**Pure Mathematics** 理论数学, 2023, 13(2), 285-293
Published Online February 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.132032

# 三角形正弦定理的学习思路研究

**帕热迪古丽·阿不迪力木**

新疆师范大学数学科学学院，新疆 乌鲁木齐

收稿日期：2023年1月16日；录用日期：2023年2月16日；发布日期：2023年2月24日

## 摘 要

在正弦定理学习过程中，首先根据三角形全等的判定方法引导学生发现解三角形存在的问题；其次，通过类比直角三角形中的边角关系，猜想一般三角形中的边角关系；再次，利用等边三角形等特例检验并严格证明正弦定理，再利用正弦定理解决问题；最后，通过实验探究让学生感受正弦定理中的比值2R的由来。

## 关键词

正弦定理，正弦定理中比值

# Rsearch on the Learning Ideas of Triangular Sine Theorem

**Abudilimu Parediguli**

School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: Jan. 16th, 2023; accepted: Feb. 16th, 2023; published: Feb. 24th, 2023

## Abstract

**In the learning pross of tringal sine theorem, first of all, according to the determination method of triangle equaivalence, the students are guided to find out the problems existing in solving triangels. Secondly, by analogy with the edge and angle relations in right angle triangles, the edge and angle relations in general triangles are conjectured. Thirdly, we use equilateral triangle and other special cases to test and strictly prove the sine theorem, and then use the striangle sine theorem to solve problem. Finally, through experiments, we explore the origin of the ratio 2R in the triangle sine theorem.**

文章引用：帕热迪古丽·阿不迪力木. 三角形正弦定理的学习思路研究[J]. 理论数学, 2023, 13(2): 285-293.
DOI: 10.12677/pm.2023.132032

**Keywords**

**Sine Theorem, Ratio in Sine Theorem**



## 1. 引言

正弦定理是 2019 人教 A 版高中数学必修 2 第一章第六节内容。课程安排在平面向量的应用这一节内容中，余弦定理之后，是平面向量在三角形中的具体应用。三角形是最基本的几何图形，三角形中的数量关系，有着及其广泛的应用。做好正弦定理的教学，能复习巩固旧知识，使学生掌握新的有用的知识，通过对正弦定理的探究和探讨，体验数学发现和创造的历程，进而培养学生提出问题、解决问题等研究性学习的能力。

## 2. 策略分析

高一学生已经学习过三角形中“大角对大边、小角对小边”、三角形全等的判定、三角函数，余弦定理，具备一定的计算能力，观察、分析、解决问题的能力，但另一方面对新旧知识间的联系、理解、应用往往会出现思维障碍，思维灵活性、深刻性受到制约。根据以上特点，教师应该激发学习数学的兴趣，提高学生学习主动性，恰当引导，帮助学生构建知识体系，逐步培养学生解决问题的能力。

1) 从学生已有的三角形边角关系的相关知识出发，类比解直角三角形，猜想一般三角形中的边角关系，举特殊例子检验猜想，并进一步结合数形结合的方法严格证明；

2) 课堂练习环节解决情境创设中提出的问题，展示应用正弦定理解决问题的过程；

3) 启发学生观察、比较，提出正弦定理中的比值问题，并通过实验探究推导正弦定理中的比值。

## 3. 目标设计

知识与技能：1) 能够证明正弦定理；2) 能够推导正弦定理中比值的由来；3) 能利用正弦定理解决实际问题；

过程与方法：通过类比直角三角形中的边角关系，猜想一般三角形中正弦定理，并利用数形结合的方法严格证明三角形中的正弦定理，感受“类比－猜想－证明”科学研究问题的方法；

情感态度价值观：培养学生探索数学规律的思维能力，通过三角函数、正弦定理等知识间的联系体现事物之间的普遍联系与辩证统一；

教学重点：正弦定理的内容及其证明方法；

教学难点：正弦定理的探索并证明，正弦定理中的比值的推导。

### 3.1. 创设情境，提出问题

1) 在这一节学习的是解三角形，类似解方程，即：已知三角形的几个元素，求其他元素。根据三角形全等的判定条件，在已知 SSS、SAS、ASA、AAS 的情况下，三角形唯一确定，就可以求这个三角形的其他元素。例如：

