\boldsymbol{B})$ 是(1.1)的一个光滑解满足 $0\le\sigma\le\bar{\sigma}$，$\sup_{t\ge0}\|\boldsymbol{B}(\cdot,t)\|_{L^\infty}+\sup_{t\ge0}\|\sigma(\cdot,t)\|_{C^\alpha}\le M\ (0<\alpha<1)$。初值 $(\sigma_0,\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{B}_0)$ 满足 $\sigma_0\ge a>0$ 和相容性条件：

$$\begin{cases}\boldsymbol{u}_t\big|_{t=0}=-\boldsymbol{u}_0\cdot\nabla\boldsymbol{u}_0+\dfrac{1}{\sigma_0}\left(\theta\Delta\boldsymbol{u}_0+(\theta+\eta)\nabla\operatorname{div}\boldsymbol{u}_0+\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla\boldsymbol{B}_0-\dfrac{1}{2}\nabla\left(|\boldsymbol{B}_0|^2\right)-\nabla\sigma_0^\gamma\right),\\ \boldsymbol{B}_t\big|_{t=0}=\nu\Delta\boldsymbol{B}_0+\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla\boldsymbol{u}_0-\boldsymbol{u}_0\cdot\nabla\boldsymbol{B}_0-\operatorname{div}(\boldsymbol{u}_0)\boldsymbol{B}_0.\end{cases}$$

如果 $(\sigma_0-1,\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{B}_0)\in L^1(R^3)\cap H^2(R^3)$，那么 $\forall t\ge0$，有：

$$\underline{\sigma}\le\sigma(x,t),\ \ (\underline{\sigma}>0\text{是一个常数})\tag{1.13}$$

$$\|(\sigma-1,\boldsymbol{u},\boldsymbol{B})\|_{H^2}^2+\int_0^\infty\left(\|\nabla(\sigma-1)(\tau)\|_{H^1}^2+\|\nabla(\boldsymbol{u},\boldsymbol{B})(\tau)\|_{H^2}^2\right)\mathrm{d}\tau\le C_1,\tag{1.14}$$

$$\|(\sigma-1,\boldsymbol{u},\boldsymbol{B})\|_{H^1}\le C_2(1+t)^{-\frac{3}{4}},\tag{1.15}$$

其中，C_1 和 C_2 是依赖于 σ,M 和 $\|(\sigma_0-1,\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{B}_0)\|_{L^1\cap H^2}$ 但与时间 t 无关的正的常数。

定理 1.2 ([15])： 在定理 1.1 的假设下，(1.1)的大解 $(\sigma-1,\boldsymbol{u},\boldsymbol{B})$ 有如下的衰减率：

$$\left\|\nabla^k(\sigma-1,\boldsymbol{u},\boldsymbol{B})(t)\right\|_{L^2}\le C(1+t)^{-\frac{3}{4}-\frac{k}{2}},\quad k=0,1,2,\quad\forall t\ge T,\tag{1.16}$$

其中，T 表示足够大的时间。

最后，本文主要结论如下：

定理 1.3： 在定理 1.1 的假设下，(1.1)的大解 $(\sigma-1,\boldsymbol{u},\boldsymbol{B})$ 的时间导数有如下的衰减率：

$$\|(\sigma-1,\boldsymbol{u})_t\|_{L^2}\le C(1+t)^{-\frac{5}{4}},\ \|\boldsymbol{B}_t\|_{L^2}\le C(1+t)^{-\frac{7}{4}},\ \|\nabla(\sigma-1)_t\|_{L^2}\le C(1+t)^{-\frac{7}{4}},\ \forall t\ge T,\tag{1.17}$$

其中，时间 T 如定理 1.2 的定义。

注：由于质量方程是双曲方程，σ_t 的衰减估计受到 $\nabla\boldsymbol{u}$ 衰减率的影响。同时 $\boldsymbol{u}_t$ 也受 $\nabla\sigma$ 的限制。

注：与[14]相比，我们得到 $\boldsymbol{B}_t$ 的衰减率是 $(1+t)^{-\frac{7}{4}}$，这优于 $(1+t)^{-\frac{5}{4}}$。此外，我们得到了密度 σ 的混合时空导数的衰减率。