① SSS：已知 $\Delta ABC$ 中 $a=5$，$b=2$，$c=3$，求 $A$，$B$，$C$？

② SAS：已知 $\Delta ABC$ 中 $a=3$，$C=60^\circ$，$b=4$，求 $A$，$B$，$c$？

以上这两个问题，可以用上节课所学的余弦定理

$$\begin{cases} a^2=b^2+c^2-2bc\sin A \\ b^2=a^2+c^2-2ac\sin B \\ c^2=a^2+b^2-2ab\sin C \end{cases}$$

来解决。

③ ASA：已知 $\Delta ABC$ 中，$A=45^\circ$，$B=60^\circ$，$c=6$，求 $C$，$a$，$b$。

④ AAS：已知 $\Delta ABC$ 中 $A=45^\circ$，$B=60^\circ$，$b=5$，求 $C$，$a$，$c$。

问题③求出 $C$，就可以转化为 AAS 的情况。那对于已知 AAS 的三角形，如何求其他元素呢？这个问题显然不能用余弦定理来解决。

问题④中(如图 1)：根据“大角对大边，小角对小边”，

$$\because A=45^\circ,\ B=60^\circ$$
$$\therefore A<B$$
$$\therefore a<b$$
$$\therefore a<5$$

这样我们得到了一个定性的结论：$a$ 是一条比 5 小的边，但是 $a$ 具体等于多少呢？如何把它定量地算出来呢？这就是本节课正弦定理要解决的问题。

【设计意图】从新的角度看过去的问题，使学生对于过去的知识有了新的认识，同时使新知识建立在已有知识的坚实基础上，形成良好的知识结构。

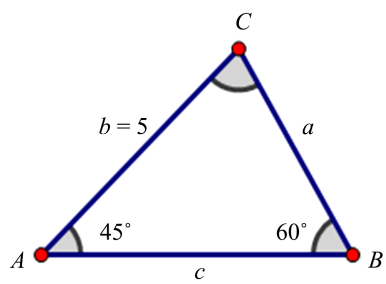


**Figure 1.** AAS
**图 1.** AAS

## 3.2. 正弦定理的发现

1) 解直角三角形

已知 RT$\Delta ABC$ (如图 2)中 $C=90^\circ$，则勾股定理：$a^2+b^2=c^2$

锐角三角函数的定义：

$$\sin A=\frac{a}{c},\ \sin B=\frac{b}{c}$$

$$\cos A=\frac{b}{c},\ \cos B=\frac{a}{c}$$

$$\tan A=\frac{a}{b},\quad \tan B=\frac{b}{a}$$

观察

$$\sin A=\frac{a}{c},\quad \sin B=\frac{b}{c}$$

发现，它们有共同的元素 $c$，可以变形为：

$$\frac{a}{\sin A}=c,\quad \frac{b}{\sin B}=c.$$

把两个式子联系起来，可得

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=c,$$

看起来不是很美观。又因为

$$\sin C=\sin 90^{\circ}=1,$$

所以上式可以写成 $\Delta ABC$ 各边与它所对角的正弦的比相等的形式：

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

可以发现，在 RT$\Delta ABC$ 中各边和它所对角的正弦的比相等，这样就得到了一个很美的式子。

猜想：在一般 $\Delta ABC$ 中，各边和它所对角的正弦之比是否相等？也就是 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ 是否成立？

【设计意图】从初中所学的解直角三角形的旧知识出发，与本节课中的解三角形的问题联系在一起，实现新旧知识间的衔接，有助于学生形成知识体系；培养学生的数学猜想能力，对于提高他们的问题解决能力，从而提高学生的数学素养至关重要[1]。

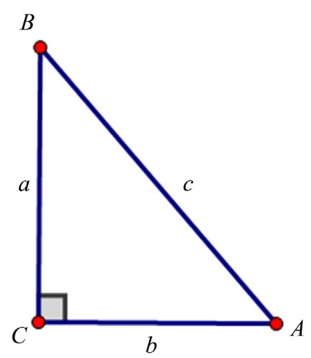


**Figure 2.** RtΔABC
**图 2.** RtΔABC

2) 特例检验

数学家们有了新猜想，并不会冒然直接证明它，而是会小心翼翼地举一些特殊的例子检验猜想是否可能成立。所以，我们学习数学家的思维方法举一些特殊的斜三角形检验上述猜想是否可能成立。

特例 1：等边三角形

等边 $\Delta ABC$ (如图 3)中，

$$A = B = C = 60^\circ$$

$$\sin A = \sin B = \sin C$$

$$a = b = c$$

显然，对于等边三角形，$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$ 成立。

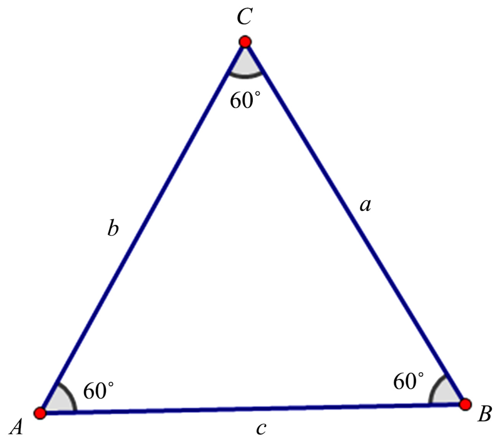


**Figure 3.** Equil ΔABC
**图 3.** 等边 ΔABC

特例 2：顶角为 120°的等腰三角形

不妨设底边上的高 $h = 1$，如图 4 所示。

$$A = 120^\circ,\ \ B = C = 30^\circ$$

$$a = 2\sqrt{3},\ \ b = c = 2$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{2\sqrt{3}}{\sin 120^\circ} = 4,\ \ \frac{b}{\sin B} = \frac{2}{\sin 30^\circ} = 4,\ \ \frac{c}{\sin C} = \frac{2}{\sin 30^\circ} = 4$$

因此对于等腰三角形 $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$ 成立。

【设计意图】特殊例子检验更符合研究问题的思路。使学生逐步掌握研究数学问题的方法与思路，培养研究问题的能力。

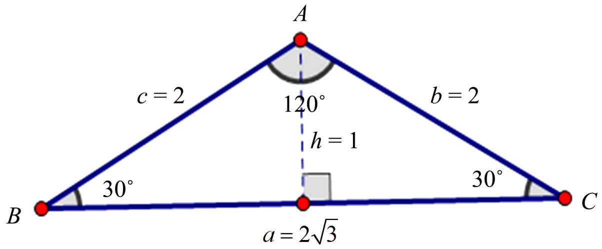


**Figure 4.** Lsosceles triangle with apex angle of 120°
**图 4.** 顶角为 120°的等腰三角形

3) 严格证明猜想

我们像数学家那样通过一个小实验，初步检验了猜想对于两个特例成立。接下来我们需要严格证明它。

要证明

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

只需证明

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B},\quad \frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

去分母可得：

$$a\sin B=b\sin A,\quad b\sin C=c\sin B$$

$a\sin B$ 与 $b\sin A$ 几何意义是什么呢？$a\sin B$ 与 $b\sin A$ 都是 $\Delta ABC$ 在同一条边 $c$ 上的高(如图 5)。则

$$a\sin B=b\sin A$$

同理可证

$$b\sin C=c\sin B$$

因此

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

对于锐角三角形、直角三角形、钝角三角形来说，$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ 都成立。因此可得正弦定理：在一个三角形中，各边和它所对角的正弦的比相等，即 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$。

【设计意图】选择从 $a\sin B$ 与 $b\sin A$ 的几何意义入手，引导学生证明正弦定理，充分体现数化形的数学思想方法。对于很多同学来说数化形有点困难，因此有必要在教学过程中进一步应用并渗透。