本文内容如下：第 2 节重新表述了方程组(1.1)并引入一些将会用到的引理。第 3 节证明了主要结果定理 1.3。

2. 准备工作

在本节中，我们将重新表述方程组(1.1)。首先我们引入以下等式。

$$\begin{aligned}&(\nabla\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\nabla\boldsymbol{B}-\frac{1}{2}\nabla\left(|\boldsymbol{B}|^2\right),\\&\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{B})=-\Delta\boldsymbol{B},\\&\nabla\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})=(\operatorname{div}\boldsymbol{B})\boldsymbol{u}-(\operatorname{div}\boldsymbol{u})\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}\cdot\nabla\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{B}=-(\operatorname{div}\boldsymbol{u})\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}\cdot\nabla\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{B}.\end{aligned}$$

定义 $n=\sigma-1$，(1.1)可表述为：

$$\begin{cases}n_t+\operatorname{div}\boldsymbol{u}=I_1,\\ \boldsymbol{u}_t-\theta\Delta\boldsymbol{u}-(\theta+\eta)\nabla\operatorname{div}\boldsymbol{u}+\nabla n=I_2,\\ \boldsymbol{B}_t-\nu\Delta\boldsymbol{B}=I_3,\\ \lim\limits_{|x|\to\infty}(n,\boldsymbol{u},\boldsymbol{B})(0,x)=(0,\boldsymbol{0},\boldsymbol{0}).\end{cases}\tag{2.1}$$

其中，非线性项 I_1,I_2,I_3 的定义如下：

$$\begin{cases} I_1 = -n\operatorname{div}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}\cdot\nabla n, \\ \boldsymbol{I}_2 = -\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} - \dfrac{n}{n+1}\left[\theta\Delta\boldsymbol{u} + (\theta+\eta)\nabla\operatorname{div}\boldsymbol{u}\right] - \left(\dfrac{P'(n+1)}{n+1} - 1\right)\nabla n + \dfrac{1}{n+1}\left[\boldsymbol{B}\cdot\nabla\boldsymbol{B} - \dfrac{1}{2}\nabla\left(|\boldsymbol{B}|^2\right)\right], \\ \boldsymbol{I}_3 = -(\operatorname{div}\boldsymbol{u})\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}\cdot\nabla\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{B}. \end{cases} \tag{2.2}$$

事实上，将$(1.1)_1$中的σ替换为$n+1$，得到：

$$(n+1)_t + \operatorname{div}\left[(n+1)\boldsymbol{u}\right] = 0, \tag{2.3}$$

借助$\operatorname{div}\left[(n+1)\boldsymbol{u}\right] = \operatorname{div}(n\boldsymbol{u}) + \operatorname{div}\boldsymbol{u} = n\operatorname{div}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla n + \operatorname{div}\boldsymbol{u}$，整理得：

$$n_t + \operatorname{div}\boldsymbol{u} = -n\operatorname{div}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}\cdot\nabla n = I_1. \tag{2.4}$$

对$(2.1)_2$，应用$\operatorname{div}(\sigma\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}) = \operatorname{div}(\sigma\boldsymbol{u})\boldsymbol{u} + \sigma\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}$和$(1.1)_1$，容易得到：

$$\sigma\boldsymbol{u}_t + \sigma\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} - \theta\Delta\boldsymbol{u} - (\theta+\eta)\nabla\operatorname{div}\boldsymbol{u} + \nabla P(\sigma) = (\nabla\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B}. \tag{2.5}$$

(2.5)两边同时乘$\dfrac{1}{n+1}$ (即$\dfrac{1}{\sigma}$)，我们有

$$\boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} - \frac{1}{n+1}\left[\theta\Delta\boldsymbol{u} + (\theta+\eta)\nabla\operatorname{div}\boldsymbol{u}\right] + \frac{1}{n+1}\nabla P(n+1) = \frac{1}{n+1}\left[\boldsymbol{B}\cdot\nabla\boldsymbol{B} - \frac{1}{2}\nabla\left(|\boldsymbol{B}|^2\right)\right]. \tag{2.6}$$

将$\dfrac{1}{n+1} = 1 - \dfrac{n}{n+1}, \dfrac{1}{n+1}\nabla P(n+1) = \dfrac{1}{n+1}P'(n+1)\nabla n = \left[1 + \left(\dfrac{P'(n+1)}{n+1} - 1\right)\right]\nabla n$代入(2.6)，把线性项放在左边非线性项放在右边，

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{u}_t - \theta\Delta\boldsymbol{u} - (\theta+\eta)\nabla\operatorname{div}\boldsymbol{u} + \nabla n \\ &= -\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} - \frac{n}{n+1}\left[\theta\Delta\boldsymbol{u} + (\theta+\eta)\nabla\operatorname{div}\boldsymbol{u}\right] - \left(\frac{P'(n+1)}{n+1} - 1\right)\nabla n + \frac{1}{n+1}\left[\boldsymbol{B}\cdot\nabla\boldsymbol{B} - \frac{1}{2}\nabla\left(|\boldsymbol{B}|^2\right)\right] \\ &= \boldsymbol{I}_2. \end{aligned} \tag{2.7}$$

$(2.1)_3$可以从$(1.1)_3$直接推导出。

接下来，给出关于n的一些重要的非线性函数。为了方便起见，定义

$$\varphi(n) = \frac{n}{n+1},\quad \phi(n) = \frac{P'(n+1)}{n+1} - 1,\quad \psi(n) = \frac{1}{n+1}. \tag{2.8}$$

引理 2.1：(2.8)定义的函数满足如下不等式：

$$\begin{aligned} &|\varphi(n)| \le C|n|,\quad |\phi(n)| \le C|n|,\quad |\psi(n)| \le C, \\ &\left|\varphi^{(k)}(n)\right| \le C,\quad \left|\phi^{(k)}(n)\right| \le C,\quad \left|\psi^{(k)}(n)\right| \le C,\quad \forall k \ge 1. \end{aligned} \tag{2.9}$$

证明：由定理 1.1 知$\underline{\sigma} \le \sigma(x,t) \le \bar{\sigma}, (\underline{\sigma} > 0)$，这意味着$\underline{\sigma} \le n+1 \le \bar{\sigma}$。因此，可以推出

$$|\varphi(n)| = \left|\frac{n}{n+1}\right| \le C|n|,\quad |\psi(n)| = \left|\frac{1}{n+1}\right| \le C. \tag{2.10}$$

因为$P(\sigma) = \sigma^\gamma$是定义在 1 的某邻域上的光滑函数，故

$$P'(n+1) = P'(1) + P''(\xi)n,\quad (1 < \xi < n+1). \tag{2.11}$$

$$\left|\phi(n)\right|=\left|\frac{P'(n+1)}{n+1}-1\right|=\left|\frac{P'(n+1)-P'(1)(n+1)}{n+1}\right|=\left|\frac{\left(P''(\xi)-P'(1)\right)n}{n+1}\right|\le C\left|n\right|. \tag{2.12}$$

对于 $\varphi(n),\phi(n)$ 和 $\psi(n)$ 的导数，通过计算有：

$$\left|\varphi^{(k)}(n)\right|=\left|(-1)^{k+1}\frac{k!}{(n+1)^{k+1}}\right|\le C. \tag{2.13}$$

$$\left|\phi^{(k)}(n)\right|=\left|\frac{\sum_{i=0}^{k}C_iP^{(i+1)}(n+1)(n+1)^i}{(n+1)^{k+1}}\right|\le C. \tag{2.14}$$

$$\left|\psi^{(k)}(n)\right|=\left|(-1)^{k}\frac{k!}{(n+1)^{k+1}}\right|\le C. \tag{2.15}$$

最后引入一些将在后面用到的 Sobolev 不等式。

引理 2.2：([16] [17]) $\forall p\in[2,6]$，如果 $f\in H^2(R^3)$，那么

$$\|f\|_{L^p}\le C\|f\|_{H^1},\ \|f\|_{L^6}\le C\|\nabla f\|_{L^2},\ \|f\|_{L^\infty}\le C\|\nabla f\|_{H^1}. \tag{2.16}$$

3. 定理 1.3 的证明

证明：借助(2.1)，(2.2)，Holder 不等式，(2.16)和(1.16)，我们有：

$$\begin{aligned}\|n_t\|_{L^2}&=\|\mathrm{div}\boldsymbol{u}+n\mathrm{div}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla n\|_{L^2}\\&\le\|\mathrm{div}\boldsymbol{u}\|_{L^2}+\|n\|_{L^\infty}\|\mathrm{div}\boldsymbol{u}\|_{L^2}+\|\nabla n\|_{L^3}\|\boldsymbol{u}\|_{L^6}\\&\le C\left(\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^2}+\|\nabla n\|_{H^1}\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^2}\right)\\&\le C(1+t)^{-\frac{5}{4}}.\end{aligned} \tag{3.1}$$