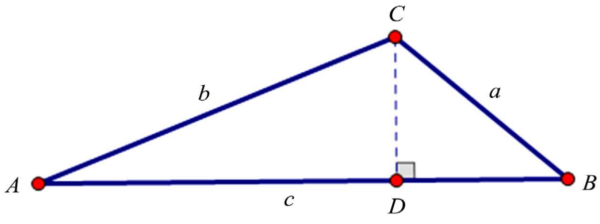


**Figure 5.** Geometric significance of $a\sin B$ and $b\sin A$

**图 5.** $a\sin B$ 与 $b\sin A$ 的几何意义

## 3.3. 正弦定理的应用

现在来解决刚开始提出的问题：已知 $\Delta ABC$ 中 $A=45^\circ$，$B=60^\circ$，$b=5$，求 $C$，$a$，$c$。

解：由三角形内角和定理，得

$$C=180^\circ-(A+B)=75^\circ.$$

由正弦定理，得

$$a=\frac{b}{\sin B}\cdot\sin A=\frac{5\sqrt{6}}{3}$$

$$c=\frac{b}{\sin B}\cdot\sin C=\frac{15\sqrt{2}+5\sqrt{6}}{3}.$$

### 3.4. 正弦定理中的比值 2*R* 的由来

1) 提出问题

教师启发：回到正弦定理的发现过程，在 Rt$\Delta ABC$ 中，各边和它所对角的正弦的比相等，且等于斜边 $c$，即

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=c,$$

猜想：那么在一般 $\Delta ABC$ 中，是否存在与直角三角形类似的比值 $k$，使得

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k\ ?$$

并且 $k$ 也具有某种几何意义呢？

追问：如果一般 $\Delta ABC$ 中也存在一个比值 $k$，使得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k$，那比值 $k$ 由 $\Delta ABC$ 的哪些元素唯一确定呢？

注意到

$$\frac{a}{\sin A}=k,\quad \frac{b}{\sin B}=k,\quad \frac{c}{\sin C}=k.$$

如果 $\Delta ABC$ 的一条边及其对角确定，那比值 $k$ 就唯一确定。

2) 实验探究

教师启发：请大家进一步思考：当 $\Delta ABC$ 的一条边 $a$ 及其对角 $A$ 的大小确定时，这个三角形的形状是不是唯一确定呢？

第一步：每个同学画出 $a=6\text{ cm}$， $A=45^\circ$ 的三角形；

第二步：教师利用几何画板展示同学们画出的三角形，如图 6；

第三步：按相等的边 $a$ 重合在一起，如图 7。

可以发现这个三角形的形状随着顶点 $A$ 的位置变化而变化。根据“同弧所对的的圆周角相等”的逆命题[2]，可知顶点 $A$ 的运动轨迹是 $\Delta ABC$ 外接圆上的一段圆弧(如图 8)。