$(2.1)_1$ 取一阶空间导数，类似于(3.1)，得到：

$$\begin{aligned}\|\nabla n_t\|_{L^2}&=\|\nabla\mathrm{div}\boldsymbol{u}+\nabla(n\mathrm{div}\boldsymbol{u})+\nabla(\boldsymbol{u}\cdot\nabla n)\|_{L^2}\\&\le C\left(\|\nabla\mathrm{div}\boldsymbol{u}\|_{L^2}+\|\nabla n\|_{L^3}\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^6}+\|n\|_{L^\infty}\|\nabla^2\boldsymbol{u}\|_{L^2}+\|\boldsymbol{u}\|_{L^\infty}\|\nabla^2 n\|_{L^2}\right)\\&\le C\left(\|\nabla^2\boldsymbol{u}\|_{L^2}+\|\nabla n\|_{H^1}\|\nabla^2\boldsymbol{u}\|_{L^2}+\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{H^1}\|\nabla^2 n\|_{L^2}\right)\\&\le C(1+t)^{-\frac{7}{4}}.\end{aligned} \tag{3.2}$$

通过(2.2)，Holder 不等式，引理 2.1，(2.16)和(1.16)，容易推出：

$$\begin{aligned}\|I_2\|_{L^2}&=\left\|-\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}-\varphi(n)\left[\theta\Delta\boldsymbol{u}+(\theta+\eta)\nabla\mathrm{div}\boldsymbol{u}\right]-\phi(n)\nabla n+\psi(n)\left[\boldsymbol{B}\cdot\nabla\boldsymbol{B}-\frac{1}{2}\nabla\left(|\boldsymbol{B}|^2\right)\right]\right\|_{L^2}\\&\le C\left(\|\boldsymbol{u}\|_{L^3}\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^6}+\|\varphi(n)\|_{L^\infty}\|\nabla^2\boldsymbol{u}\|_{L^2}+\|\phi(n)\|_{L^3}\|\nabla n\|_{L^6}+\|\psi(n)\|_{L^\infty}\|\boldsymbol{B}\|_{L^3}\|\nabla\boldsymbol{B}\|_{L^6}\right)\\&\le C\left(\|\boldsymbol{u}\|_{H^1}\|\nabla^2\boldsymbol{u}\|_{L^2}+\|\nabla n\|_{H^1}\|\nabla^2\boldsymbol{u}\|_{L^2}+\|n\|_{H^1}\|\nabla^2 n\|_{L^2}+\|\boldsymbol{B}\|_{H^1}\|\nabla^2\boldsymbol{B}\|_{L^2}\right)\\&\le C(1+t)^{-\frac{10}{4}}.\end{aligned} \tag{3.3}$$

因此，利用(2.1)，(3.3)和(1.16)可以得到：

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{u}_t\|_{L^2} &= \|\theta\Delta\boldsymbol{u}+(\theta+\eta)\nabla\mathrm{div}\boldsymbol{u}-\nabla n+I_2\|_{L^2} \\
&\le C\left(\|\nabla^2\boldsymbol{u}\|_{L^2}+\|\nabla n\|_{L^2}+\|I_2\|_{L^2}\right) \\
&\le C(1+t)^{-\frac{5}{4}}.
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

最后，再次使用(2.1)，(2.2)，Holder 不等式，(2.16)和(1.16)，我们有：

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{B}_t\|_{L^2} &= \|\nu\Delta\boldsymbol{B}-(\mathrm{div}\boldsymbol{u})\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}\cdot\nabla\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{B}\|_{L^2} \\
&\le C\left(\|\Delta\boldsymbol{B}\|_{L^2}+\|\boldsymbol{B}\|_{L^3}\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^6}+\|\boldsymbol{u}\|_{L^3}\|\nabla\boldsymbol{B}\|_{L^6}\right) \\
&\le C\left(\|\nabla^2\boldsymbol{B}\|_{L^2}+\|\boldsymbol{B}\|_{H^1}\|\nabla^2\boldsymbol{u}\|_{L^2}+\|\boldsymbol{u}\|_{H^1}\|\nabla^2\boldsymbol{B}\|_{L^2}\right) \\
&\le C(1+t)^{-\frac{7}{4}}.
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

致　谢

作者衷心感谢陈菲老师的指导和建议。

基金项目

国家自然科学基金(项目编号：12101345)；山东省自然科学基金(项目编号：ZR2021QA017)。

参考文献

[1] He, L., Huang, J. and Wang, C. (2019) Global Stability of Large Solutions to the 3D Compressible Navier-Stokes Equations. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **234**, 1167-1222. https://doi.org/10.1007/s00205-019-01410-8

[2] Gao, J., Wei, Z. and Yao, Z. (2020) The Optimal Decay Rate of Strong Solution for the Compressible Navier-Stokes Equations with Large Initial Data. *Physica D*: *Nonlinear Phenomena*, **406**, Article ID: 132506. https://doi.org/10.1016/j.physd.2020.132506

[3] Chen, Q. and Tan, Z. (2010) Global Existence and Convergence Rates of Smooth Solutions for the Compressible Magnetohydrodynamic Equations. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **72**, 4438-4451. https://doi.org/10.1016/j.na.2010.02.019

[4] Li, F. and Yu, H. (2011) Optimal Decay Rate of Classical Solutions to the Compressible Magnetohydrodynamic Equations. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A*: *Mathematics*, **141**, 109-126. https://doi.org/10.1017/S0308210509001632

[5] Zhang, J. and Zhao, J. (2010) Some Decay Estimates of Solutions for the 3-D Compressible Isentropic Magnetohydrodynamics. *Communications in Mathematical Sciences*, **8**, 835-850. https://doi.org/10.4310/CMS.2010.v8.n4.a2

[6] Gao, J., Chen, Y. and Yao, Z. (2015) Long-Time Behavior of Solution to the Compressible Magnetohydrodynamic Equations. *Nonlinear Analysis*, **128**, 122-135. https://doi.org/10.1016/j.na.2015.07.028

[7] Guo, Y. and Wang, Y. (2012) Decay of Dissipative Equations and Negative Sobolev Spaces. Communications in Partial *Differential Equations*, **37**, 2165-2208. https://doi.org/10.1080/03605302.2012.696296

[8] Tan, Z. and Wang, H. (2013) Optimal Decay Rates of the Compressible Magnetohydrodynamic Equations. *Nonlinear Analysis*: *Real World Applications*, **14**, 188-201. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2012.05.012

[9] Pu, X. and Guo, B. (2013) Global Existence and Convergence Rates of Smooth Solutions for the Full Compressible MHD Equations. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, **64**, 519-538. https://doi.org/10.1007/s00033-012-0245-5

[10] Gao, J., Tao, Q. and Yao, Z. (2016) Optimal Decay Rates of Classical Solutions for the Full Compressible MHD Equations. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, **67**, Article No. 23. https://doi.org/10.1007/s00033-016-0616-4

[11] Gao, J. and Yao, Z.-A. (2015) Global Existence and Optimal Decay Rates of Solutions for Compressible Hall-MHD Equations. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **36**, 3077-3106. https://doi.org/10.3934/dcds.2016.36.3077

[12] Chen, Y., Huang, J. and Xu, H. (2019) Global Stability of Large Solutions of the 3-D Compressible Magnetohydrodynamic Equations. *Nonlinear Analysis*: *Real World Applications*, **47**, 272-290. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2018.11.001

[13] Gao, J., Wei, Z. and Yao, Z. (2020) Decay Rate of Strong Solution for the Compressible Magnetohydrodynamic Equations with Large Initial Data. *Applied Mathematics Letters*, **102**, Article ID: 106100. https://doi.org/10.1016/j.aml.2019.106100

[14] Wang, S., Chen, F., Zhao, Y. and Wang, C. (2022) Estimation of Decay Rates to Large-Solutions of 3D Compressible Magnetohydrodynamic System. *Journal of Mathematical Physics*, **63**, Article ID: 111507. https://doi.org/10.1063/5.0096472

[15] Wang, S., Chen, F. and Wang, C. (2022) Optimal Time Decay Estimation for Large-Solution about 3D Compressible MHD Equations. ArXiv Preprint ArXiv: 2206.05117.

[16] Adams, R.A. (1975) Sobolev Spaces. Academic Press, New York, 975 p.

[17] Deckelnick, K. (1992) Decay Estimates for the Compressible Navier-Stokes Equations in Unbounded Domains. *Mathematische Zeitschrift*, **209**, 115-130. https://doi.org/10.1007/BF02570825