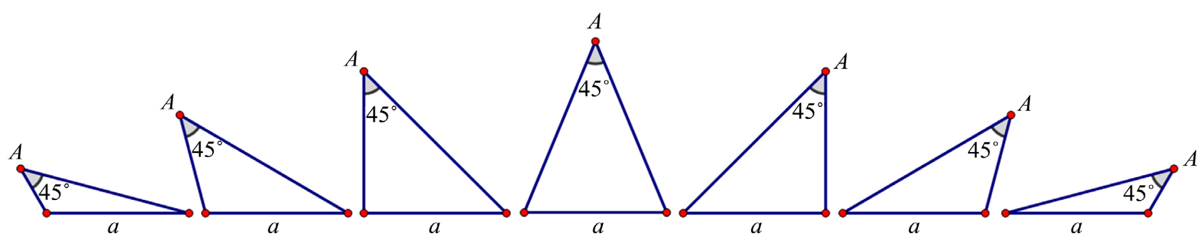


**Figure 6.** Triangle with $a=6\text{ cm}$, $A=45^\circ$

**图 6.** $a=6\text{ cm}$， $A=45^\circ$ 的三角形

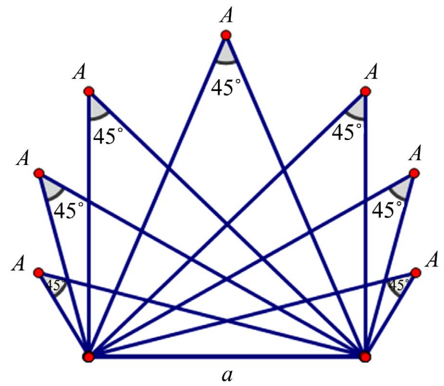


**Figure 7.** The figure with triangle edges $a$ coincident
**图 7.** 三角形边 $a$ 重合在一起的图形

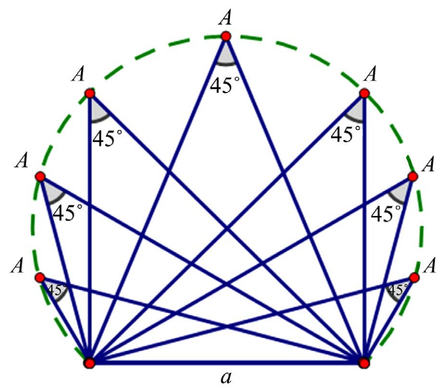


**Figure 8.** The motion trajectory of vertex A
**图 8.** 顶点 A 的运动轨迹

显然，当顶点 $A$ 运动到使 $\Delta ABC$ 为直角三角形时(如图 9)，依据“直径所对的圆周角等于 90°”可知 $AC = 2R$，此时 $\frac{a}{\sin A} = AC = 2R$。既然这些三角形的各边和它所对角的正弦之比都相等，对于一般的三角形也有 $\frac{a}{\sin A} = 2R$。

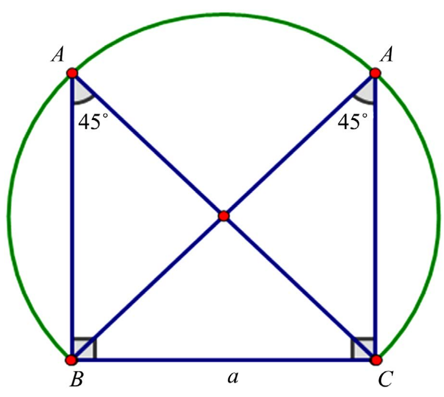


**Figure 9.** The relationship between the trajectory of vertex A and Rt$\Delta ABC$
**图 9.** 顶点 A 的轨迹与 Rt$\Delta ABC$ 的关系

因此可得：

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R \quad (2R\text{ 是 }\Delta ABC\text{ 的外接圆直径})$$

这样就得出了正弦定理的完整形式。

【设计意图】学生在教师的引导下，自己动手操作，体验探究式学习的乐趣；发现问题、观察、并解决问题，体会知识的自然生成过程，这一过程使学生对知识的理解更深入；同时可以使学生学会思考问题，激发学生解决问题的欲望，从而逐步喜欢上数学。

## 4. 小结

1) 通过“类比－猜想－证明”的过程，学习了三角形一个重要性质－正弦定理(任意三角形的各边和它所对角的正弦的比相等，都等于该三角形外接圆的直径)。

2) 利用正弦定理能够解决三角形中的两类问题：

a) 已知一边和两角

b) 已知两边和一个对角

3) 通过实验探究感受三角形正弦定理中的比值的自然生成。

4) 解决数学问题时主要运用了特殊到一般、类比、归纳、数形结合等数学思想。

## 参考文献

[1] 李树臣. 在猜想与探究活动中提高问题解决能力——从河南省 2019 年的中考第 22 题谈起[J]. 中学数学杂志, 2019(12): 53-56.

[2] 杨军. 正弦定理衍生的系列轨迹问题: 滑落的梯子[J]. 中小学数学(高中版), 2020(11): 56-59.